Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2017, т. 14, № 4, 82–96

УДК 517.927

***Ю. П. Маслова*[1], *М. В. Працьовитий*[2]**

[1] *НПУ імені М. П. Драгоманова, Київ; julia0609mas@gmail.com*

[2] *НПУ імені М. П. Драгоманова, Інститут математики НАН України, Київ; prats4444@gmail.com*

Узагальнення та аналоги функцій Радемахера, пов'язані з симетричним Q_3-зображенням дійсних чисел

Q_3-representation is a ternary self-similar encoding of numbers with zero redundancy. In the paper, we propose a ternary analogue of Rademacher functions and its generalization based on Q_3-representation of real numbers belonging to $[0;1]$. Some relations for this function are proved.
Keywords: classic binary representation of real numbers,Q_2-representation of fractional part of real number, cylinders,Rademacher functions, Walsh functions.

У роботі запропоновано трійковий аналог функцій Радемахера і його узагальнення на основі Q_3-зображення дійсних чисел відрізка $[0;1]$, що є трисимвольним самоподібним кодуванням чисел з нульовою надлишковістю. Доведено кілька співвідношень, які стосуються нового поняття.
Ключові слова: класичне двійкове зображення дійсних чисел, Q_2-зображення дробової частини дійсного числа, циліндри, функції Радемахера, функції Уолша.

Вступ

Функції Радемахера відіграють важливу роль у математиці й у її застосуваннях, зокрема у теорії рядів Уолша, теорії розкладів функцій в ряди за ортонормованою системою, що є аналогом розкладів функцій за синусоїдальними гармоніками, теорії кодування й передачі сигналів тощо. Вони тісно пов'язані з класичним двійковим зображенням дробової частини дійсного числа.

Нагадаємо: для числа $x \in [0;1)$ існує така послідовність (α_k), $\alpha_k = \alpha_k(x) \in A_2 = \{0;1\}$, що

$$x = \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2^2} + \ldots + \frac{\alpha_k}{2^k} + \ldots \equiv \Delta^2_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}.$$

Останній символічни запис $\Delta^2_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}$ називається *класичним двійковим зображенням числа* x, а число α_k – k-тою його цифрою. Кожне ірраціональне число має єдине двійкове зображення, але деякі раціональні мають їх два (це числа виду $\Delta^2_{c_1\ldots c_{k-1}1(0)} = \Delta^2_{c_1\ldots c_{k-1}0(1)}$). Домовившись використовувати лише те з двох зображень раціонального числа, яке містить період (0), ми маємо єдиність двійкового зображення числа. При цьому числа $\alpha_k = \alpha_k(x)$ є функціями від x.

Нагадаємо також, що *функціями Радемахера* $r_k(x)$ називаються функції з періодом 1, визначені на піввідрізку $[0;1)$ таким чином

$$r_0^*(x) = \begin{cases} 1 \ \text{ при } \ x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right) \equiv \Delta^2_0 \ \Leftrightarrow \ \alpha_1(x) = 0; \\ -1 \ \text{ при } \ x \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right) \equiv \Delta^2_1 \ \Leftrightarrow \ \alpha_1(x) = 1, \end{cases}$$

$$r_k^*(x) \equiv r_0^*\left(\{2^k x\}\right) = r_0^*\left(2^k x\right), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

де $\{2^k x\}$ – дробова частина числа $2^k x$.

Використовуючи узагальнення класичного двійкового зображення чисел, а саме Q_2-зображення, у статті [6] ми ввели узагальнення функції Радемахера зі збереженням більшості важливих властивостей. У даній роботі ми пропонуємо трійковий аналог функції Радемахера і його узагальнення на основі Q_3-зображення чисел. Пояснимо далі його суть.

Нехай $1 < s$ — задане натуральне число, $A_s = \{0, 1, \dots, s-1\}$ — алфавіт s–символьної системи кодування (зображення) дійсних чисел, а $L_s \equiv A_s \times A_s \times \dots$ — простір послідовностей елементів алфавіту, $Q_s = (q_0, q_1, \dots, q_{s-1})$ — фіксований упорядкований набір додатних чисел, сума яких рівна 1; $\beta_0 = 0$, $\beta_j = q_0 + q_1 + \dots + q_{j-1}$, $j = \overline{1, s}$.

