Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2017, т. 14, № 4, 49–64

УДК 517.5

***М. П. Мороз***

*Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, Київ; nicmoroz@ukr.net*

# Проектор $\Delta^O$-зображення чисел в $\Delta^E$-зображення

In the paper we study function $f$ that takes each argument $x$ having alternating Ostrogradsky–Sierpiński–Pierce series representation to a sum of Engel series with the same elements, i.e.,

$$f\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{q_1q_2\dots q_n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(q_1+1)\cdot\ldots\cdot(q_n+1)},\ q_{n+1}>q_n\in\mathbb{N}.$$

We prove that set of values for function $f$ is nowhere dense set of positive Lebesgue measure. We analyze function $f$ in terms of monotonicity, continuity and differentiability on the set of irrational numbers. We prove that function $f$ is nowhere monotonic, continuous at any irrational point and non-differentiable in almost all points (in the sense of Lebesgue measure).

**Key words:** Ostrogradsky–Sierpiński–Pierce series, Engel series, continuity of function on the set of irrational numbers, non-differentiability of function, nowhere monotonicity of function, representation of real numbers, cylindrical sets.

Робота присвячена функції $f$, яка представленню аргумента $x$ знакозмінним рядом Остроградського-Серпінського-Пірса ставить у відповідність суму ряду Енгеля з тими самими елементами, тобто

$$f\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{q_1q_2\ldots q_n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(q_1+1)\cdot\ldots\cdot(q_n+1)},\ \text{де } q_{n+1}>q_n\in\mathbb{N}.$$

Доведено, що множиною значень функції $f$ є ніде не щільна множина додатної міри Лебега. Функція $f$ досліджується на предмет її монотонності, неперервності й диференційовності по множині ірраціональних чисел. Доведено, що функція є ніде не монотонною, неперервною в кожній ірраціональній точці і майже в усіх точках (у розумінні міри Лебега) є недиференційовною.
**Ключові слова:** ряд Остроградського-Серпінського-Пірса, ряд Енгеля, неперервність функції по множині ірраціональних чисел, недиференційовність функції, ніде не монотонність функції, зображення дійсних чисел, циліндричні множини.

## Вступ

Модель дійсного числа у формі ряду є основою для різних змістовних теорій дійсних чисел, побудови метричної та ймовірнісної теорій чисел. Останнім часом зріс інтерес до представлень чисел рядами, членами яких є числа, обернені до накопичувальних добутків натуральних чисел. До таких належать ряди Люрота, Остроградського, Сільвестера та інші. Потреба у використанні цих форм дійсного числа продиктована потребами фрактальної геометрії, фрактального аналізу, теорії функцій і множин зі складною локальною структурою, теорії сингулярних розподілів ймовірностей тощо.

У цій роботі ми акцентуємо увагу на функції з нетривіальними локальними властивостями, визначеної в термінах представлення чисел знакозмінними рядами Остроградського-Серпінського-Пірса й додатними рядами Енгеля, яка певним чином висвітлює зв'язок між зображеннями чисел, що ґрунтуються на їхніх розкладах в ряди вказаного виду, з однаковими кодами. Зауважимо, що метричні теорії таких зображень, а вони використовують нескінченний алфавіт, мають багато спільного. Разом із цим отримані результати висвітлюють і їх відмінності. Як доведено нижче, множини чисел з одними і тими ж умовами на цифри зображень мають відмінні тополого-метричні властивості.

## 1. Основні відомості про ряди Остроградського-Серпінського-Пірса та ряди Енгеля. Постановка задачі

**Означення 1.** *Рядом Остроградського-Серпінського-Пірса називається знакозмінний ряд виду*

$$\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_1 q_2} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{q_1 q_2 \cdots q_n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{q_1 q_2 \cdots q_n},$$

*де $(q_n)$ — строго зростаюча послідовність натуральних чисел.*

**Теорема 1** ( [2]). *Сума кожного ряду Остроградського-Серпінського-Пірса є ірраціональним числом із інтервалу $(0;1)$. Будь-яке ірраціональне число $x \in (0;1)$ можна єдиним чином розкласти в ряд Остроградського-Серпінського-Пірса, тобто існує єдина строго зростаюча послідовність натуральних чисел $(q_n)$, така, що*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{q_1 q_2 \cdots q_n} \equiv \Delta^O_{q_1(x)\ldots q_n(x)\ldots}.$$

Скорочений (символічний) запис $\Delta^O_{q_1(x)\ldots q_n(x)\ldots}$ називається $\Delta^O$-зображенням числа $x$ і відповідного до нього ряду Остроградського-Серпінського-Пірса, при цьому натуральне число $q_n(x)$ є $n$-ною цифрою даного зображення. Кожна цифра є коректно означеною функцією зображеного числа.

