Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2017, т. 14, № 4, 65–81

УДК 517.927

Р. Ю. Осауленко

Інститут математики НАН України, Київ;
romanosaulenko@gmail.com

Частоти та збіжність додатних числових рядів

In this article we propose another way to generete convergence tests of a series of positive terms, a new divergence test, which is based on the concept of the frequency of an element of a numerical sequence. Also we show exaplmes of appling a new convergence tests, in partikular for generalised Flint Hills series and as a consequence, it was obtained that the irrationality measure of the number π is equal 2.
Key words: figure frequency, serieses, convergence test, irrationality measure of the real number.

У роботі представлено ще один спосіб отримання ознак збіжності додатних рядів. Описано ознаку розбіжнаості, яка базується на понятті частоти елемента числової послідовності. Розглянуто приклади застосування отриманих ознак, зокрема для визначення умов збіжності-розбіжності узагальненого ряду Флінт Гілла і, як наслідок отримано, що міра ірраціональності числа π дорівнює 2.
Ключові слова: частоти цифр, ряди, однаки збіжності рядів, міра ірраціональності дійсного числа.

1. Збіжність числових рядів з додатними членами

Лема 1. *Нехай маємо додатний числовий ряд:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n. \tag{1}$$

Якщо існує послідовність строго спадних функцій $g_n(x)$, така, що існує $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(u_n) = \mu$, а також існує таке $\varepsilon_0 > 0$, що

- *ряд $\sum\limits_{n=a}^{\infty} f_n\big(\mu - \varepsilon_0\big)$ збіжний, то ряд (1) збіжний;*
- *ряд $\sum\limits_{n=a}^{\infty} f_n\big(\mu + \varepsilon_0\big)$ розбіжний, то ряд (1) розбіжний,*

де $f_n(x)$ – обернені до $g_n(x)$.

Доведення. Добре відомо, що збіжність ряду не зміниться, якщо відкинути скінченну кількість перших членів ряду. Згідно з означенням границі й умовою леми, для $\varepsilon_0 > 0$ існує номер $n_0' = n_0(\varepsilon_0)$ такий, що для довільного натурального $n > n_0'$ виконується нерівність: $|g_n(u_n) - \mu| < \varepsilon_0$. Виконаємо тотожні перетворення:

$$-\varepsilon_0 < g_n(u_n) - \mu < \varepsilon_0 \Rightarrow \mu - \varepsilon_0 < g_n(u_n) < \mu + \varepsilon_0.$$

Якщо ряд $\sum\limits_{n=a}^{\infty} f_n\big(\mu - \varepsilon_0\big)$ є збіжним, то покажемо збіжність ряду (1), використавши нерівність $\mu - \varepsilon_0 < g_n(u_n)$:

$$f_n\Big(g_n\big(u_n\big)\Big) < f_n(\mu - \varepsilon_0) \Rightarrow u_n < f_n\left(\mu - \varepsilon_0\right) \Rightarrow$$

$$\sum_{n=n_0(\varepsilon_0)}^{\infty} u_n < \sum_{n=n_0(\varepsilon_0)}^{\infty} f_n\left(\mu - \varepsilon_0\right).$$

Отже, згідно з ознакою порівняння, маємо збіжність ряду (1).

Якщо ряд $\sum\limits_{n=a}^{\infty} f_n\big(\mu+\varepsilon_0\big)$ є розбіжним, то для того, щоб показати розбіжність ряду (1), достатньо використати нерівність $g_n(u_n) < \mu+\varepsilon_0$ і виконати аналогічні дії, як у попередньому випадку. $\square$

Лема 2. *Нехай маємо додатний числовий ряд:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n. \tag{2}$$

Якщо існує послідовність строго зростаючих функцій $g_n(x)$ така, що існує $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(u_n)=\mu$, а також існує таке $\varepsilon_0>0$, що

- *ряд $\sum\limits_{n=a}^{\infty} f_n\big(\mu+\varepsilon_0\big)$ збіжний, тоді ряд (2) збіжний;*
- *ряд $\sum\limits_{n=a}^{\infty} f_n\big(\mu-\varepsilon_0\big)$ розбіжний, тоді ряд (2) розбіжний,*

де $f_n(x)$ – обернені до $g_n(x)$.

Доведення аналогічне до доведення леми 1.

Лема 3. *Нехай маємо додатний числовий ряд $\sum\limits_{n=a}^{\infty} u_n$, якщо існує послідовність сторого монотонних функцій $g_n(x)$, така, що існує $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(u_n)=\mu$, а також існує таке $\varepsilon_0>0$, що ряди $\sum\limits_{n=a}^{\infty} f_n\big(\mu-\varepsilon_0\big)$ і $\sum\limits_{n=a}^{\infty} f_n\big(\mu+\varepsilon_0\big)$ є збіжними, то ряд $\sum\limits_{n=a}^{\infty} u_n$ буде збіжним, де $f_n(x)$ – обернені функції до $g_n(x)$.*

Доведення леми 3 базується на ідеї доведення леми 1.