Теорема 1. *[3] Для будь-якого числа $x \in [0; 1)$ існує послідовність $(\alpha_k) \in L$, така, що*

$$x = \beta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\beta_{\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j} \right) \equiv \Delta^{Q_s}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}. \tag{1}$$

Останні символічний запис $\Delta^{Q_s}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}$ називається Q_s–зображенням ряду (1) і його суми x. Існує злічена множина числел, які мають два різні Q_s–зображення: $\Delta^{Q_s}_{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1} \alpha_n (0)} = \Delta^{Q_3}_{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1} [\alpha_n - 1](s-1)}$. (Круглі дужки символізують період). Такі числа називаються *Q_3–раціональними.* Решта чисел мають єдине Q_3–зображення і називаються *Q_3–ірраціональними.* Зауважимо, що при $q_i = \dfrac{1}{s}$ Q_s–зображення є звичайним s–ковим зображенням числа.

Множина точок відрізка $[0; 1]$, перші k цифр Q_3–зображення яких збігаються з $c_1, c_2, ..., c_k$ відповідно, називається *циліндром рангу k з основою $c_1 c_2 \dots c_k$*. Вона позначається через $\Delta^{Q_3}_{c_1 c_2 \dots c_k}$. Циліндр $\Delta^{Q_3}_{c_1 c_2 \dots c_k}$ є відрізком з кінцями

$$a = \beta_{c_1} + \sum_{i=2}^{k} \left(\beta_{c_i} \prod_{j=1}^{i-1} q_{c_j} \right), \; b = a + \prod_{j=1}^{k} q_{c_j}.$$

Тому

$$|\Delta^{Q_s}_{c_1 \dots c_k}| = \prod_{j=1}^{k} q_{c_j} \quad \text{і} \quad |\Delta^{Q_s}_{c_1 \dots c_k i}| = q_i |\Delta^{Q_s}_{c_1 \dots c_k}|.$$

Властивості циліндрів відіграють важливу роль у метричних задачах, пов'язаних з Q_s–зображеннями чисел.

1. Трійковий аналог функції Радемахера

Лема 2. *Для довільного дійсного x має місце рівність*

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1 + 2\cos\frac{2x}{3^k}}{3}. \tag{2}$$

Доведення. Враховуючи, що $\sin 3\alpha = (1 + 2\cos 2\alpha)\sin\alpha$, маємо

$$\sin x = \left(1 + 2\cos\frac{2x}{3}\right)\sin\frac{x}{3} = \left(1 + 2\cos\frac{2x}{3}\right)\left(1 + 2\cos\frac{2x}{3^2}\right)\sin\frac{x}{3^2} =$$
$$= \ldots = \left(1 + 2\cos\frac{2x}{3}\right)\left(1 + 2\cos\frac{2x}{3^2}\right)\ldots\left(1 + 2\cos\frac{2x}{3^k}\right)\sin\frac{x}{3^k},$$

тобто

$$\sin x = \sin\frac{x}{3^k}\prod_{k=1}^{n}\left(1 + 2\cos\frac{2x}{3^k}\right) = \frac{x}{3^k}\cdot\frac{\sin\frac{x}{3^k}}{\frac{x}{3^k}}\prod_{k=1}^{n}\left(1 + 2\cos\frac{2x}{3^k}\right) =$$
$$= x\cdot\frac{\sin\frac{x}{3^k}}{\frac{x}{3^k}}\prod_{k=1}^{n}\frac{1 + 2\cos\frac{2x}{3^k}}{3}.$$

Враховуючи відому границю

$$1 = \lim_{k\to\infty}\frac{\sin\frac{x}{3^k}}{\frac{x}{3^k}},$$

отримуємо

$$\sin x = x\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1 + 2\cos\frac{2x}{3^k}}{3},$$