**Означення 2.** *Рядом Енгеля називається ряд виду*

$$\frac{1}{p_1+1}+\frac{1}{(p_1+1)(p_2+1)}+\ldots+$$
$$+\frac{1}{(p_1+1)\cdot\ldots\cdot(p_n+1)}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(p_1+1)\cdot\ldots\cdot(p_n+1)},$$

*де* $(p_n)$ *— неспадна послідовність натуральних чисел.*

**Теорема 2** ( [8]). *Сума кожного ряду Енгеля є числом із* $(0;1]$, *причому вона є ірраціональним числом тоді і тільки тоді, коли* $p_n\to\infty$ *при* $n\to\infty$. *Будь-яке число* $x\in(0;1]$ *можна единим чином розкласти в ряд Енгеля, тобто існує єдина неспадна послідовність натуральних чисел* $(p_n)$, *така, що*

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(p_1+1)\cdot\ldots\cdot(p_n+1)}\equiv\Delta^E_{p_1(x)\ldots p_n(x)\ldots}.$$

Скорочений (символічний) запис $\Delta^E_{p_1(x)\ldots p_n(x)\ldots}$ називається $\Delta^E$-зображенням числа $x$ й відповідного до нього ряду Енгеля, при цьому натуральне число $p_n(x)$ є $n$-ною цифрою даного зображення. Кожна цифра є коректно означеною функцією зображеного числа.

Ці дві теореми дозволяють установити взаємно однозначну відповідність між множиною ірраціональних чисел інтервалу $(0;1)$, сім'єю рядів Остроградського-Серпінського-Пірса і сім'єю рядів Енгеля. Тому можна ототожнювати ірраціональні числа з $(0;1)$ із відповідними до них рядами Остроградського-Серпінського-Пірса й Енгеля, а точніше, з послідовностями натуральних чисел, які ці ряди задають. Таким чином отримуємо дві системи представлення (зображення) ірраціональних чисел із $(0;1)$.

**Означення 3.** *Циліндром* $\Delta^O_{c_1c_2\ldots c_m}$ $\left(\Delta^E_{c_1c_2\ldots c_m}\right)$ *рангу* $m$ *із основою* $(c_1c_2\ldots c_m)$, *породженим представленням чисел рядами Остроградського-Серпінського-Пірса (Енгеля),* *називається множина всіх чисел виду* $\Delta^O_{c_1c_2\ldots c_m\alpha_{m+1}\alpha_{m+2}\ldots}$ $\left(\Delta^E_{c_1c_2\ldots c_m\alpha_{m+1}\alpha_{m+2}\ldots}\right)$.

Відомо [2, 8], що циліндри однакового рангу й зображення не перетинаються, причому $\Delta^E$-циліндри є півінтервалами. Для міри Лебега таких циліндрів виконуються формули

$$\lambda\left(\Delta^O_{c_1c_2\ldots c_m}\right) = \frac{1}{c_1\ldots c_m\left(c_m+1\right)},$$

$$\lambda\left(\Delta^E_{c_1c_2\ldots c_m}\right) = \left|\Delta^E_{c_1c_2\ldots c_m}\right| = \frac{1}{\left(c_1+1\right)\ldots\left(c_m+1\right)c_m}.$$

Нехай маємо два різні числа, представлені рядами Енгеля: $x_1 = \Delta^E_{a_1\ldots a_n\ldots}$ і $x_2 = \Delta^E_{b_1\ldots b_n\ldots}$. Тоді $x_1 > x_2 \Leftrightarrow$ існує $i \in \mathbb{N}$ таке, що $a_i < b_i$, а для всіх натуральних $k < i$ виконується рівність $a_k = b_k$.

