Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2017, т. 14, № 4, 97–110

УДК 511.72+517.5

М. В. Працьовитий*[1], *А. С. Чуйков*[2], *Д. В. Кюрчев

[1] *НПУ ім. М. П. Драгоманова, Інститут математики НАН України, Київ; prats4444@gmail.com*

[2] *Інститут математики НАН України, Київ; chyikov.artem@gmail.com*

Ланцюгові A_3-дроби: основи метричної теорії

We study a geometry of representation of numbers in terms of continued A_3-fractions, that is continued fractions, elements of which are acquire from a set $A_3 \equiv \{s_0, s_1, s_2\}$, де $0 < s_0 < s_1 < s_2, s_i \in \mathbb{R}$. We prove that if $s_0 s_2 = \frac{4}{3}$ and $s_1 = (s_0 + s_2)/2$ then each point of a certain interval has no more than two A_3-representation, and the set of points having two representations is countable, consequently, the encoding numbers system by means of a three-character alphabet, which is based on a decomposition of numbers in such continued fractions, has zero redundancy. The emphasis in the work is given to the topological-metric aspect of this representation (geometric sense of a figures, properties of the cylindrical and tail sets and so on).
Key words: continued fraction, convergents, geometry of continued fraction representation, metric ratios, cylindrical sets of continued fraction representation.

Вивчається геометрія представлення чисел ланцюговими A_3-дробами, тобто ланцюговими дробами, елементи яких набувають значення з множини $A_3 \equiv \{s_0, s_1, s_2\}$, де $0 < s_0 < s_1 < s_2, s_i \in \mathbb{R}$. Доведено, що при $s_0 s_2 = \frac{4}{3}$ і $s_1 = (s_0 + s_2)/2$ кожна точка певного інтервалу має не більш, ніж два A_3-представлення, причому множина точок, що мають два представлення, є зліченною, а отже, система кодування чисел засобами трисимвольного алфавіту, що ґрунтується на розкладах чисел у такі ланцюгові дроби, має нульову надлишковість. Основна увага у роботі приділена тополого-метричному аспекту вказаного зображення (геометричному змісту цифр зображення, властивостям циліндричних і хвостових множин тощо).

Ключові слова: ланцюговий дріб, підхідні дроби, геометрія ланцюгового зображення, метричні співвідношення, циліндричні множини ланцюгового зображення чисел.

Вступ

Ланцюгові дроби є ефективним засобом дослідження математичних об'єктів, зокрема моделей реальних процесів і явищ. Серед них елементарні дроби, дроби Данжуа та інші класи дробів, теорія яких розвивається й удосконалюється [1, 11]. На окрему увагу заслуговують дроби, елементи яких належать скінченним множинам. Якщо сукупність таких дробів забезпечує систему зображення (кодування) чисел цілого проміжка з нульовою надлишковістю (кожне число має не більш, ніж два зображення), то перспективи застосувань таких для розвитку метричної та ймовірнісної теорій чисел, ергодичної теорії і фрактального аналізу достатньо високі [2, 4 – 6, 8, 10].

У роботах [1, 3, 4], присвячених ланцюговим A_2-дробам, були викладені основи тополого-метричної теорії дійсних чисел у представленнях їх ланцюговими дробами з двоелементним алфавітом. Ця система представлення чисел має несамоподібну геометрію, але її двосимвольність і позитивні переваги «ланцюговості» дозволяють сподіватися на її технічну зручність [3, 7].

Ця робота присвячена розвиткові тих самих ідей на трисимвольному алфавіті, що має принципову відмінність. Ми пропонуємо основи теорії ланцюгових A_3-дробів, акцентуючи увагу на геометрії представлення дійсних чисел такими виразами.

1. Ланцюгові A_3-дроби

Нехай $A_3 \equiv \{s_0, s_1, s_2\}$ – задана множина додатних дійсних чисел ($s_0 < s_1 < s_2$). Розглядаються всеможливі вирази виду

$$\cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots}} \equiv [0; a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots], \quad \text{де} \quad a_i \in A_3, \tag{1}$$

які ми називаємо *ланцюговими A_3-дробами*. Кожен ланцюговий A_3-дріб є збіжним, оскільки ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ для довільної послідовності $(a_n) \in V \equiv A_3 \times A_3 \times \ldots \times A_3 \times \ldots$ розбігається.