що рівносильна до рівності (2). □

Лема 3. *Для будь–якого дійсного числа x можна записати рівність*

$$\int\limits_0^1 e^{ix\left(\frac{1}{2}-t\right)}dt = \frac{sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}.$$

Доведення. Перетворюючи, обчислюємо

$$\int\limits_0^1 e^{ix\left(\frac{1}{2}-t\right)}dt = e^{\frac{ix}{2}}\int\limits_0^1 e^{-ixt}dt =$$

$$= e^{\frac{ix}{2}}\frac{1}{-ix}e^{-ixt}\Big|_0^1 = e^{\frac{ix}{2}}\frac{1}{-ix}\left(e^{-ix}-e^0\right) =$$

$$= \frac{e^{\frac{ix}{2}}}{ix}\left(1-e^{-ix}\right) = \frac{1}{ix}\left(e^{\frac{ix}{2}}-e^{-\frac{ix}{2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{ix}\left(\cos\frac{x}{2}+i\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{-x}{2}-i\sin\frac{-x}{2}\right) =$$

$$= \frac{2}{x}\sin\frac{x}{2} = \frac{sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}.$$

□

Лема 4. *Якщо $\alpha_k(t)$ – k–та трійкова цифра числа $t \in [0;1)$, тобто*

$$t = \frac{\alpha_1(t)}{3}+\frac{\alpha_2(t)}{3^2}+\dots+\frac{\alpha_k(t)}{3^k}+\cdots, \quad \textit{де} \quad \alpha_k \in \{0;1;2\}, \ \textit{а}$$

$$v_k(t) \equiv 1-\alpha_k(t) = \begin{cases} 1, & \textit{якщо} \quad \alpha_k(t)=0, \\ 0, & \textit{якщо} \quad \alpha_k(t)=1, \\ -1, & \textit{якщо} \quad \alpha_k(t)=2, \end{cases} \tag{3}$$

то

$$\int\limits_0^1 \exp\left(ix\frac{v_k(t)}{3^k}\right)dt = \frac{1+2\cos\frac{x}{3^k}}{3}.$$

Доведення. Відомо [4], що

$$[0;1] = \bigcup_{c_1=0}^{2} \bigcup_{c_2=0}^{2} \cdots \bigcup_{c_{k-1}=0}^{2} [\Delta^3_{c_1\ldots c_{k-1}0} \cup \Delta^3_{c_1\ldots c_{k-1}1} \cup \Delta^3_{c_1\ldots c_{k-1}2}],$$

причому

$$\nabla^3_{a_1\ldots a_{k-1}a_k} \cap \nabla^3_{b_1\ldots b_{k_1}b_k} = \begin{cases} \nabla^3_{a_1\ldots a_{k-1}a_k}, & \text{якщо} \quad a_j = b_j,\ j = \overline{1,k}; \\ \emptyset, & \text{якщо існує} \quad a_j \neq b_j, \end{cases}$$

$$|\Delta^3_{c_1\ldots c_{k-1}c_k}| = \frac{1}{3}|\Delta^3_{c_1\ldots c_{k-1}c_k}| = \frac{1}{3^k}.$$

Тому згідно з адитивною властивістю інтеграла

$$I = \int\limits_0^1 \exp\left(ix\frac{v_k(t)}{3^k}\right) dt =$$

$$= \sum_{c_1=0}^{2} \cdots \sum_{c_{k-1}=0}^{2} \Big(\int\limits_{\Delta^3_{c_1\ldots c_{k-1}0}} e^{\frac{ix\cdot 1}{3^k}} dx + \int\limits_{\Delta^3_{c_1\ldots c_{k-1}1}} e^{\frac{ix\cdot 0}{3^k}} dx +$$

$$+ \int\limits_{\Delta^3_{c_1\ldots c_{k-1}2}} e^{\frac{ix\cdot(-1)}{3^k}} dx \Big) =$$

$$= \sum_{c_1=0}^{2} \cdots \sum_{c_{k-1}=0}^{2} \left(e^{\frac{ix}{3^k}} |\Delta^3_{c_1\ldots c_{k-1}0}| + |\Delta^3_{c_1\ldots c_{k-1}1}| + e^{\frac{-ix}{3^k}} |\Delta^3_{c_1\ldots c_{k-1}2}| \right) =$$