Візьмемо два різні числа, представлені рядами Остроградського-Серпінського-Пірса: $x_1 = \Delta^O_{a_1\ldots a_n\ldots}$ і $x_2 = \Delta^O_{b_1\ldots b_n\ldots}$. Нехай $i$ — найменше натуральне число, таке, що $a_i \neq b_i$. Тут можливі два випадки. Якщо $i$ – парне, то $x_1 > x_2 \Leftrightarrow a_i > b_i$. Якщо $i$ – непарне, то $x_1 > x_2 \Leftrightarrow a_i < b_i$.

Детальніше про ряди Остроградського-Серпінського-Пірса (далі — ряди Остроградського) й ряди Енгеля можна дізнатися з робіт [1–4, 7, 8, 10–15]

**Основний об'єкт дослідження**

Функцію $f$ на множині $I_0$ ірраціональних чисел з інтервалу $(0;1)$ означимо рівністю:

$$f\left(x\right) = f\left(\Delta^O_{q_1(x)\ldots q_n(x)\ldots}\right) = \Delta^E_{q_1(x)\ldots q_n(x)\ldots}.$$

Коректність означення цієї функції є наслідком вище наведених фактів. Її ми називатимемо проектором ($\Delta^O$-зображення в $\Delta^E$-зображення), оскільки цифри відповідних зображень значення функції й аргумента збігаються.

## 2. Множина значень проектора. Задача Альфреда Реньї

Задача про міру Лебега множини значень функції (проектора) $f$ відома під назвою задачі Альфреда Реньї [2, 12, 15], початково сформульованої і розв'язаної у ймовірнісних термінах [12]. Ми пропонуємо інший метод її розв'язання.

**Теорема 3.** *Множиною значень $E_f$ проектора $f$ є множина канторівського типу*

$$C\left[\Delta^E_{q_1(x)\ldots q_n(x)\ldots}, \overline{(ii)}\right] = \{x : x = \Delta^E_{q_1(x)\ldots q_n(x)\ldots}, q_{j+1} > q_j, j \in \mathbb{N}\},$$

*яка є ніде не щільною множиною з мірою Лебега* $\frac{1}{2}$.

*Доведення.* Оскільки для довільної строго зростаючої послідовності натуральних чисел $(q_n)$ число $x = \Delta^O_{q_1\ldots q_n\ldots} \in D_f$, то $y = f(x) = \Delta^E_{q_1\ldots q_n\ldots} \in E_f$, а тому виконується рівність $E_f = C$.

Покажемо, що $E_f$ є ніде не щільною множиною. Для цього розглянемо довільний інтервал $\left(\Delta^E_{q_1\ldots q_n a_1 a_2\ldots}; \Delta^E_{q_1\ldots q_n b_1 b_2\ldots}\right)$. Згідно з ознаками порівняння чисел за їхніми $\Delta^E$-зображеннями маємо, що цьому інтервалу повністю належить півінтервал $\Delta^E_{q_1\ldots q_n b_1 (b_2+1)(b_2+1)}$, який не містить жодної точки множини $E_f$. Отже, $E_f$ є ніде не щільною множиною згідно з означенням.

Знайдемо міру Лебега для доповнення $\overline{E_f} = (0;1] \setminus E_f$. Оскільки множина сум усіх рядів Енгеля співпадає з $(0;1]$, то $\overline{E_f}$ — це множина усіх таких чисел, у $\Delta^E$-зображенні яких присутня хоча б одна пара однакових цифр. Тому $\overline{E_f}$ є об'єднанням усіх циліндрів виду $\Delta^E_{ii}$ й $\Delta^E_{q_1 q_2\ldots q_n ii}$, де $q_1, q_2, \ldots, q_n, i$ — довільна скінченна строго зростаюча послідовність натуральних чисел, тобто

$$\overline{E_f} = \bigcup_{q_1<q_2<\ldots<q_n<i} \Delta^E_{q_1 q_2\ldots q_n ii}.$$

Циліндри, які входять у об'єднання, не перетинаються, тому міра Лебега їхнього об'єднання дорівнюватиме сумі довжин циліндрів:

$$\lambda\left(\overline{E_f}\right) = \sum_{i=1}^{\infty}\left|\Delta^E_{ii}\right| + \sum_{q_n=1}^{\infty}\sum_{q_1<q_2<\ldots<q_n}\sum_{i=q_n+1}^{\infty}\left|\Delta^E_{q_1q_2\ldots q_nii}\right|.$$