Легко помітити, що значення виразу (1) не перевищує числа

$$\beta_2 = [0; (s_0, s_2)] = \frac{\sqrt{s_0^2 s_2^2 + 4 s_0 s_2} - s_0 s_2}{2 s_0}$$

(де круглі дужки означають період) і є не меншим за число

$$\beta_1 = [0; (s_2, s_0)] = \frac{\sqrt{s_0^2 s_2^2 + 4 s_0 s_2} - s_0 s_2}{2 s_2}.$$

Оскільки $\beta_1 = \dfrac{1}{s_2 + \beta_2}$, $\beta_2 = \dfrac{1}{s_0 + \beta_1}$, то очевидною є рівність $\dfrac{\beta_2}{\beta_1} = \dfrac{s_2}{s_0}$.

Позначимо через L_{A_3} множину всіх ланцюгових A_3-дробів, тобто

$$L_{A_3} = \{x | x = [0; a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots], (a_n) \in V\}.$$

Тоді очевидно, що $L_{A_3} \subseteq [\beta_1, \beta_2]$.

Зауваження 1. *Якщо A_2 є двоелементною підмножиною A_3, то множина $L_{A_2} = \{x|x = [0; a_1, \ldots, a_n, \ldots], a_n \in A_2\}$ є підмножиною L_{A_3}. Тому ланцюгові A_2-дроби утворюють підмножину ланцюгових A_3-дробів.*

Лема 1. *Якщо $s_0 s_2 \leq \frac{1}{2}$, то $L_{A_3} = [\beta_1; \beta_2]$.*

Справді, дане твердження є наслідком щойно доведеного факту $L_{A_3} \subseteq [\beta_1, \beta_2]$ і відомого твердження: якщо $A_2 = \{s_0, s_2\}$ і $s_0 s_2 \leq \frac{1}{2}$, то $L_{A_2} = [\beta_1, \beta_2]$.

Понад те, можна довести, що при $s_0 s_2 \leq \frac{1}{2}$ кожне число інтервалу (β_1, β_2) має континуальну множину різних розвинень у ланцюговий A_3-дріб.

Нагадаємо, що підхідним дробом порядку n ланцюгового дробу $[0; a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]$ називається число $\dfrac{p_n}{q_n}$, що є значенням скінченного ланцюгового дробу $[0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$.

Оскільки p_n і q_n залежать від перших n елементів ланцюгового дробу (1), то позначатимемо їх також $p(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ і $q(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Добре відомий [9] *закон утворення підхідних дробів*: для довільного натурального $n \geq 2$

$$\begin{cases} p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}, \\ q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}; \end{cases}$$

де $p_0 = 0, q_0 = 1, p_1 = 1, q_1 = a_1$.

2. Ланцюгове A_3-зображення: метричні властивості

Означення 1. *Циліндром рангу* n *з основою $c_1 c_2 \ldots c_n$ називається множина $\Delta^{A_3}_{c_1 c_2 \ldots c_n}$ усіх x, які зображаються ланцюговим A_3-дробом з першими n елементами, що дорівнюють відповідно $c_1, c_2, \ldots, c_n$, тобто*

$$\Delta^{A_3}_{c_1 c_2 \ldots c_n} = \{x|x = [0; a_1, ..., a_n, a_{n+1}, ...], a_i(x) = c_i, a_i \in A_3, i = \overline{1, n}\}.$$

Очевидно, що

$$x' \equiv \min \Delta^{A_3}_{c_1c_2\ldots c_n} = \begin{cases} [0; c_1, c_2, \ldots, c_n + \beta_2] & \text{при непарному } n, \\ [0; c_1, c_2, \ldots, c_n + \beta_1] & \text{при парному } n; \end{cases}$$

$$x'' \equiv \max \Delta^{A_3}_{c_1c_2\ldots c_n} = \begin{cases} [0; c_1, c_2, \ldots, c_n + \beta_1] & \text{при непарному } n, \\ [0; c_1, c_2, \ldots, c_n + \beta_2] & \text{при парному } n; \end{cases}$$

тобто $\Delta^{A_3}_{c_1c_2\ldots c_n} \subset [x'; x'']$.