$$= \sum_{c_1=0}^{2} \cdots \sum_{c_{k-1}=0}^{2} |\Delta^3_{c_1\ldots c_{k-1}0}| \left(e^{\frac{ix}{3^k}} + 1 + e^{\frac{-ix}{3^k}} \right) =$$

$$= \left(e^{\frac{ix}{3^k}} + 1 + e^{\frac{-ix}{3^k}} \right) \frac{1}{3} \sum_{c_1=0}^{2} \cdots \sum_{c_{k-1}}^{2} |\Delta^3_{c_1\ldots c_{k-1}}| =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\cos\frac{x}{3^k} + i\sin\frac{x}{3^k} + 1 + \cos\frac{-x}{3^k} + i\sin\frac{-x}{3k}\right)\cdot 1 =$$
$$= \frac{1}{3}\left(1 + 2\cos\frac{x}{3^k}\right).$$

Що й треба було довести. □

Означення 1. *Функції* $v_k(x), k = 0, 1, 2, \dots,$ *визначені рівністю (3), називаються* R_3*–функціями, вони є трійковими аналогами функцій Радемахера.*

Теорема 5. *Якщо* $\alpha_k(t)$ *–* k*–та трійкова цифра числа* $t \in [0; 1)$*, а*

$$v_k(t) = 1 - \alpha_k(t) = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad \alpha_k(t) = 0, \\ 0, & \text{якщо} \quad \alpha_k(t) = 1, \\ -1, & \text{якщо} \quad \alpha_k(t) = 2, \end{cases}$$

то

$$\int_0^1 \prod_{k=1}^{\infty} \exp\left(ix\frac{v_k(t)}{3^k}\right) dt = \prod_{k=1}^{\infty} \int_0^1 \exp\left(ix\frac{v_k(t)}{3^k}\right) dt. \qquad (4)$$

Доведення. Враховуючи, що

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k(t)}{3^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \alpha_k(t)}{3^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k(t)}{3^k} = \frac{1}{2} - t,$$

згідно з лемою 3 маємо

$$\int_0^1 \prod_{k=1}^{\infty} \exp\left(ix\frac{v_k(t)}{3^k}\right) dt = \int_0^1 \exp\left(ix\sum_{k=1}^{\infty}\frac{v_k(t)}{3^k}\right) dt =$$
$$= \int_0^1 e^{ix\left(\frac{1}{2} - t\right)} dt = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}.$$

А за лемами 2 та 7

$$\frac{\sin\dfrac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1+2\cos\frac{2x}{3^k}}{3^k} = \prod_{k=1}^{\infty} \int_0^1 \exp\left(ix\frac{v_k(t)}{3^k}\right) dt.$$

Звідси й отримуємо рівність (4). □

Теорема 6. *R_3–функції мають властивості*

$$\int_{x\in\Delta^3_{c_1\ldots c_m}} v_k(x)dx = \begin{cases} 0, & \textit{якщо} \ \ k > m, \\ \dfrac{1-c_k}{3^m}, & \textit{якщо} \ \ k \le m. \end{cases} \tag{5}$$

$$\int_0^1 v_k(x)dx = 0 \tag{6}$$

$$\int_0^1 v_k(x)v_m dx = \begin{cases} 0, \ \textit{якщо} \ k \neq m, \\ \frac{2}{3}, \ \textit{якщо} \ k = m. \end{cases} \tag{7}$$

Доведення. Доведемо рівність 5. Справді, якщо $k = m$, то

$$\int_{x\in\Delta^3_{c_1\ldots c_m}} v_k(x)dx = \int_{x\in\Delta^3_{c_1\ldots c_k}} (1-c_k)dx = (1-c_k)|\Delta^3_{c_1\ldots c_k}| = \frac{1-c_k}{3^k}.$$

Якщо $k < m$, то $x \in \Delta^3 c_1 \ldots c_m \subset \Delta^3_{c_1\ldots c_k}$ і $v_k(x) = 1 - c_k$.