Приклади відомих ознак, які утворюються на основі лем, якщо замість $f_n(x)$ узяти конкретну функціональну послідовність:

$f_n(x)$	$g_n(x)$	Назва ознаки (у граничній формі)
x^n	$\sqrt[n]{x}$	Ознака Коші
n^x	$\frac{\ln x}{\ln n}$	Логарифмічна ознака
$\left(1-\frac{x\ln n}{n}\right)^n$	$\frac{n}{\ln n}\left(1-\sqrt[n]{x}\right)$	Ознака Жаме

Табл. 1: Приклади генерації відомих ознак

Розглянемо застосування вище описаного для формування ознак збіжності додатних числових рядів. Для того, щоб розрізняти функціональні послідовності, ми використовуватимемо додатковий верхній індекс.

Наприклад, для побудови ознаки збіжності оберемо $f_n^1(x) = n^x$ – послідовність функцій, тоді обернена до неї буде $g_n^1(x) = \frac{\ln x}{\ln n}$. Використовуючи інтегральну ознаку збіжності, легко встановити, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^1(x)$ буде збіжним при $x \in (-\infty; -1)$ і розбіжним при $x \in [-1; +\infty)$.

Покажемо, що ознака на основі $g_n^1(x)$ є чутливішою, ніж ознака Коші у граничному випадку. Припустимо, що $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = q \neq 1$ і виконаємо перетворення:

$$\lim_{n\to\infty} g_n^1(u_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln u_n}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\ln\left(\sqrt[n]{u_n}\right)}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\ln q}{\ln n} = \pm\infty.$$

У таблиці 2 наведено приклади функціональних послідовностей, на основі яких можна побудувати ознаки збіжності додатних рядів, причому при $x \in (-\infty; -1)$ усі ряди $\sum\limits_{n=[e\uparrow\uparrow j]+1}^{\infty} f_n^j(x)$, $j \in \mathbb{N}$ є збіжними, а при $x \in (-1; +\infty)$ – розбіжними (випливає з інтегральної ознаки збіжності додатних числових рядів), де $[e \uparrow\uparrow j]$ — це ціла частина від $e \uparrow\uparrow j$, а $e \uparrow\uparrow 1 = e$, $e \uparrow\uparrow 2 = e^e$, $e \uparrow\uparrow 3 = e^{e^e}$, …; також у таблиці фігурують функції $\mathcal{L}_k(x) = \underbrace{\ln\ln\ldots\ln x}_{k} = \ln \mathcal{L}_{k-1}(x)$, $\mathcal{L}_0(x) = x$ і $L_j(x) = \prod\limits_{k=0}^{j-1} \mathcal{L}_k(x) = L_{j-1}(x)\cdot\mathcal{L}_{j-1}(x)$, $L_0(x) = 1$.

j	$f_n^j(x)$	$g_n^j(x)$
1	n^x	$\frac{\ln x}{\ln n}$
2	$\frac{\ln^x n}{n}$	$\frac{\ln(xn)}{\ln\ln n}$
3	$\frac{(\ln\ln n)^x}{n\ln n}$	$\frac{\ln(xn\ln n)}{\ln\ln\ln n}$
...	...	...
k	$\frac{(\mathcal{L}_{k-1}(n))^x}{L_{k-1}(n)}$	$\frac{\ln(\tau L_{k-1}(n))}{\mathcal{L}_k(n)}$

Табл. 2: Приклади функцій для генерації ознак збіжності

1.1. Чутливість ознак збіжності на основі $g_n^j(x)$

Покажемо, що чутливість ознак на основі функцій $g_n^j(x)$ покращується при зростанні індексу j. Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} g_n^j(u_n) = \mu \neq -1$, тоді

$$\lim_{n\to\infty} g_n^{j+1}(u_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(u_n L_j(n))}{\mathcal{L}_{j+1}(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(u_n L_{j-1}(n)\mathcal{L}_{j-1}(n))}{\mathcal{L}_{j+1}(n)} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathcal{L}_j(n)\cdot\left(\frac{\ln(u_n L_{j-1}(n))}{\mathcal{L}_j(n)}+1\right)}{\mathcal{L}_{j+1}(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathcal{L}_j(n)\cdot(\mu+1)}{\mathcal{L}_{j+1}(n)} = \pm\infty,$$

Оскільки зі зростанням індексу j кожна наступна ознака збіжності на основі $g_n^j(x)$ є чутливішою, то при дослідженні додатного ряду на збіжність ми можемо починати з ознаки на основі $g_n^1(x)$, а далі, за необхідності, збільшувати індекс функціональної послідовності, на основі якої можна побудувати ознаки збіжності рядів.