Наприклад, циліндри першого рангу належать таким відрізкам:

$$\Delta_{s_0} \subset \left[\frac{1}{s_0+\beta_2}, \frac{1}{s_0+\beta_1}\right], \quad \Delta_{s_1} \subset \left[\frac{1}{s_1+\beta_2}, \frac{1}{s_1+\beta_1}\right],$$

$$\Delta_{s_2} \subset \left[\frac{1}{s_2+\beta_2}, \frac{1}{s_2+\beta_1}\right],$$

які ми називаємо *циліндричними.*

Циліндри мають такі властивості:

1) $\Delta^{A_3}_{c_1c_2\ldots c_n c} \subset \Delta^{A_3}_{c_1c_2\ldots c_n}$.

2) $\Delta^{A_3}_{c_1c_2\ldots c_n} = \Delta^{A_3}_{c_1c_2\ldots c_n s_0} \cup \Delta^{A_3}_{c_1c_2\ldots c_n s_1} \cup \Delta^{A_3}_{c_1c_2\ldots c_n s_2}$.

3) Діаметр циліндра обчислюється за формулою

$$\left|\Delta^{A_3}_{c_1c_2\ldots c_n}\right| = \frac{\beta_2 - \beta_1}{(q_n + \beta_1 q_{n-1})(q_n + \beta_2 q_{n-1})}. \tag{2}$$

Доведення. Справді,

$$\left|\Delta^{A_3}_{c_1c_2\ldots c_n}\right| = \max \Delta^{A_3}_{c_1c_2\ldots c_n} - \min \Delta^{A_3}_{c_1c_2\ldots c_n} =$$

$$= \left| [c_1, c_2, \ldots, c_n, \beta_2^{-1}] - [c_1, c_2, \ldots, c_n, \beta_1^{-1}] \right| =$$

$$= \left| \frac{\beta_2^{-1} p_n + p_{n-1}}{\beta_2^{-1} q_n + q_{n-1}} - \frac{\beta_1^{-1} p_n + p_{n-1}}{\beta_1^{-1} q_n + q_{n-1}} \right| =$$

$$= \left| \frac{p_n + \beta_2 p_{n-1}}{q_n + \beta_2 q_{n-1}} - \frac{p_n + \beta_1 p_{n-1}}{q_n + \beta_1 q_{n-1}} \right| =$$

$$= \frac{(\beta_2 - \beta_1)|p_{n-1}q_n - q_{n-1}p_n|}{(q_n + \beta_1 q_{n-1})(q_n + \beta_2 q_{n-1})}.$$

Враховуючи, що за властивостями підхідних дробів $p_{n-1}q_n - q_{n-1}p_n = (-1)^n$, отримуємо формулу (2). □

Наслідок 1. $|\Delta^{A_3}_{c_1\ldots c_k}| \to 0$ *при* $k \to \infty$.

4) Основне метричне відношення має вигляд

$$\frac{|\Delta^{A_3}_{c_1c_2\ldots c_n c}|}{|\Delta^{A_3}_{c_1c_2\ldots c_n}|} = \frac{\left(1 + \beta_1 \frac{q_{n-1}}{q_n}\right)\left(1 + \beta_2 \frac{q_{n-1}}{q_n}\right)}{\left(c + \beta_1 + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right)\left(c + \beta_2 + \frac{q_{n-1}}{q_n}\right)}.$$

Доведення. Це відношення виводиться з використанням закону утворення знаменників підхідних дробів і формули (2). □

Наслідок 2. *При* $s_0 = \dfrac{2}{3}, s_1 = \dfrac{4}{3}, s_2 = 2$ *відрізок* $[\beta_1, \beta_2] = [1/3; 1]$, *причому мають місце відношення:*

$$\frac{|\Delta^{A_3}_{c_1c_2\ldots c_n 2}|}{|\Delta^{A_3}_{c_1c_2\ldots c_n \frac{4}{3}}|} = \frac{5 + 3\dfrac{q_{n-1}}{q_n}}{3\left(3 + \dfrac{q_{n-1}}{q_n}\right)}, \quad \frac{|\Delta^{A_3}_{c_1c_2\ldots c_n \frac{2}{3}}|}{|\Delta^{A_3}_{c_1c_2\ldots c_n \frac{4}{3}}|} = \frac{7 + 3\dfrac{q_{n-1}}{q_n}}{3\left(1 + \dfrac{q_{n-1}}{q_n}\right)}. \tag{3}$$