Отже,

$$\int_{x\in\Delta^3_{c_1\ldots c_m}} v_k(x)dx = \int_{x\in\Delta^3_{c_1\ldots c_m}} (1-c_k)dx = (1-c_k)|\Delta^3_{c_1\ldots c_m}| = \frac{1-c_k}{3^m}.$$

Нехай тепер $k > m$. Оскільки

$$\int_{x\in\Delta^3_{c_1\ldots c_m\alpha_{m+1}\ldots\alpha_{k-1}}} v_k(x)dx = \sum_{i=0}^{2} \int_{x\in\Delta^3_{c_1\ldots c_m\alpha_{m+1}\ldots\alpha_{k-1}i}} (1-i)dx =$$

$$= |\Delta^3_{c_1 \ldots c_m \alpha_{m+1} \ldots \alpha_{k-1} 0}| + 0 - |\Delta^3_{c_1 \ldots c_m \alpha_{m+1} \ldots \alpha_{k-1} 2}| = 0,$$

то

$$\int\limits_{x \in \Delta^3_{c_1 \ldots c_m}} v_k(x)dx = \sum_{\alpha_{m+1}=0}^{2} \ldots \sum_{\alpha_k=0}^{2} \int\limits_{x \in \Delta^3_{c_1 \ldots c_m \alpha_{m+1} \ldots \alpha_k}} v_k(x)dx = 0.$$

Рівність (6) для $k = 1$ є очевидною. Для $k > 1$, враховуючи рівність (5), матимемо

$$\int\limits_0^1 v_k(x)dx = \sum_{i=0}^{2} \int\limits_{x \in \Delta^3_i} v_k(x)dx = 0.$$

При доведенні рівності (7) розглянемо випадок $k = m$, маємо

$$\int\limits_0^1 v_k^2(x)dx = \sum_{\alpha_1=0}^{2} \ldots \sum_{\alpha_k=0}^{2} \int\limits_{\Delta_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}} v_k^2(x)dx = \sum_{\alpha_1 \neq 1}^{2} \ldots \sum_{\alpha_k \neq 1}^{2} \int\limits_{\Delta_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}} dx =$$

$$= 2 \cdot 3^{k-1} \cdot \frac{1}{3^k} = \frac{2}{3}.$$

Нехай тепер $k < m$. Враховуючи (5), дістаємо

$$\int\limits_{\Delta^3_{a_1 \ldots a_{k-1}}} v_k(x)v_m(x)dx = \int\limits_{\Delta_{a_1 \ldots a_{k-1} 0}} v_m(x)dx + 0 - \int\limits_{\Delta_{a_1 \ldots a_{k-1} 2}} v_m dx = 0.$$

Тоді

$$\int\limits_0^1 v_k(x)v_m(x)dx = \sum_{a_1=0}^{2} \ldots \sum_{a_{k-1}=0}^{2} \int\limits_{\Delta_{a_1 \ldots a_{k-1}}} v_k(x)v_m(x)dx = 0.$$

□

2. Узагальнення на основі Q_3-зображення чисел

Нехай $Q_3 = (q_0, q_1, q_2)$ — заданий упорядкований набір додатних чисел, сума яких дорівнює 1, $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = q_0$, $\beta_2 = q_0 + q_1$, $\beta_3 = q_0 + q_1 + q_2 = 1$.

Якщо $q_0 = q_2$, то Q_3 – зображення називається симетричним. Очевидно, що класичне трійкове зображення є симетричним Q_3-зображенням.