2. Додаткові твердження для встановлення збіжності додатних рядів

Теорема 4. *Нехай маємо додатний числовий ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$*, існує функціональний ряд* $\sum\limits_{n=a}^{\infty} f_n(x)$*, де* $f_n(x)$ *– строго зростаюча фун-*

кція, для всіх $n \in \mathbb{N}$, D *є областю збіжності.*

Нехай (n_k) *і* (h_k) *– дві послідовності натуральних чисел, причому об'єднання множин* $\{n_k | k \in \mathbb{N}\}$ *і* $\{h_k | k \in \mathbb{N}\}$ *є множиною натуральних чисел, а їхній переріз є порожньою множиною, при цьому послідовності* (n_k) *і* (h_k) *задовольняють умови:*

1. *Якщо* $\sup D \in D$, *то* $g_{n_k}(u_{n_k}) \in D$ *і* $g_{h_k}(u_{h_k}) \notin D$;
2. *Якщо* $\sup D \notin D$, *то* $\varlimsup\limits_{k\to\infty} g_{n_k}(u_{n_k}) \in D \ni \varliminf\limits_{k\to\infty} g_{n_k}(u_{n_k})$,

де $g_n(x)$ *— обернена функція до* $f_n(x)$.

Тоді ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *і* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_{h_k}$ *збігаються або розбігаються одночасно.*

Доведення. Оскільки члени додатних числових рядів ми можемо переставляти довільним чином під час підсумовування, то очевидна рівність:

$$\sum_{n=a}^{\infty} u_n = \sum_{k=1}^{\infty} u_{n_k} + \sum_{k=1}^{\infty} u_{h_k}. \tag{3}$$

Для того щоб показати, що ряди $\sum\limits_{n=a}^{\infty} u_n$ і $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_{h_k}$ збігаються або розбігаються одночасно, достатньо показати збіжність ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_{n_k}$.

Побудуємо додаткову числову послідовність (v_n), таку, щоб $v_{n_k} = u_{n_k}$ і $v_{h_k} = 0$, тоді справедлива рівність $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_{n_k} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$.

Розглянемо перший випадок, коли $\sup D \in D$ і $g_n(u_{n_k}) \in D$, всі члени ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ задовольняють умову $g_n(v_n) \in D$, тоді:

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_{n_k} = \sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} f_n\big(g_n(v_n)\big) \le \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\sup D). \tag{4}$$

Отже, згідно з ознакою порівняння ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_{n_k}$ – збіжний.

Розглянемо другий випадок, коли $\sup D \notin D$ і $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} g_{n_k}(u_{n_k}) = \mu_1 \in D \ni \mu_2 = \underline{\lim\limits_{k\to\infty}} g_{n_k}(u_{n_k})$. Тоді існує таке додатне $\varepsilon_0 > 0$, що $(\mu_1 + \varepsilon_0) \in D$, і виконується нерівність:

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_{n_k} = \sum_{k=1}^{\infty} f_n\big(g_{n_k}(u_{n_k})\big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\mu_1 + \varepsilon_0)\,. \tag{5}$$

Отже, й у цьому випадку ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_{n_k}$ – збіжний. □

Зауважимо, що для строго спадних функцій $f_n(x)$ у теоремі 4 достатньо $\sup D$ замінити на $\inf D$, щоб отримати справедливе твердження.

Для наслідків 1–3: якщо функції $g_n(x)$ є сторого спадними, то $d = \inf D_1$; якщо ж $g_n(x)$ є сторого зростаючими, то $d = \sup D_1$, де D_1 і D_2 – відповідно області збіжності і розбіжності ряду $\sum\limits_{n=a}^{\infty} f_n(x)$, а $f_n(x)$ – функції, обернені до $g_n(x)$.