Доведення. Використовуючи властивість 3 отримуємо:

$$\frac{|\Delta^{A_3}_{c_1c_2\ldots c_n 2}|}{|\Delta^{A_3}_{c_1c_2\ldots c_n}|} = \frac{1 + \dfrac{q_{n-1}}{q_n}}{7 + 3\dfrac{q_{n-1}}{q_n}}, \qquad \frac{|\Delta^{A_3}_{c_1c_2\ldots c_n \frac{2}{3}}|}{|\Delta^{A_3}_{c_1c_2\ldots c_n}|} = \frac{3 + \dfrac{q_{n-1}}{q_n}}{5 + 3\dfrac{q_{n-1}}{q_n}},$$

$$\frac{|\Delta^{A_3}_{c_1c_2\ldots c_n\frac{4}{3}}|}{|\Delta^{A_3}_{c_1c_2\ldots c_n}|} = \frac{3\left(3+\frac{q_{n-1}}{q_n}\right)\left(1+\frac{q_{n-1}}{q_n}\right)}{\left(5+3\frac{q_{n-1}}{q_n}\right)\left(7+3\frac{q_{n-1}}{q_n}\right)},$$

а звідси й рівності (3). □

Лема 2. *Умови*

$$\begin{cases} \dfrac{1}{s_2+\beta_1} = \dfrac{1}{s_1+\beta_2}, \\ \dfrac{1}{s_1+\beta_1} = \dfrac{1}{s_0+\beta_2}; \end{cases} \tag{4}$$

рівносильні до умов

$$\begin{cases} s_0 s_2 = \dfrac{4}{3}, \\ s_1 = \dfrac{s_0+s_2}{2}. \end{cases} \tag{5}$$

Доведення. Справді,

$$\begin{cases} \dfrac{1}{s_2+\beta_1} = \dfrac{1}{s_1+\beta_2}, \\ \dfrac{1}{s_1+\beta_1} = \dfrac{1}{s_0+\beta_2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s_2+\beta_1 = s_1+\beta_2, \\ s_1+\beta_1 = s_0+\beta_2. \end{cases}$$

Виражаючи з другого рівняння s_2 і підставляючи у перше, отримуємо:

$$s_2 - s_0 = 2(\beta_2 - \beta_1);$$

$$s_2 - s_0 = 2\left(\frac{\sqrt{s_0^2 s_2^2 + 4s_0 s_2} - s_0 s_2}{2s_0} - \frac{\sqrt{s_0^2 s_2^2 + 4s_0 s_2} - s_0 s_2}{2s_2}\right);$$

$$s_2 - s_0 = \frac{(s_2 - s_0)(\sqrt{s_0^2 s_2^2 + 4s_0 s_2} - s_0 s_2)}{s_0 s_2};$$

$$2s_0 s_2 = \sqrt{s_0^2 s_2^2 + 4s_0 s_2};$$

$$s_0 s_2 = \frac{4}{3}.$$

З системи

$$\begin{cases} s_2 + \beta_1 = s_1 + \beta_2, \\ s_1 + \beta_1 = s_0 + \beta_2; \end{cases}$$

випливає, що $s_2 - s_1 = \beta_2 - \beta_1 = s_1 - s_0$, а отже, $s_0 + s_2 = 2s_1$. $\square$

Теорема 1. *За умов 5 циліндри однакового рангу не перекриваються.*

Доведення. За лемою 1

$$\begin{cases} s_0 s_2 = \dfrac{4}{3}, \\ s_1 = \dfrac{s_0 + s_2}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s_2 + \beta_1 = s_1 + \beta_2, \\ s_1 + \beta_1 = s_0 + \beta_2. \end{cases}$$