Лема 7. *Якщо $\alpha_k(t)$ — k-та цифра симетричного Q_3-зображення числа $t \in [0;1)$, тобто*

$$t = \beta_{\alpha_1(t)} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\beta_{\alpha_k(t)} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j(t)} \right) = \beta_{\alpha_1(t)} + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{\alpha_k(t)} q_0^{N_0(t,k)} q_1^{N_1(t,k)} q_2^{N_2(t,k)} \equiv \\ \equiv \Delta^{Q_3}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k \ldots},$$

$$u_k(t) = 1 - \alpha_k(t) = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad \alpha_k(t) = 0, \\ 0, & \text{якщо} \quad \alpha_k(t) = 1, \\ -1, & \text{якщо} \quad \alpha_k(t) = 2, \end{cases} \tag{8}$$

то для будь-якого дійсного числа x можлива рівність

$$\int_0^1 \exp\left(ixAu_k(t)\right) dt = q_1 + 2q_0 \cos Ax.$$

Доведення. Відомо, що

$$[0;1] = \bigcup_{c_1=0}^{2} \bigcup_{c_2=0}^{2} \ldots \bigcup_{c_{k-1}=0}^{2} [\Delta^{Q_3}_{c_1 \ldots c_{k-1} 0} \cup \Delta^{Q_3}_{c_1 \ldots c_{k-1} 1} \cup \Delta^{Q_3}_{c_1 \ldots c_{k-1} 2}],$$

причому

$$\nabla^3_{a_1\ldots a_{k-1}a_k}\cap\nabla^3_{b_1\ldots b_{k-1}b_k}=\begin{cases}\nabla^{Q_3}_{a_1\ldots a_{k-1}a_k}, & \text{якщо} \quad a_j=b_j,\ j=\overline{1,k};\\ \emptyset, & \text{якщо існує} \quad a_j\neq b_j,\end{cases}$$

$$|\Delta^{Q_3}_{c_1\ldots c_{k-1}j}|=q_j|\Delta^{Q_3}_{c_1\ldots c_{k-1}c_k}|,\ \ j\in A_3,$$

а отже,

$$\sum_{c_1=0}^{2}\cdots\sum_{c_{k-1}=0}^{2}|\Delta^{Q_3}_{c_1\ldots c_{k-1}}|=1.$$

Тому згідно з адитивною властивістю інтеграла

$$I=\int_0^1\exp\left(ixAu_k(t)\right)dt=$$

$$=\sum_{c_1=0}^{2}\cdots\sum_{c_{k-1}=0}^{2}\Big(\int\limits_{t\in\Delta^{Q_3}_{c_1\ldots c_{k-1}0}}e^{ixA\cdot 1}dx+$$

$$+\int\limits_{t\in\Delta^{Q_3}_{c_1\ldots c_{k-1}1}}e^{ixA\cdot 0}dx+\int\limits_{t\in\Delta^{Q_3}_{c_1\ldots c_{k-1}2}}e^{ixA\cdot(-1)}dx\Big)=$$

$$=\sum_{c_1=0}^{2}\cdots\sum_{c_{k-1}=0}^{2}\Big(e^{ixA}|\Delta^{Q_3}_{c_1\ldots c_{k-1}0}|+|\Delta^{Q_3}_{c_1\ldots c_{k-1}1}|+$$

$$+e^{-ixA}|\Delta^{Q_3}_{c_1\ldots c_{k-1}2}|\Big)=$$

$$=\sum_{c_1=0}^{2}\cdots\sum_{c_{k-1}=0}^{2}\Big(e^{ixA}q_0|\Delta^{Q_3}_{c_1\ldots c_{k-1}}|+q_1|\Delta^{Q_3}_{c_1\ldots c_{k-1}}|+$$

$$+e^{-ixA}q_2|\Delta^{Q_3}_{c_1\ldots c_{k-1}}|\Big)=$$

$$=\sum_{c_1=0}^{2}\cdots\sum_{c_{k-1}=0}^{2}|\Delta^{Q_3}_{c_1\ldots c_{k-1}}|\left(q_0e^{ixA}+q_1+q_2e^{-ixA}\right)=$$

$$= \sum_{c_1=0}^{2} \dots \sum_{c_{k-1}=0}^{2} |\Delta^{Q_3}_{c_1\dots c_{k-1}}| \left[q_0\left(e^{ixA}+e^{-ixA}\right)+q_1\right] =$$

$$= [2q_0 \cos Ax + q_1] \cdot 1 = q_1 + 2q_0 \cos Ax.$$

□

Зауваження 1. *Функції* $u_k(x), k = 1, 2, \dots,$ *визначені рівністю (8), називаються* R_3^**-функціями, вони є узагальненням* R_3*-функцій на основі симетричного* Q_3*-зображення чисел.*