Наслідок 1. *Якщо* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} g_n(u_n) \in D_1 \backslash \{d\} \ni \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} g_n(u_n)$, *то ряд* $\sum\limits_{n=a}^{\infty} u_n$ *– збіжний.*

Наслідок 2. *Якщо* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} g_n(u_n) \in D_2 \backslash \{d\} \ni \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} g_n(u_n)$, *то ряд* $\sum\limits_{n=a}^{\infty} u_n$ *– розбіжний.*

Наслідок 3. *Якщо* $d \in D_2$ *і починаючи з деякого номера* n_0 *виконується умова:* $g_n(u_n) \in D_2$, *то ряд* $\sum\limits_{n=a}^{\infty} u_n$ *– розбіжний.*

Наслідок 4. *Якщо існує така підпослідовність чисел* (η_k), *що ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_{\eta_k}$ *розбіжний, то ряд* $\sum\limits_{n=a}^{\infty} u_n$ *також буде розбіжним.*

Доведення. Оскільки ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_{\eta_k}$ є підрядом ряду $\sum\limits_{n=a}^{\infty} u_n$, то справедлива нерівність: $\sum\limits_{n=a}^{\infty} u_n \geq \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_{\eta_k}$, а тому згідно з ознакою порівняння ми отримуємо, що ряд $\sum\limits_{n=a}^{\infty} u_n$ є розбіжним.

3. Одночасна збіжність-розбіжність рядів

Нагадаємо важливі поняття і твердження.

Означення 1. *Якщо існує границя*

$$\nu_j(x) = \nu_j^{Q_s}(x) = \lim_{n\to\infty} n^{-1} N_j^{Q_s}(x,n),$$

то її значення називається частотою цифри j у Q_s-зображенні числа x, де $N_j^{Q_s}(x,n)$ – це кількість цифр j серед перших n цифр Q_s-зображення числа $[0;1] \ni x = \triangle^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$.

У роботі [1] наведено критерій існування частоти цифри двійкового зображення дійсного числа, який базується на врахуванні серій одиниць і нулів у записі числа. Нижче наведено загальніші твердження.

Для початку, в зображені числа x ідучи по послідовності α_n ми маркуємо ті α_n, які дорівнюють цифрі i, тим самим утворюючи підпослідовність (n_m), таку, що $\alpha_{n_m} = i$, $m \in \mathbb{N}$. Наприклад, для дійсного трійкового запису числа $[0;1] \ni x = \Delta^3_{1023012101002410\ldots}$, у записі якого зустрічається нескінчена кількість цифр 1, тоді при $m = 1,2,3,4,5$ відповідними значеннями n_m будуть числа 1, 6, 8, 10, 15.

Теорема 5. *Якщо в зображенні числа x використовується нескінченна кількість цифр i, то справедлива рівність:*

$$\nu_i(x) = \lim_{n\to\infty} n^{-1} N_i^{Q_s}(x,n) = \lim_{m\to\infty} \frac{m}{n_m}, \tag{6}$$

де m – порядковий номер цифри i.

Доведення. Якщо існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-1}N_i^{Q_s}(x,n)$, то очевидно, що границя $\lim\limits_{m\to\infty}\frac{m}{n_m}$ також існуватиме.

Розглянемо інший випадок. Нехай існує границя $\lim\limits_{m\to\infty}\frac{m}{n_m} = m_0$. Покажемо, що вона співпадає з границею $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-1}N_i^{Q_s}(x,n)$. Для скорочення запису далі в доведенні замість $N_i^{Q_s}(x,n)$ використовуватимемо $N_i(n)$. Для членів послідовності (n_m) виконується рівність $N_i(n_m) = m$ і для довільного $n \in [n_m; n_{m+1})$ справедлива нерівність: $N_i(n_m) = N_i(n) < N_i(n_{m+1})$.

$$\frac{N_i(n)}{n_{N_i(n)}} \geq \frac{N_i(n)}{n} = \frac{N_i(n)}{n_{N_i(n)} + \big(n - n_{N_i(n)}\big)} > \frac{N_i(n)}{n_{N_i(n)+1}}. \tag{7}$$

Перейдемо до границі:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{N_i(n)}{n_{N_i(n)}} \geq \lim_{n\to\infty}\frac{N_i(n)}{n} \geq \lim_{n\to\infty}\frac{N_i(n)}{n_{N_i(n)+1}}. \tag{8}$$

Враховуючи рівність:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{N_i(n)}{n_{N_i(n)+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{N_i(n)+1}{n_{N_i(n)+1}}, \tag{9}$$

а також використавши тотожності $\lim\limits_{m\to\infty}\frac{m}{n_m} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{N_i(n)}{n_{N_i(n)}}$, отримаємо:

$$\lim_{m\to\infty}\frac{m}{n_m} \geq \lim_{n\to\infty}\frac{N_i(n)}{n} \geq \lim_{m\to\infty}\frac{m+1}{n_{m+1}}, \tag{10}$$

тобто

$$m_0 \geq \lim_{n\to\infty}\frac{N_i(n)}{n} \geq m_0 \Rightarrow \lim_{m\to\infty}\frac{m}{n_m} = \lim_{n\to\infty}\frac{N_i(n)}{n}. \tag{11}$$