Тоді, при парному n

$$\max \Delta^{A_3}_{c_1 c_2 \ldots c_n s_2} = [c_1, \ldots, c_n, s_2 + \beta_1] = \\ = [c_1, \ldots, c_n, s_1 + \beta_2] = \min \Delta^{A_3}_{c_1 c_2 \ldots c_n s_1},$$

$$\max \Delta^{A_3}_{c_1 c_2 \ldots c_n s_1} = [c_1, \ldots, c_n, s_1 + \beta_1] = \\ = [c_1, \ldots, c_n, s_0 + \beta_2] = \min \Delta^{A_3}_{c_1 c_2 \ldots c_n s_0},$$

при непарному n

$$\max \Delta^{A_3}_{c_1 c_2 \ldots c_n s_0} = [c_1, \ldots, c_n, s_0 + \beta_2] = \\ [c_1, \ldots, c_n, s_1 + \beta_1] = \min \Delta^{A_3}_{c_1 c_2 \ldots c_n s_1},$$

$$\max \Delta^{A_3}_{c_1 c_2 \ldots c_n s_1} = [c_1, \ldots, c_n, s_1 + \beta_2] = \\ [c_1, \ldots, c_n, s_2 + \beta_1] = \min \Delta^{A_3}_{c_1 c_2 \ldots c_n s_2}.$$

Тобто

$$\Delta^{A_3}_{c_1 c_2 \ldots c_n s_0} \cap \Delta^{A_3}_{c_1 c_2 \ldots c_n s_1} = [c_1, \ldots, c_n, s_1 + \beta_1] = [c_1, \ldots, c_n, s_0 + \beta_2],$$

$$\Delta^{A_3}_{c_1 c_2 \ldots c_n s_1} \cap \Delta^{A_3}_{c_1 c_2 \ldots c_n s_2} = [c_1, \ldots, c_n, s_2 + \beta_1] = [c_1, \ldots, c_n, s_1 + \beta_2]. \square$$

Теорема 2. *Якщо* $s_0 s_2 = \dfrac{4}{3}$ *і* $s_1 = \dfrac{s_0+s_2}{2}$, *то* $L_{A_3} = [\beta_1, \beta_2]$.

Доведення. Оскільки очевидно, що $L_{A_3} \subseteq [\beta_1, \beta_2]$, то залишається довести, що $[\beta_1, \beta_2] \subseteq L_{A_3}$. Нехай x — довільна точка відрізка $[\beta_1, \beta_2]$. З теореми 1 випливає, що

$$[\beta_1, \beta_2] = \Delta_{s_0}^{A_3} \cup \Delta_{s_1}^{A_3} \cup \Delta_{s_2}^{A_3}.$$

Тому існує $c_1 \in A_3$, таке, що $x \in \Delta_{c_1}^{A_3}$. Аналогічно,

$$\Delta_{c_1}^{A_3} = \Delta_{c_1 s_0}^{A_3} \cup \Delta_{c_1 s_1}^{A_3} \cup \Delta_{c_1 s_2}^{A_3}.$$

Тому існує $c_2 \in A_3$, таке, що $x \in \Delta_{c_1 c_2}^{A_3}$ і т. д.
Якщо $x \in \Delta_{c_1 \ldots c_k}^{A_3}$ то з того, що

$$\Delta_{c_1 \ldots c_k}^{A_3} = \Delta_{c_1 \ldots c_k s_0}^{A_3} \cup \Delta_{c_1 \ldots c_k s_1}^{A_3} \cup \Delta_{c_1 \ldots c_k s_2}^{A_3},$$

випливає існування $c_{k+1} \in A_2$ такого, що $x \in \Delta_{c_1 \ldots c_k c_{k+1}}^{A_3}$ і т. д. Отже, існує нескінченна послідовність $(c_k), c_k \in A_3$ така, що x належить усім циліндричним відрізкам

$$\Delta_{c_1}^{A_3}, \Delta_{c_1 c_2}^{A_3}, \ldots, \Delta_{c_1 c_2 \ldots c_k}^{A_3}, \ldots.$$