Теорема 8. *Для* R_3^**-функцій мають місце рівності:*

$$\int\limits_{x\in\Delta^{Q_3}_{c_1\dots c_{k-1}}} u_k(x)dx = 0, \tag{9}$$

$$\int\limits_{x\in\Delta^{Q_3}_{c_1\dots c_m}} u_k(x)dx = \begin{cases} 0 \quad \textit{при} \quad k > m, \\ (1-c_k)\prod\limits_{j=1}^{m} q_{c_j} \quad \textit{при} \quad k \le m, \end{cases} \tag{10}$$

$$\int\limits_0^1 u_k(x)dx = 0, \tag{11}$$

$$\int\limits_0^1 u_k(x)u_m(x)dx = \begin{cases} 0, \ \textit{якщо}\ k \ne m, \\ 2q_0, \ \textit{якщо}\ k = m. \end{cases} \tag{12}$$

Доведення. Для першої рівності маємо:

$$\int\limits_{x\in\Delta^{Q_3}_{c_1\dots c_{k-1}}} u_k(x)dx = \int\limits_{x\in\Delta^{Q_3}_{c_1\dots c_{k-1}0}} u_k(x)dx +$$

$$+ \int\limits_{x\in\Delta^{Q_3}_{c_1\dots c_{k-1}1}} u_k(x)dx + \int\limits_{x\in\Delta^{Q_3}_{c_1\dots c_{k-1}2}} u_k(x)dx =$$

$$= |\Delta^{Q_3}_{c_1\dots c_{k-1}0}| + 0 - |\Delta^{Q_3}_{c_1\dots c_{k-1}2}| = 0.$$

Доведемо рівність (11). Якщо $k=m$, то

$$\int\limits_{\Delta^{Q_3}_{c_1\ldots c_m}} v_k(x)dx=\int\limits_{\Delta^{Q_3}_{c_1\ldots c_k}}(1-c_k)dx=(1-c_k)|\Delta^{Q_3}_{c_1\ldots c_k}|=(1-c_k)\prod_{j=1}^{k}q_{c_j}.$$

Якщо $k<m$, то $x\in\Delta^{Q_3}_{c_1\ldots c_m}\subset\Delta^{Q_3}_{c_1\ldots c_k}$ і $v_k(x)=1-c_k$. Отже,

$$\int\limits_{\Delta^{Q_3}_{c_1\ldots c_m}} v_k(x)dx=\int\limits_{x\in\Delta^{Q_3}_{c_1\ldots c_m}}(1-c_k)dx=(1-c_k)|\Delta^{Q_3}_{c_1\ldots c_m}|=(1-c_k)\prod_{j=1}^{m}q_{c_j}.$$

Нехай тепер $k>m$. Оскільки

$$\int\limits_{\Delta^{Q_3}_{c_1\ldots c_m\alpha_{m+1}\ldots\alpha_{k-1}}} v_k(x)dx=\sum_{i=0}^{2}\int\limits_{\Delta^{Q_3}_{c_1\ldots c_m\alpha_{m+1}\ldots\alpha_{k-1}i}}(1-i)dx=$$

$$=|\Delta^{Q_3}_{c_1\ldots c_m\alpha_{m+1}\ldots\alpha_{k-1}0}|+0-|\Delta^{Q_3}_{c_1\ldots c_m\alpha_{m+1}\ldots\alpha_{k-1}2}|=0,$$

то

$$\int\limits_{\Delta^{Q_3}_{c_1\ldots c_m}} v_k(x)dx=\sum_{\alpha_{m+1}=0}^{2}\ldots\sum_{\alpha_k=0}^{2}\int\limits_{\Delta^{Q_3}_{c_1\ldots c_m\alpha_{m+1}\ldots\alpha_k}} v_k(x)dx=0.$$

Для третьої рівності —

$$\int\limits_0^1 u_k(x)dx=\sum_{c_1=0}^{2}\ldots\sum_{c_{k-1}=0}^{2}\int\limits_{\Delta_{c_1\ldots c_{k-1}}}u_k(x)dx.$$

Тоді згідно з рівністю (9) маємо $\int\limits_0^1 u_k(x)dx=0$.