Нехай границя $\lim\limits_{m\to\infty}\frac{m}{n_m}$ не існує, тоді існують хоча б дві підпослідовності (n_{m_k}) і $\big(n'_{m_k}\big)$, такі, що існують границі $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{m_k}{n_{m_k}} \neq \neq \lim\limits_{k\to\infty}\frac{m_k}{n'_{m_k}}$. Враховуючи те, що підпослідовності (n_{m_k}) і $\big(n'_{m_k}\big)$

також є підпослідовностями послідовності (n), отримуємо, що границі $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{N_i(n)}{n}$ також не існує. $\square$

Означення 2. *Якщо існує границя*

$$\underline{\nu_j(x)} = \underline{\nu_j^{Q_s}(x)} = \varliminf_{n\to\infty} n^{-1} N_j^{Q_s}(x,n),$$

то її значення називається нижньою частотою цифри j у Q_s-зображенні числа x, де $N_j^{Q_s}(x,n)$ – це кількість цифр j серед перших n цифр Q_s-зображення числа $[0;1] \ni x = \triangle^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$.

Поняття частоти цифри легко розширюється на поняття частоти елемента послідовності.

Нехай задано послідовність (τ_n); утворимо підпослідовність (τ_{n_k}) на основі бінарної послідовності (θ_n), де (n_k) — зростаюча послідовність; $\theta_n = 1$, якщо τ_n обрано елементом підпослідовності (τ_{n_k}) і $\theta_n = 0$ в другому випадку; тоді під висловом "нижня частота підпослідовності (τ_{n_k}) послідовності (τ_n)"матимемо на увазі нижню частоту числа 1 у послідовності (θ_n) і позначатимемо $\underline{\nu\,(\tau_{n_k})}$.

Означення 3. *Якщо існує границя $\overline{\mathcal{A}}\varphi_n = \varlimsup\limits_{n\to\infty}\frac{\varphi_n}{n}$, то її значення називається верхньою асимптотою числової послідовності (φ_n). Аналогічним чином означається поняття нижньої асимптоти числової послідовності, як $\underline{\mathcal{A}}\varphi_n = \varliminf\limits_{n\to\infty}\frac{\varphi_n}{n}$.*

Лема 6. *Нехай функція $u(x) \geq 0$ є неперервною, строго спадною при $x \geq 0$, $u(0) \neq 0$, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u(n)$ – розбіжний. Тоді для довільної послідовності (φ_n), де $\mathbb{R} \ni \varphi_n \geq 0$, і $\overline{\mathcal{A}}\varphi_n < \infty$, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u(\varphi_n)$ розбігається.*

Доведення. Спочатку покажемо, що для довільного невід'ємного дійсного числа x ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u(xn)$ розбігається. З того, що функція

$u(x)$ є строго спадною і невід'ємною, розбіжність ряду при $x = 0$ стає очевидною, адже $u(0) \neq 0$.

Нехай, $x \in \mathbb{N}$. Покажемо розбіжність ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u(xn)$:

$$\infty < \sum_{n=0}^{\infty} u(n) = \left(\sum_{k=0}^{x-1} u(k)\right) + \left(\sum_{k=x}^{2x-1} u(k)\right) + \left(\sum_{k=2x}^{3x-1} u(k)\right) + \dots \leq$$

$$\leq x\big(u(x \cdot 0) + u(x \cdot 1) + u(x \cdot 2) + \dots\big) = x \sum_{n=0}^{\infty} u(xn).$$

Нехай $\mathbb{R} \ni x \geq 0$, тоді для цілої частини від цього числа x можлива нерівність: $u([x]n) \geq u(xn) > u\big(([x]+1)n\big)$, а тому згідно з ознакою порівняння отримуємо, що ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u(xn)$ – розбіжний.

Легко показати, що функція $f_n(x) = u(xn)$ є монотонною, тоді $g_n(x) = \frac{v(x)}{n}$ – відповідно обернена, де $v(x)$ – обернена до $u(x)$. На основі наслідку 2 маємо: якщо $0 \leq \varliminf\limits_{n\to\infty} \frac{v(a_n)}{n} \leq \varlimsup\limits_{n\to\infty} \frac{v(a_n)}{n} < \infty$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ розбігається. Застосуємо утворену ознаку до $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u(\varphi_n)$:

$$\infty > \varlimsup_{n\to\infty} \frac{v\Big(u\left(\varphi_n\right)\Big)}{n} = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\varphi_n}{n} = \overline{\mathcal{A}}\varphi_n.$$

Отже, якщо $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u(n)$ розбіжний, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u(n_k)$ – розбіжний. □