Для фіксованого набору $q_1, q_2, \ldots, q_n$ зростаючих натуральних чисел:

$$\sum_{i=q_n+1}^{\infty}\left|\Delta^E_{q_1q_2\ldots q_nii}\right| = \frac{1}{(q_1+1)\cdot\ldots\cdot(q_n+1)}\sum_{i=q_n+1}^{\infty}\frac{1}{(i+1)^2 i},$$

оскільки $\left|\Delta^E_{q_1q_2\ldots q_nii}\right| = \frac{1}{(q_1+1)\cdot\ldots\cdot(q_n+1)(i+1)^2 i}$.

При фіксованому $q_n$ отримуємо:

$$S(q_n) = \sum_{q_1<q_2<\ldots<q_n}\sum_{i=q_n+1}^{\infty}\left|\Delta^E_{q_1q_2\ldots q_nii}\right| =$$
$$= \sum_{q_1<q_2<\ldots<q_n}\left(\frac{1}{(q_1+1)\cdot\ldots\cdot(q_n+1)}\cdot\sum_{i=q_n+1}^{\infty}\frac{1}{(i+1)^2 i}\right) =$$
$$= \left(\sum_{i=q_n+1}^{\infty}\frac{1}{(i+1)^2 i}\right)\cdot\sum_{q_1<q_2<\ldots<q_n}\frac{1}{(q_1+1)\cdot\ldots\cdot(q_n+1)}.$$

Нехай $M(q_n) = \sum\limits_{q_1<q_2<\ldots<q_n}\frac{1}{(q_1+1)\cdot\ldots\cdot(q_n+1)}$ при $q_n = const$. Доведемо, що $M(q_n) = \dfrac{1}{2}$ при довільному натуральному $q_n$. Для цього скористаємося методом математичної індукції.

При $q_n = 1$ сума складається з одного доданка, який дорівнює $\dfrac{1}{2}$, тобто $M(1) = \dfrac{1}{2}$. При $q_n = 2$ маємо: $M(2) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2\cdot 3} = \dfrac{1}{2}$.

База індукції виконується. Припустимо, що $M\left(q_n\right) = \frac{1}{2}$ для всіх натуральних $q_n \leq k$. Тоді при $q_n = k+1$ маємо

$$M\left(k+1\right) = \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+2} \cdot \left(M\left(1\right) + M\left(2\right) + \ldots + M\left(k\right)\right) = \\ = \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+2} \cdot \frac{k}{2} = \frac{1}{2}.$$

Таким чином твердження має місце і при $q_n = k+1$. В силу принципу математичної індукції

$$M\left(q_n\right) = \sum_{q_1<q_2<\ldots<q_n} \frac{1}{\left(q_1+1\right)\cdot\ldots\cdot\left(q_n+1\right)} = \frac{1}{2}$$

для довільного фіксованого значення $q_n$. Звідси

$$S\left(q_n\right) = \frac{1}{2} \sum_{i=q_n+1}^{\infty} \frac{1}{\left(i+1\right)^2 i}.$$

Тому міра Лебега множини $\overline{E_f}$ дорівнює

$$\lambda\left(\overline{E_f}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \left|\Delta_{ii}^{E}\right| + \sum_{q_n=1}^{\infty} S\left(q_n\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\left(i+1\right)^2 i} + \sum_{m=1}^{\infty} S\left(m\right) = \\ = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\left(i+1\right)^2 i} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{1}{\left(i+1\right)^2 i} = \\ = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\left(i+1\right)^2 i} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3^2\cdot 2} + \frac{2}{4^2\cdot 3} + \frac{3}{5^2\cdot 4} + \ldots\right) = \\ = \frac{1}{4} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{\left(i+1\right)^2 i} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=2}^{\infty} \frac{i-1}{\left(i+1\right)^2 i} =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=2}^{\infty} \frac{i+1}{\left(i+1\right)^2 i} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{\left(i+1\right) i} = \\ = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

А оскільки множина $\overline{E_f}$ є доповненням множини $E_f$, то $\lambda(E_f) = 1 - \lambda\left(\overline{E_f}\right) = \frac{1}{2}$. $\square$

## 3. Властивості проектора

**Теорема 4.** *Проектор $f$ є ніде не монотонною функцією на всій області визначення.*

*Доведення.* Покажемо, що проектор $f$ не має жодного, хай як завгодно малого, проміжку монотонності. Для цього скористаємося методом доведення від супротивного. Припустимо, що в інтервалі $(0;1)$ існує відрізок $\left[\Delta^O_{q_1\ldots q_n a_{n+1}a_{n+2}\ldots}; \Delta^O_{q_1\ldots q_n b_{n+1}b_{n+2}\ldots}\right] = [x_1; x_2]$, на якому функція $f$ є монотонною ($a_{n+1} \neq b_{n+1}$).