Якщо $k=m$, то

$$u_k(x)u_m(x)=u_k^2(x)=\begin{cases}1, & \text{якщо}\quad \alpha_k(x)\in\{0,2\},\\ 0, & \text{якщо}\quad \alpha_k(x)=1,\end{cases}$$

і

$$\int\limits_0^1 u_k(x)u_m(x)dx = \sum_{c_1=0}^{2}\dots\sum_{c_k=0}^{2}\int\limits_{x\in\Delta_{c_1\dots c_{k-1}}} u_k^2(x)dx =$$

$$= \sum_{c_1\neq 1}\dots\sum_{c_k\neq 1}\left(\int\limits_{x\in\Delta_{c_1\dots c_{k-1}0}} dx + \int\limits_{x\in\Delta_{c_1\dots c_{k-1}2}} dx\right) =$$

$$= 1 - q_1 = 2q_0.$$

Якщо ж $k \neq m$, причому $k > m$, то

$$u_k(x)u_m(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad \alpha_k = 0 = \alpha_m \quad \text{або} \quad \alpha_k = 2 = \alpha_m, \\ 0, & \text{якщо} \quad \alpha_k = 1 \quad \text{або} \quad \alpha_m = 1, \\ -1, & \text{якщо} \quad \alpha_k = 0 \ \text{ і } \ \alpha_m = 2 \quad \text{або} \quad \alpha_k = 2 \ \text{ і } \ \alpha_m = 0, \end{cases}$$

і

$$\int\limits_0^1 u_k(x)u_m(x)dx =$$

$$= \sum_{c_1=0}^{2}\cdots\sum_{c_{n-1}=0}^{2}\sum_{c_m\neq 1}\sum_{c_{m+1}=0}^{2}\cdots\sum_{c_{k-1}=0}^{2}\int\limits_{x\in\Delta_{c_1\dots c_{k-1}0}}^{1} u_k(x)u_m(x)dx,$$

$$\int\limits_{x\in\Delta_{c_1\dots c_{k-1}}}^{1} u_k(x)u_m(x)dx =$$

$$= \int\limits_{x\in\Delta_{c_1\dots c_{k-1}0}}^{1} u_k(x)u_m(x)dx + \int\limits_{x\in\Delta_{c_1\dots c_{k-1}2}}^{1} u_k(x)u_m(x)dx = 0.$$

Рівність (12) доведено. □

Література

[1] *Балашов Л. А., Рубинштейн А. И.* Ряды по системе Уолша и их обобщения // Итоги науки. Сер. Математика. Мат. анал. – 1970, 197. – С. 147-202.

[2] *Голубов В. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А.* Ряды и преобразования Уолша: теория и применение. – М.: Наука. – 1987. – 344 с.

[3] *Працевитый Н. В.* Случайные величины с независимыми Q_2-символами // Асимптотические методы в исследовании стохастических моделей. – Киев: Ин-т математики АН УССР. – 1987. – С. 92-102.

[4] *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. – К.: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова. – 1998. – 296 с.

[5] *Працьовитий М. В.* Геометрія класичного двійкового зображення дійсних чисел. – К.: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова. – 2012. – 68 с.

[6] *Працьовитий М. В., Маслова Ю. П.* Про одне узагальнення системи функцій Радемахера та Уолша // Збірник праць Інституту математики НАН України. – 2016, т. 13, № 3. – С. 85-96.

[7] *Кац М.* Статистическая независимость в теории вероятностей, анализе и теории чисел // М.: Изд-во иностранной литературы. – 1963. – 156 с.

[8] *Chrestenson H. E.* A class of generalized walsh functions // Pacific Journal of Mathematics. – 1955. – Vol. 5, № 1 – P. 17-31.

[9] *Fine N. J.* On the Walsh Functions // Transactions of the American Mathematical Society. – Vol. 65, № 3 (May, 1949). – P. 372-414.