Наслідок 5. *Для довільної строго спадної неперервної функції $u(x)$, при $x \geq 0$ і натурального ξ справедлива нерівність:*

$$\xi \sum_{n=0}^{\infty} u\Big(\xi(n+1) - 1\Big) \leq \sum_{n=0}^{\infty} u(n) \leq \xi \sum_{n=0}^{\infty} u\left(\xi n\right). \tag{12}$$

Теорема 7. *Нехай маємо послідовність дійсних чисел (φ_n), таку, що $0 < \underline{\mathcal{A}}\varphi_n \leq \overline{\mathcal{A}}\varphi_n < \infty$; тоді для довільної строго спадної* *неперервної функції $u(x)$ при $x \geq 0$ ряди $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u(k)$ і $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u(\varphi_k)$ збігаються(розбігаються) одночасно.*

Доведення. Спочатку покажемо одночасну розбіжність рядів.

Якщо $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u(k)$ – розбіжний, то згідно з лемою 6 і ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u(\varphi_k)$ також розбіжний.

Нехай ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u(\varphi_k)$ – розбіжний. Враховуючи, що $0 < \underline{\mathcal{A}}\varphi_n \leq \leq \overline{\mathcal{A}}\varphi_n < \infty$ нескладно показати, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує номер n_0, що для всіх натуральних $n \geq n_0$ виконується нерівність:

$$n\underline{\mathcal{A}}\varphi_n - \varepsilon \leq \varphi_n \leq n\overline{\mathcal{A}}\varphi_n + \varepsilon.$$

Для скорочення запису виконаємо заміну: $\underline{\mathcal{A}}\varphi_n = a > 0$, а отже, існують взаємно прості натуральні числа p, q, такі, що $\frac{p}{q} \leq a$. Далі виконаємо тотожні перетворення на основі ідеї доведення першої частини леми 6 і її наслідку:

$$\sum_{n=q}^{\infty} u(\varphi_n) \leq \sum_{n=q}^{\infty} u(an - \varepsilon) \leq \sum_{n=q}^{\infty} u\Big([an - \varepsilon]\Big) \leq \sum_{n=q}^{\infty} u\Big[n\frac{p}{q} - \varepsilon\Big] =$$

$$= \left(\sum_{n=q}^{2q-1} u\Big[n\frac{p}{q} - \varepsilon\Big]\right) + \left(\sum_{n=2q}^{3q-1} u\Big[n\frac{p}{q} - \varepsilon\Big]\right) + \cdots \leq$$

$$\leq q\sum_{k=1}^{\infty} u\Big[pk - \varepsilon\Big] \leq q\sum_{k=1}^{\infty} u(pk - 1) \leq \frac{q}{p}\sum_{k=0}^{\infty} u(k),$$

де $[x]$ – ціла частина від числа x, а $\varphi[t] = \varphi\big([t]\big)$.

Збіжність доводиться методом від супротивного. □

Наслідок 6. *Нехай маємо строго зростаючу підпослідовність (n_k) послідовності натуральних чисел, таку, що $\underline{\nu\,(n_k)} > 0$, тоді для довільної строго спадної функції $u(x)$ при $x \geq 0$ ряди $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u(k)$ і $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u(n_k)$ збігаються(розбігаються) одночасно.*

Для доведення наслідку 6 достатньо відзначити, що для заданої послідовності (n_k) справедлива рівність: $\overline{\mathcal{A}}n_k = \Big(\underline{\nu\,(n_k)}\Big)^{-1}$.

Використовуючи наслідок 6, можна частково дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\xi+\cos n}$ при $\xi \in [-2;0]$. Для цього розглянемо нерівність:

$$n^{\xi+\cos n} \geq n^{-1} \Rightarrow \cos n \geq -1-\xi.$$

Розв'язком нерівності $\cos x \geq a$ є відрізок $[-\arccos a + 2\pi n; \arccos a + 2\pi n]$ довжина якого складає $l = 2\arccos a$, тоді, якщо $l \geq 1$, тобто при $a \leq \cos 0.5$, хоча б одне ціле число міститиметься у кожному з відрізків розв'язку нерівності; так ми можемо оцінити нижню частоту n_k всіх цілих розв'язків нерівності $\cos x \geq a$: $\underline{\nu}(n_k) \geq (2\pi)^{-1} > 0$, а отже ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} n_k^{-1}$ буде розбіжним. Оскільки $\cos 0.5 \geq a = -1-\xi$ то маємо, що при $\xi \geq -1-\cos 0.5$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\xi+\cos n}$ є також розбіжним.