Якщо $n$ парне, то $a_{n+1} > b_{n+1}$. Тоді число $x^* = \Delta^O_{q_1\ldots q_n a_{n+1}(a_{n+2}+1)(a_{n+2}+2)\ldots}$ є більшим за $x_1$ і меншим за $x_2$, тобто $x^* \in (x_1; x_2)$.

Оскільки число $f(x^*) = \Delta^E_{q_1\ldots q_n a_{n+1}(a_{n+2}+1)(a_{n+2}+2)\ldots}$ менше за $f(x_1) = \Delta^E_{q_1\ldots q_n a_{n+1}a_{n+2}\ldots}$ і $f(x_2) = \Delta^E_{q_1\ldots q_n b_{n+1}b_{n+2}\ldots}$, то це суперечить тому, що функція $f$ є монотонною на обраному відрізку.

Аналогічно отримується протиріччя у випадку, коли $n$ непарне. Отримана суперечність доводить теорему. $\square$

Зауважимо, що функція $f$, будучи неозначеною в раціональних точках, має в цих точках розриви. Тому дослідимо її на неперервність і диференційовність по множині ірраціональних чисел.

**Теорема 5.** *Функція $f$ є неперервною в кожній точці області визначення по множині ірраціональних чисел, а в кожній раціональній точці інтервалу* $(0;1)$ *має неусувні розриви першого роду.*

*Доведення.* Нехай $x_0 = \Delta^O_{c_1\ldots c_n\ldots}$ – довільне фіксоване ірраціональне число з $(0;1)$ і аргумент проектора $x \to x_0$ по множині ірраціональних чисел. Нехай $x = \Delta^O_{a_1\ldots a_n\ldots}$. Умова $x \to x_0$ рівносильна до умови $n \to \infty$, де $n$ – таке натуральне число, що

$a_{n+1} \neq c_{n+1}$, але $a_i = c_i$ при $i \leq n$ [2]. Звідси

$$\left| f\left(x_0\right) - f\left(x\right) \right| = \left| \Delta^E_{c_1 \ldots c_n c_{n+1} \ldots} - \Delta^E_{c_1 \ldots c_n a_{n+1} \ldots} \right| < \left| \Delta^E_{c_1 \ldots c_n} \right| \to 0$$

при $n \to \infty$. Отже, функція $f$ є неперервною по множині ірраціональних чисел в кожній точці області визначення.

У роботі [2] показано, що кожне раціональне число з $(0;1)$ має два представлення у вигляді неповних сум ряду Остроградського:

$$\begin{aligned} x_r &= \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_1 q_2} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{q_1 \cdot \ldots \cdot q_n} = \\ &= \frac{1}{q_1} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{q_1 \cdot \ldots \cdot q_{n-1} \left(q_n - 1\right)} + \frac{(-1)^n}{q_1 \cdot \ldots \cdot q_{n-1} \left(q_n - 1\right) q_n}. \end{aligned}$$

Із того, що $x = \Delta^O_{a_1 \ldots a_n \ldots} \to x_r$, випливає, що в достатньо малому околі точки $x_r$ всі ірраціональні числа з одного якогось боку від $x_r$ мають $\Delta^O$-зображення виду $x = \Delta^O_{q_1 \ldots q_n a_{n+1} \ldots}$, а з другого боку мають $\Delta^O$-зображення виду $x = \Delta^O_{q_1 \ldots q_{n-1} (q_n - 1) q_n b_{n+2} \ldots}$ залежно від парності $n$. Причому, з $x \to x_r$ випливає, що $a_{n+1} \to +\infty$ і $b_{n+2} \to +\infty$.