Оскільки, за властивістю 1: $\Delta_{c_1 \ldots c_k c_{k+1}}^{A_3} \subset \Delta_{c_1 \ldots c_k}^{A_3}$, а згідно з наслідком (1):

$$|\Delta_{c_1 \ldots c_k}^{A_3}| \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty,$$

то за аксіомою Кантора існує єдина точка, яка належить всім цим відрізкам, а такою є точка x. Тому

$$x = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta_{c_1 \ldots c_k}^{A_3} = [c_1, \ldots, c_k, \ldots] \in L_{A_3},$$

що й потрібно було довести.□

Отже, якщо

$$x = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots}}, \qquad a_i \in A_3, \; n = 1, 2, \ldots, \tag{6}$$

то вираз (6) називатимемо ланцюговим A_3-представленням числа x, а формальний запис

$$x = \Delta^{A_3}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n\ldots},$$

де

$$\gamma_i = \begin{cases} 0, & \text{якщо } a_i = s_0, \\ 1, & \text{якщо } a_i = s_1, \\ 2, & \text{якщо } a_i = s_2, \end{cases}$$

називатимемо A_3-зображенням числа x.

Теорема 3. *Якщо* $s_0 s_2 = \dfrac{4}{3}$ *і* $s_1 = \dfrac{s_0 + s_2}{2}$*, то зчисленна множина точок* $x \in [\beta_1, \beta_2]$ *має два ланцюгових* A_3*-зображення*

$$\Delta^{A_3}_{a_1a_2\ldots a_{n-1}s_i(s_2s_0)} = \Delta^{A_3}_{a_1a_2\ldots a_{n-1}s_{i-1}(s_0s_2)}, \qquad i \in \{1, 2\},$$

решта ж точок має єдине зображення.

Доведення. Якщо $x = \Delta^{A_3}_{c_1c_2\ldots c_n s_i} \cap \Delta^{A_3}_{c_1c_2\ldots c_n s_{i+1}}, i \in \{0, 1\}$, то з теореми (1) випливає, що x має два ланцюгових A_3-зображення, а саме:

$$x = \Delta^{A_3}_{a_1a_2\ldots a_{n-1}s_i(s_2s_0)} = \Delta^{A_3}_{a_1a_2\ldots a_{n-1}s_{i-1}(s_0s_2)}, \qquad i \in \{1, 2\}.$$

Таких точок є зчисленна множина. Точки, що мають два ланцюгових A_3-зображення, а також точки β_1, β_2 називатимемо A_3-раціональними.

Нехай x не є спільною точкою циліндрів

$$\Delta^{A_3}_{c_1c_2\ldots c_n s_0} \quad \text{і} \quad \Delta^{A_3}_{c_1c_2\ldots c_n s_1}.$$

Тоді числа a_k визначаються однозначно, тобто для точки x існує єдина послідовність (a_k), така, що $x = [a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]$. Справді, припустимо, що

$$x = [a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots] = [b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots].$$

Якщо $s_0 = a_1 \neq b_1 = s_1$, то $x \in \Delta^{A_3}_{s_0}$ і $x \in \Delta^{A_3}_{s_1}$, що суперечить тому, що циліндричні інтервали ∇_{s_0} і ∇_{s_1} (тобто інтервали, кінці яких співпадають з кінцями циліндрів) не мають спільних точок і $x \neq \Delta^{A_3}_{s_0} \cap \Delta^{A_3}_{s_1}$. Отже, $a_1 = b_1$.

Нехай тепер $a_i = b_i$, $i = 1, \ldots, m$ і $a_{m+1} \neq b_{m+1}$. Тоді $x \in \Delta^{A_3}_{c_1c_2\ldots c_m s_0}$ і $x \in \Delta^{A_3}_{c_1c_2\ldots c_m s_1}$, тобто $x = \Delta^{A_3}_{c_1c_2\ldots c_m s_0} \cap \Delta^{A_3}_{c_1c_2\ldots c_m s_1}$, що суперечить умові

$$\nabla_{c_1\ldots c_m s_0} \cap \nabla_{c_1\ldots c_m s_1} = \varnothing, \qquad x \neq \Delta^{A_3}_{c_1\ldots c_m s_0} \cap \Delta^{A_3}_{c_1\ldots c_m s_1}.$$

Отже, для довільного натурального m $a_m \neq b_m$, що й потрібно було довести.