4. Узагальнений ряд Флінт Гілла та міра ірраціональності числа π

У роботі [2] було наведено приклад рядів, збіжність яких не встановлена. Спробуємо їх дослідити. Нехай маємо узагальнений ряд Флінт Гілла (Flint Hills series):

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-u}\left|\sin n\right|^{-v},\ u>0,\ v>0. \tag{13}$$

Узагальнений ряд Флінт Гілла пов'язаний із питанням існування міри ірраціональності числа π, це число позначають $\mu(\pi)$ і $\mu(\pi) \geq 2$. Згідно з наслідком означення міри ірраціональності числа α [3] має виконуватись нерівність:

$$\left|\frac{p}{q}-\alpha\right| > q^{-\mu(\alpha)-\varepsilon} \tag{14}$$

для будь-якого $\varepsilon > 0$ і всіх достатньо великих цілих p і q.

Лема 8. *Справедлива рівність:*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{-v\ln|\sin n|}{\ln n} = \varlimsup_{k\to\infty} \frac{-v\ln|\sin P_k|}{\ln P_k}, \tag{15}$$

де $v > 0$, а P_k – це чисельник k-го підхідного дробу до числа π.

Доведення. Оскільки послідовність P_k є чисельниками найкращих наближень до числа π, то нескладно довести нерівність $|\sin n| \geq |\sin P_k|$, де $P_{k-1} < n \leq P_k$:

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{-v\ln|\sin n|}{\ln n} \leq \varlimsup_{n\to\infty} \frac{-v\ln|\sin P_k|}{\ln n} \leq \varlimsup_{k\to\infty} \frac{-v\ln|\sin P_k|}{\ln P_k}.$$

З другого боку верхня границя завжди не менша за верхню границю по довільній підпослідовності, тобто

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{-v\ln|\sin n|}{\ln n} \geq \varlimsup_{k\to\infty} \frac{-v\ln|\sin P_k|}{\ln P_k}.$$

Отже, виконується рівність (15). □

Теорема 9. *Узагальнений ряд Флінт Гілла при $v \geq u$, а також при $0 < u \leq 1$ – розбіжний, і збіжний при $v < u - 1$.*

Доведення. Розглянемо послідовність підхідних дробів $\frac{P_k}{Q_k}$ до числа π, та виконаємо ряд перетворень над оцінкою точності наближення:

$$\left|\frac{P_k}{Q_k} - \pi\right| < \frac{1}{Q_k Q_{k+1}} \Rightarrow |P_k - \pi Q_k| < \frac{1}{Q_{k+1}} < \frac{1}{Q_k}. \tag{16}$$

Враховуючи і те, що $|\sin P_k| = |\sin(P_k - \pi Q_k)|$, і $|\sin x| < |x|$, отримуємо нерівність:

$$|\sin P_k| \leq \frac{1}{Q_{k+1}}. \tag{17}$$

Перейшовши до границі, спрямувавши k до нескінченності, ми встановили існування підпослідовності натуральних чисел, синус яких прямує до нуля.

Використаємо наслідки 4 і 2, взявши за підпослідовність (P_k) послідовність чисельників підхідних дробів до числа π, а за основу функцію $g_k^1(x)$:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\ln\left(P_k^{-u}\left|\sin P_k\right|^{-v}\right)}{\ln k}\geq\lim_{k\to\infty}\frac{\ln\frac{P_k^{-u}}{Q_k^{-v}}}{\ln k}=\lim_{k\to\infty}\frac{\ln\left(\left(\frac{Q_k}{P_k}\right)^u\cdot Q_k^{v-u}\right)}{\ln k}=$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\ln\left(\pi^{-u}\cdot Q_k^{v-u}\right)}{\ln k}=\lim_{k\to\infty}\frac{\ln Q_k^{v-u}}{\ln k}\geq 0,$$

якщо $v\geq u$ то підряд розбіжний, а тому узагальнений ряд Флінт Гілла розбіжний при $v\geq u$.

Побудуємо підряд, який задовольняє наслідок 3:

$$\frac{\ln\left(n^{-u}|\sin n|^{v}\right)}{\ln n}\geq -1\Rightarrow|\sin n|^{-v}\geq n^{u-1}\Rightarrow|\sin n|\leq n^{-\frac{u-1}{v}}.$$

Отже, при $0<u\leq 1$ остання нерівність виконується, а тому в цьому випадку узагальнений ряд Флінт Гілла є розбіжним.