Тоді значення проектора в цьому околі з одного якогось боку від $x_r$ мають відповідно вигляд $f\left(x\right) = \Delta^E_{q_1 \ldots q_n a_{n+1} \ldots}$, а з другого боку мають вигляд $f\left(x\right) = \Delta^E_{q_1 \ldots q_{n-1} (q_n - 1) q_n b_{n+2} \ldots}$. При цьому $a_{n+1} \to +\infty$ і $b_{n+2} \to +\infty$ при $x \to x_r$. Але тоді значення проектора $f$ з одного боку прямують до числа

$$\frac{1}{q_1 + 1} + \frac{1}{\left(q_1 + 1\right)\left(q_2 + 1\right)} + \ldots + \frac{1}{\left(q_1 + 1\right) \cdot \ldots \cdot \left(q_n + 1\right)},$$

а з другого боку до числа

$$\begin{aligned} &\frac{1}{q_1 + 1} + \ldots + \frac{1}{\left(q_1 + 1\right) \cdot \ldots \cdot \left(q_{n-1} + 1\right) q_n} + \\ &\quad + \frac{1}{\left(q_1 + 1\right) \cdot \ldots \cdot \left(q_n - 1\right) q_n \left(q_n + 1\right)}. \end{aligned}$$

Зрозуміло, що ці числа нерівнозначні, а тому в раціональній точці $x_r$ маємо неусувний розрив першого роду. $\square$

**Теорема 6.** *Функція $f$ є недиференційовною майже скрізь (у розумінні міри Лебега) по множині ірраціональних чисел.*

*Доведення.* Нехай $x_0 = \Delta^O_{c_1 \ldots c_n c_{n+1} \ldots}$ – деяке фіксоване ірраціональне число, а $x = \Delta^O_{c_1 \ldots c_n a_{n+1} \ldots}$ – деяке число, $\Delta^O$-зображення якого відрізняється від $\Delta^O$-зображення числа $x_0$ починаючи з деякого $(n+1)$-го елемента, тобто $a_{n+1} \neq c_{n+1}$.

Розглянемо відношення

$$\frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} = \frac{\Delta^E_{c_1 \ldots c_n c_{n+1} \ldots} - \Delta^E_{c_1 \ldots c_n a_{n+1} \ldots}}{\Delta^O_{c_1 \ldots c_n c_{n+1} \ldots} - \Delta^O_{c_1 \ldots c_n a_{n+1} \ldots}} =$$
$$= \frac{\frac{1}{(c_1+1) \cdot \ldots \cdot (c_n+1)} \left(\Delta^E_{c_{n+1} \ldots} - \Delta^E_{a_{n+1} \ldots}\right)}{\frac{(-1)^n}{c_1 \cdot \ldots \cdot c_n} \left(\Delta^O_{c_{n+1} \ldots} - \Delta^O_{a_{n+1} \ldots}\right)} =$$
$$= \frac{(-1)^n c_1 \cdot \ldots \cdot c_n}{(c_1+1) \cdot \ldots \cdot (c_n+1)} \cdot \frac{\Delta^E_{c_{n+1} \ldots} - \Delta^E_{a_{n+1} \ldots}}{\Delta^O_{c_{n+1} \ldots} - \Delta^O_{a_{n+1} \ldots}}.$$

Згідно з ознаками порівняння чисел за їхніми зображеннями чисельник і знаменник дробу $\frac{\Delta^E_{c_{n+1} \ldots} - \Delta^E_{a_{n+1} \ldots}}{\Delta^O_{c_{n+1} \ldots} - \Delta^O_{a_{n+1} \ldots}}$ одночасно або додатні, або від'ємні, а тому сам дріб завжди є додатним. Тому знак відношення $\frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}$ залежить винятково від парності числа $n$. Оскільки в довільному, хай як завгодно малому, околі точки $x_0$ існують числа, $\Delta^O$-зображення яких відрізняються від $\Delta^O$-зображеня числа $x_0$, починаючи як з парних, так і з непарних місць, то знак цього відношення в довільному околі точки $x_0$ не є фіксованим. Тому, якщо границя

$$\lim_{x \to x_0, x \in I_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}$$

існує, то вона може дорівнювати лише 0.