Аналогічно для циліндрів $\Delta^{A_3}_{c_1c_2\ldots c_n s_1}$ і $\Delta^{A_3}_{c_1c_2\ldots c_n s_2}$. $\square$

Якщо точка x не є кінцем жодного циліндра $\Delta^{A_3}_{c_1c_2\ldots c_n}$, то таку називатимемо A_3-ірраціональною.

3. Хвостові множини

Казатимемо, що два ланцюгові A_3-зображення

$$\Delta^{A_3}_{a_1a_2\ldots a_n\ldots} \quad \text{і} \quad \Delta^{A_3}_{b_1b_2\ldots b_n\ldots}$$

мають однаковий хвіст (або перебувають у відношенні $\sim$), якщо існують натуральні числа m та k такі, що $a_{m+j} = b_{k+j}$ для будь-якого $j \in N$.

Лема 3. *Бінарне відношення «мати однаковий хвіст» «$\sim$» на множині L_{A_3} є відношенням еквівалентності (тобто володіє властивостями рефлексивності, симетричності і транзитивності).*

Доведення. Рефлексивніть і транзитивність вочевидь виконуються:

$$\Delta^{A_3}_{a_1a_2\ldots a_n\ldots} \sim \Delta^{A_3}_{a_1a_2\ldots a_n\ldots},$$

$$\Delta^{A_3}_{a_1a_2\ldots a_n\ldots} \sim \Delta^{A_3}_{a'_1a'_2\ldots a'_n\ldots} \Rightarrow \Delta^{A_3}_{a'_1a'_2\ldots a'_n\ldots} \sim \Delta^{A_3}_{a_1a_2\ldots a_n\ldots}.$$

Покажемо, що відношення «мати однаковий хвіст» володіє властивістю транзитивності, тобто з

$$\Delta^{A_3}_{a_1a_2\ldots a_n\ldots} \sim \Delta^{A_3}_{a'_1a'_2\ldots a'_n\ldots} \sim \Delta^{A_3}_{a''_1a''_2\ldots a''_n\ldots}$$

випливає

$$\Delta^{A_3}_{a_1a_2\ldots a_n\ldots} \sim \Delta^{A_3}_{a''_1a''_2\ldots a''_n\ldots}.$$

Згідно з означенням відношення «$\sim$» умова $\Delta^{A_3}_{a_1a_2\ldots a_n\ldots} \sim \Delta^{A_3}_{a'_1a'_2\ldots a'_n\ldots}$ рівносильна існуванню цілих чисел k_1 і m_1 таких, що

$$a_{k_1+j} = a'_{m_1+j}, \forall j \in N;$$

а умова $\Delta^{A_3}_{a_1a_2\ldots a_n\ldots} \sim \Delta^{A_3}_{a''_1a''_2\ldots a''_n\ldots}$ – існуванню k_2 і m_2, таких, що

$$a'_{k_2+j} = a''_{m_2+j}, \forall j \in N.$$

Нехай $k = k_1 + k_2, m = m_2 + m_1$. Тоді

$$a_{k+j} = a''_{m+j}, \forall j \in N,$$

оскільки

$$a_{k+j} = a_{k_1+k_2+j} = a'_{m_1+k_2+j} = a'_{k_2+m_1+j} = a''_{m_2+m_1+j} = a''_{m+j}.\square$$

Відношення $\sim$, бувши відношенням еквівалентності, розбиває множину, на якій воно задане, на класи еквівалентності. Кожен із класів еквівалентності називатимемо *хвостовою множиною*. Кожна хвостова множина однозначно визначається будь-яким із своїх елементів (представників).

Будемо казати, що два числа x і y мають однаковий хвіст ланцюгового A_3-зображення (або перебувають у відношенні $\sim$), якщо вони мають A_3-зображення, які перебувають у відношенні $\sim$. Символічно: $x \sim y$.