Враховуючи наслідок з означення міри ірраціональності числа, для нашої підпослідовності натуральних чисел отримаємо:

$$\left|\frac{P_k}{Q_k}-\pi\right|>Q_k^{-\mu(\pi)-\varepsilon}\Rightarrow|P_k-\pi Q_k|>Q_k^{1-\mu(\pi)-\varepsilon}. \tag{18}$$

Використаємо наслідок 1.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln\left(n^{-u}\left|\sin n\right|^{-v}\right)}{\ln n}=-u+\lim_{k\to\infty}\frac{-v\ln\left|\sin P_k\right|}{\ln P_k}=$$

$$=-u+\lim_{k\to\infty}\frac{-v\ln\left|\sin\left(P_k-\pi Q_k\right)\right|}{\ln P_k}\leq -u+\lim_{k\to\infty}\frac{-v\ln Q_k^{1-\mu(\pi)-\varepsilon}}{\ln P_k}=$$

$$= -u + (\mu(\pi) + \varepsilon - 1)\, v \lim_{k\to\infty} \frac{\ln Q_k}{\ln P_k} = -u + (\mu(\pi) + \varepsilon - 1)\, v < -1.$$

Виконаємо тотожні перетворення над останньою нерівністю:

$$(\mu(\pi) + \varepsilon - 1)\, v < u{-}1 \Rightarrow u{-}1 > (\mu(\pi) + \varepsilon - 1)\, v \geq (2{+}\varepsilon{-}1)v \geq v.$$

Отже, при $v < u - 1$ узагальнений ряд Флінт Гілла є збіжним. □

Лема 10. *Якщо справедливий наслідок теореми 2 у [2], то міра ірраціональності числа π дорівнює 2.*

Доведення. Нехай виконується умова $v < u - 1$, тоді ми можемо записати рівність $v + \delta = u - 1$, де $\delta > 0$. Згідно з теоремою 2 в роботі [2], а також із урахуванням необхідної умови збіжності рядів отримуємо, що

$$\mu\,(\pi) \leq 1 + \frac{u}{v} = 1 + \frac{v + \delta + 1}{v} = 2 + \frac{\delta + 1}{v}.$$

Оскільки параметри v і δ можна дібрати таким чином, щоб дріб $\frac{\delta+1}{v}$ був як завгодно малим, то очевидно, що буде справедливою нерівність $\mu(\pi){\leq}2$, а оскільки $\mu(\pi){\geq}2$, то $\mu(\pi){=}2$. □

Застосуємо теорему 9 для визначення збіжності ряду $a(\xi) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\xi - |\sin n|}$ при $\xi \in [-1; 0)$. Знайдемо умови виконання нерівності для всіх $n \in \mathbb{N}$:

$$n^{\xi - |\sin n|} \geq n^{-u} |\sin n|^{-v} \Rightarrow |\sin n| \leq n^{\frac{-u-\xi+|\sin n|}{v}} \Rightarrow u \leq -\xi{+}|\sin n|.$$

Довільне $u \in (0; \xi]$ задовольняє нерівність $u < -\xi + |\sin n|$, а тому $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-\zeta - |\sin n|} \geq \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-u} |\sin n|^{-v} > \infty$. Отже, ряд $a(\xi)$ збіжний при $\xi < -1$ і розбіжний при $\xi \geq -1$.

Автор висловлює вдячність Працьовитому М. В., Білоцькому М. М. і Деканову С. Я. за допомогу в написанні статті.

Література

[1] *Працьовитий М. В.* Геометрія класичного двійкового зображення дійсних чисел. — Київ. Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова. – 2012. – 698 с.

[2] *Alekseyev Max A.* On convergence of the Flint Hills series //режим доступу: https://arxiv.org/pdf/1104.5100v1.pdf. – 5 с.

[3] *Fischler S., Rivoal T.* Irrationality exponent and rational approximations with prescribed growth // American mathematical society. – 2010, march. – Vol. 138, № 3. – P. 799-808.

[4] *Працевитый Н. В.* Случайные величины с независимыми Q_2-символами // Асимптотические методы в исследовании стохастических моделей. – Киев: Ин-т математики АН УССР. – 1987. – С. 92-102.

[5] *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. – Вид-но НПУ імені М. П. Драгоманова. – 1998. – 296 с.

[6] *Працьовитий М. В., Климчук С. О., Макарчук О. П.* Перетворення і функції, які зберігають середнє значення цифр трійкового зображення числа // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1 : Фізико-математичні науки. – 2013. – № 15. – С. 87-99, Режим доступу: http://nbuv.gov.ua/UJRN/Nchnpu_01_2013_15_9.

[7] *Працьовитий М. В., Климчук С. О., Макарчук О. П.* Частота цифри у зображенні числа і його асимптотичне середнє значення цифр // Укр. мат. журн. – 2014, № 3. – С. 302-310.

[8] *Терещенко И. В.* История развития теории бесконечных положительных рядов с монотонно убывающими членами // Научные труды КубГТУ. – 2016, № 8. – С. 440-453.