Покажемо, що майже скрізь (у розумінні міри Лебега), цієї границі не існує. Для цього спочатку покажемо, що в довільному околі ірраціональної точки $x_0 \in (0;1)$ існує така точка $x^*$, що

$$\left|\frac{f(x_0)-f(x^*)}{x_0-x^*}\right| > d = d(x_0) \geq 0,$$

а потім доведемо, що для множини точок міри Лебега 1 число $d(x_0) > 0$, тобто, що майже скрізь границі $\lim\limits_{x\to x_0, x\in I_0} \dfrac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x}$ не існує.

Отож маємо, що

$$\left|\frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x}\right| = \frac{c_1\cdot\ldots\cdot c_n}{(c_1+1)\ldots(c_n+1)}\cdot\frac{\Delta^E_{c_{n+1}\ldots}-\Delta^E_{a_{n+1}\ldots}}{\Delta^O_{c_{n+1}\ldots}-\Delta^O_{a_{n+1}\ldots}}.$$

В околі точки $x_0$ візьмемо таку точку $x = x^* = \Delta^O_{c_1\ldots c_n a_{n+1}\ldots}$, що

$$a_{n+1} = (c_{n+1}+1)(c_{n+2}+1).$$

Існування такої точки випливає з геометрії $\Delta^O$-зображення [2].

Відомо [7], що $\Delta^E_{a_{n+1}a_{n+2}\ldots} < \frac{1}{a_{n+1}}$, а отже,

$$\Delta^E_{a_{n+1}\ldots} < \frac{1}{(c_{n+1}+1)(c_{n+2}+1)}.$$

Звідси отримуємо оцінку

$$\Delta^E_{c_{n+1}\ldots}-\Delta^E_{a_{n+1}\ldots} > \left(\frac{1}{c_{n+1}+1}+\frac{1}{(c_{n+1}+1)(c_{n+2}+1)}+\ldots\right)- \\ -\frac{1}{(c_{n+1}+1)(c_{n+2}+1)} > \frac{1}{c_{n+1}+1}.$$

Також відомо [2], що $\Delta^O_{c_{n+1}c_{n+2}\ldots} < \frac{1}{c_{n+1}}$, а тому маємо оцінку

$$0 < \Delta^O_{c_{n+1}\ldots}-\Delta^O_{a_{n+1}\ldots} < \Delta^O_{c_{n+1}\ldots} < \frac{1}{c_{n+1}}.$$

Таким чином, отримуємо оцінку для дробу:

$$\frac{\Delta^E_{c_{n+1}\ldots} - \Delta^E_{a_{n+1}\ldots}}{\Delta^O_{c_{n+1}\ldots} - \Delta^O_{a_{n+1}\ldots}} > \frac{\dfrac{1}{c_{n+1}+1}}{\dfrac{1}{c_{n+1}}} = \frac{c_{n+1}}{c_{n+1}+1}.$$

Звідси маємо, що

$$\left|\frac{f(x_0) - f(x^*)}{x_0 - x^*}\right| > \frac{c_1 \cdot \ldots \cdot c_n \cdot c_{n+1}}{(c_1+1)\ldots(c_n+1)(c_{n+1}+1)}.$$

Але водночас,

$$\frac{c_1 \cdot \ldots \cdot c_n \cdot c_{n+1}}{(c_1+1)\ldots(c_n+1)(c_{n+1}+1)} > \prod_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{c_i+1} = d(x_0).$$

Остаточно отримуємо, що

$$\left|\frac{f(x_0) - f(x^*)}{x_0 - x^*}\right| > d(x_0) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{c_i(x_0)}{c_i(x_0)+1}.$$

Покажемо, що $d(x_0) > 0$ майже скрізь на інтервалі $(0;1)$ у розумінні міри Лебега.

За критерієм рівності нескінченного добутку нулю,

$$\prod_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{c_i+1} = 0 \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \ln\left(\frac{c_i}{c_i+1}\right) = -\infty.$$

Розглянемо допоміжний ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{1}{c_i}$. Покажемо, що цей ряд одночасно збіжний або одночасно розбіжний із рядом $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \ln\left(\dfrac{c_i}{c_i+1}\right)$. Для цього покажемо, що існує скінченна і не рівна нулю границя відношення відповідних елементів цих рядів:

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\ln\left(\dfrac{c_i}{c_i+1}\right)}{\dfrac{1}{c_i}} = \lim_{i\to\infty}\left(c_i \ln\left(\frac{c_i}{c_i+1}\right)\right).$$

Оскільки $c_i \to +\infty$ при $i \to \infty$, то достатньо показати, що існує ненульова границя відповідної функції:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\right) = -\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)^x =$$
$$= -\ln\left(\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right) = -\ln e = -1.$$

Отже, ряди $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\dfrac{1}{c_i}$ та $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\ln\left(\dfrac{c_i}{c_i+1}\right)$ одночасно збігаються чи розбігаються.