Теорема 4. *Кожна хвостова множина є зліченною і щільною в $[\beta_1, \beta_2]$ множиною, а фактор-множина $G \equiv [\beta_1, \beta_2]/\sim$ є континуальною.*

Доведення. Нехай H – довільний клас еквівалентності, $x_0 = \Delta^{A_3}_{c_1 \ldots c_k \ldots}$ – його представник. Тоді очевидно, що для довільного $m \in Z_0$ існує множина

$$H_m = \{x : x = \Delta^{A_3}_{a_1 \ldots a_k c_{m+1} c_{m+2} \ldots}, a_i \in N, k = 0, 1, 2, \ldots\}$$

таких чисел x, для яких при деякому $k \in Z_0$

$$a_{k+j}(x) = c_{m+j} \quad \text{для довільного } j \in N$$

і $H = \bigcup\limits_{m \in Z_0} H_m$.

Множина H, бувши зліченним об'єднанням зліченних множин, є множиною зліченною.

Доведемо тепер, що множина H – щільна в $[\beta_1, \beta_2]$. Оскільки належність числа x до множини H не залежить від довільної скінченної кількості перших елементів його A_3-зображення, то в кожному з циліндрів довільного рангу m існує точка множини H. Отже, H є всюди щільною в $[\beta_1, \beta_2]$ множиною.

Для доведення континуальності фактор-множини G скористаємося методом від супротивного. Припустимо, що G є зліченною. Тоді множина $[\beta_1, \beta_2]$ є зліченним об'єднанням зліченних множин. Але добре відомо, що остання множина є зліченною, а півінтервал $[\beta_1, \beta_2]$ є континуальною множиною. Отримана суперечність доводить теорему.

Література

[1] *Дмитренко С. О., Кюрчев Д. В., Працьовитий М. В.* Ланцюгове A_2-зображення дійсних чисел та його геометрія // Укр.мат.журнал. – 2009. – Т. 61, № 4. – С. 452-463.

[2] *Кац М.* Статистическая независимость в теории вероятностей, анализе и теории чисел. – М.: 1963. – 156 с.

[3] *Працьовитий М. В.* Двосимвольні системи зображення (кодування) дійсних чисел // Студентські фізико-математичні етюди. — К.: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова. – 2010. – №9 – С. 6-26.

[4] *Працьовитий М. В., Кюрчев Д. В.* Сингулярність розподілу випадкової величини, зображеної ланцюговим A_2-дробом з незалежними елементами // Теор. ймов. та мат. стат. – 2009. – 81. – С. 139-154.

[5] *Працьовитий М. В.* Сингулярність розподілів випадкових величин, заданих розподілами елементів свого ланцюгового зображення // Укр. мат. журн. – 1996. – 48, № 8. – С. 1086-1095.

[6] *Працьовитий М. В., Лещинський О. Л.* Фрактальні властивості розподілів випадкових величин, заданих розподілами елементів свого ланцюгового зображення // Фрактальний аналіз та суміжні питання. – Київ: ІМ НАН України – НПУ імені М. П. Драгоманова. – 1998. – № 1. – С. 73-75.

[7] *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. – К.: НПУ імені М. П. Драгоманова. – 1998. – 296 с.

[8] *Турбин А. Ф., Працевитый Н. В.* Фрактальные множества, функции, распределения. – Киев: Наук.думка. – 1992. – 208 с.

[9] *Хинчин А. Я.* Цепные дроби. – М.: Наука. – 1978. – 112 с.

[10] *Albeverio S., Kulyba Y., Pratsiovytyi M. and Torbin G.* On singularity and fine spectral structure of random continued fractions // Math. Nachr., 288: 1803-1813. doi:10.1002/mana.201500045

[11] *Iosifescu M., Kraaikamp C.* On Denjoy's canonical continued fraction expansion, Osaka J.Math., 40 (2003), 1, 235-244.

[12] *Pratsiovytyi M., Kyurchev D.* On A_s-continued fraction expansion // Book of abstracts of the Inernational Conference on Algebra dedicated to 100th anniversary of S.M.Chernikov. – Kyiv. – 2012. – P. 119.

[13] *Pratsiovytyi M., Kyurchev D.* Properties of the distribution of the random variable defined by A_2-continued fraction with independent elements // Radom Operators and Stochastic Equations. – 2009. – Vol. 17, № 1. – P. 91-101.