Як відомо з класичних результатів Дж. Шалліта [14], ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\dfrac{1}{c_i(x_0)}$ є збіжним для майже всіх $x_0 \in I_0$ (у розумінні міри Лебега). Тому майже для всіх $x_0 \in I_0$ буде збіжним ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\ln\left(\dfrac{c_i(x_0)}{c_i(x_0)+1}\right)$ і

$$d(x_0) = \prod_{i=1}^{\infty}\frac{c_i(x_0)}{c_i(x_0)+1} > 0.$$

Отож, майже для всіх $x_0 \in I_0$ у довільному околі точки $x_0$ існує точка $x^*$, така, що $\left|\dfrac{f(x_0)-f(x^*)}{x_0-x^*}\right| > d(x_0) > 0$, а тому функція $f$ є майже скрізь недиференційовною по множині $I_0$. □

Наразі лишається відкритим питання про те, чи є функція $f$ усюди недиференційовною.

# Література

[1] *Барановський О. М., Працьовитий М. В., Гетьман Б. І.* Порівняльний аналіз метричних теорій представлень чисел рядами Енгеля і Остроградського та ланцюговими дробами // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки. – 2011. – №12. – С. 130-138.

[2] *Барановський О. М., Працьовитий М. В., Торбін Г. М.* Ряди Остроградського-Серпінського-Пірса. – Київ: Наукова думка. – 2013. – 488 с.

[3] *Мороз М. П.* Зв'язки між рядами Енгеля та рядами Остроградського-Серпінського-Пірса // Студентські фізико-математичні етюди, – Київ: Вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова. – 2016. – № 15, Т. 1. – С. 44-55.

[4] *Працьовита І. М.* Про розклади чисел у знакозмінні s-адичні ряди і ряди Остроградського 1- та 2-го видів // Укр. мат. журн. — 2009. – Т. 61, №7. – С. 958-968.

[5] *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженні сингулярних розподілів. – Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. – 1998. – 296 с.

[6] *Працьовитий М. В., Барановський О. М.* Використання рядів Остроградського для аналітичного задання розподілів випадкових величин і відображень // Динамічні системи: Праці Українського математичного конгресу. – 2001. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2003. – С. 77-93.

[7] *Працьовитий М. В., Барановський О. М., Гетьман Б. І.* Ряди Енгеля й Остроградського та їх застосування. – Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгомановаю. – 2014. – 320 с.

[8] *Працьовитий М. В., Гетьман Б. І.* Ряди Енгеля та їх застосування // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – 2006. – № 7. – С. 105-116.

[9] *Турбин А.Ф., Працевитый Н.В.* Фрактальные множества, функции, распределения. – Киев: Наукова думка. – 1992. – 208 с.

[10] *Erdos P., Renyi A., Szusz P.* On Engel's and Sylvester's series // Annales Univ. Sci. Budapest, Sect. Math. – 1958. – № 1. – P. 7-12.

[11] *Pierce T.A.* On an algorithm and its use in approximating roots of algebraic equations // Amer. Math. Monthly. – 1929. – Vol. 36, № 10. – P. 523-525.

[12] *Renyi A.* A new approach to the theory of Engel's series // Ann. Univ. Sci. Budapest, Sect. Math. – 1962. – № 5. – P. 25-32.

[13] *Sierpinski W.O.* O kilku algorytmach dla rozwijania liczb rzeczywistych na szeregi // Sprawozdania z posiedzen Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, Wydzial III. – 1911. – Vol. 4. – P. 56-77.

[14] *Shallit J.O.* Metric theory of Pierce expansions // Fibonacci Quart. – 1986. – Vol. 24, № 1. – P. 22-40.

[15] *Viader P., Bibiloni Ll., Paradis J.* On a problem of Alfred Renyi // Acta Arith. – 1999. – Vol. 91, № 2. – P. 107-115.