Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2017, т. 14, № 4, 34–48

УДК 511.7+517.5

В. П. Маркітан

Інститут математики НАН України, Київ;
v.p.markitan@npu.edu.ua

Фрактальні властивості множин та функцій, пов'язаних з марковським зображенням дійсних чисел, визначеним двічі стохастичною матрицею

We consider Markov representations of real numbers from $[0,1]$ defined by doubly-stochastic matrices. These representation are encodings of reals via binary alphabet. Topological, metric and fractal properties of real number sets with restrictions on usages of symbols in the Markov representation are described. Properties of a function associated to a real number x with a Markov representation $\Delta^M_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ the number $MD(x)$ having binary representation $(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots)$ are investigated.

Keywords: Markov representation, doubly-stochastic matrix, Lebesgue measure, Hausdorff–Besikovich dimension, singular function.

У статті досліджується марковське зображення дробової частини дійсного числа, що є кодуванням дійсних чисел з двосимвольним алфавітом за умови визначення його двічі стохастичною матрицею. Досліджуються тополого-метричні та фрактальні властивості множин дійсних чисел з обмеженнями на використання символів у марковському зображенні числа. Досліджуються властивості функції, яка числу, заданому своїм марковським зображенням, ставить у відповідність число з такими самими цифрами у звичайному двійковому зображенні.
Ключові слова: марковське зображення, двічі стохастична матриця, міра Лебега, розмірність Гаусдорфа-Безиковича, сингулярна функція.

Вступ

На сьогодні різні моделі дійсного числа (різні системи представлення й зображення дійсних чисел) використовуються в математиці та її застосуваннях. Це є особливо ефективним при дослідженні різних математичних об'єктів зі складними локальними властивостями і багатими множинами «особливостей».

Марковське зображення дробової частини дійсного числа, породжене двічі стохастичною матрицею, має додаткові «симетрії», що спрощує розв'язання деяких задач метричної та ймовірнісної теорії чисел і допускає більш тонкий аналіз об'єктів, визначених у його термінах.

У даній роботі ми, використовуючи марковське двосимвольне зображення дробової частини дійсного числа, визначене двічі стохастичною матрицею, вивчаємо множини канторівського типу, означені обмеженнями на вживання символів у зображенні числа; сингулярну функцію, яка встановлює зв'язок між числами відрізка $[0;1]$ через «однакові» за формою зображення: марковське і двійкове.

1. Марковське двосимвольне зображення дійсних чисел одиничного відрізка, визначене двічі стохастичною матрицею

Нехай $A = \{0, 1\}$ — алфавіт системи числення; $q = (q_0, q_1)$ — упорядкований набір додатних чисел, причому $q_0 + q_1 = 1$; $L = A \times A \times \ldots$ — простір послідовностей алфавіту;

$$Q = ||q_{ik}|| = \begin{pmatrix} q_{00} & q_{01} \\ q_{10} & q_{11} \end{pmatrix} -$$

стохастична матриця (сума елементів у кожному стовпчику дорівнює одиниці,) причому вона не містить нулів.

Теорема 1. *Для будь-якого числа $x \in [0; 1]$ існує послідовність (α_n) з нулів і одиниць така, що*

$$x = \beta_{\alpha_1} + q_{\alpha_1} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\beta_{\alpha_k \alpha_{k+1}} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j \alpha_{j+1}} \right) \equiv \Delta^M_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k \ldots}, \qquad (1)$$

$$\textit{де} \quad \beta_{\alpha_1} = \alpha_1 q_{1-\alpha_1}, \quad \beta_{\alpha_k \alpha_{k+1}} = (\alpha_{k+1}) q_{\alpha_k, 1-\alpha_{k+1}}.$$

Доведення. Доведемо існування розкладу (1). Зазначимо, що $1 = \Delta^M_{(1)}$. Оскільки

$$[0; 1) = \bigcup_{i=0}^{1} \left[\beta_i; \beta_{(i+1)}\right),$$

то існує $\alpha_1 \in \{0; 1\}$, таке, що

$$\beta_{\alpha_1} \leq x < \beta_{\alpha_1 + 1}, \text{ або } 0 \leq x - \beta_{\alpha_1} \equiv x_1 < q_{\alpha_1},$$

звідки отримуємо $x = \beta_{\alpha_1} + x_1$. Якщо $x_1 = 0$, то $x = \beta_{\alpha_1} = \Delta^M_{\alpha_1(0)}$. Тобто $\alpha_k = 0$ для всіх $k > 1$.

Нехай $x_1 > 0$. Аналогічно, оскільки

$$x_1 \in [0; q_{\alpha_1}) = \bigcup_{i=0}^{1} \left[\beta_{\alpha_1 i}; \beta_{\alpha_1 (i+1)}\right),$$

то існує $\alpha_2 \in \{0; 1\}$, таке, що

$$\begin{gathered}\beta_{\alpha_1\alpha_2} q_{\alpha_1} \leq x_1 < \beta_{\alpha_1(\alpha_2+1)} q_{\alpha_1}, \text{ або} \\ 0 \leq x_1 - \beta_{\alpha_1\alpha_2} q_{\alpha_1} \equiv x_2 < q_{\alpha_1} q_{\alpha_1\alpha_2},\end{gathered}$$

звідки отримуємо $x_1 = \beta_{\alpha_1\alpha_2} q_{\alpha_1} + x_2$ і $x = \beta_{\alpha_1} + \beta_{\alpha_1\alpha_2} q_{\alpha_1} + x_2$.

Якщо $x_2 = 0$, то $x = \beta_{\alpha_1} + \beta_{\alpha_1\alpha_2} q_{\alpha_1} = \Delta^M_{\alpha_1\alpha_2(0)}$. Тобто $\alpha_k = 0$ для всіх $k > 2$.

Продовжуючи цей процес, знайдемо числа $\alpha_3, \alpha_4, \ldots, \alpha_k$ і $x_3, x_4, \ldots x_k$, такі, що

$$0 \leq x_{k-1} - \beta_{\alpha_{k-1}\alpha_k} q_{\alpha_1} q_{\alpha_1\alpha_2} \cdots q_{\alpha_{k-2}\alpha_{k-1}} \equiv x_k < q_{\alpha_1} q_{\alpha_1\alpha_2} \cdots q_{\alpha_{k-1}\alpha_k}$$

і $x = \beta_{\alpha_1} + \beta_{\alpha_1\alpha_2} q_{\alpha_1} + \ldots + \beta_{\alpha_{k-1}\alpha_k} q_{\alpha_1} q_{\alpha_1\alpha_2} \cdots q_{\alpha_{k-2}\alpha_{k-1}} + x_k$.

Аналогічно, оскільки

$$x_k \in \left[0; q_{\alpha_1} \prod_{n=1}^{k-1} q_{\alpha_n\alpha_{n+1}}\right) = \bigcup_{i=0}^{1} \left[\beta_{\alpha_k i}; \beta_{\alpha_k (i+1)}\right),$$

то існує $\alpha_{k+1} \in \{0; 1\}$, таке, що

$$\begin{gathered}0 \leq x_k - \beta_{\alpha_k\alpha_{k+1}} q_{\alpha_1} q_{\alpha_1\alpha_2} \cdots q_{\alpha_{k-1}\alpha_k} \equiv x_{k+1} < \\ < q_{\alpha_1} q_{\alpha_1\alpha_2} \cdots q_{\alpha_{k-1}\alpha_k} q_{\alpha_k\alpha_{k+1}} = q_{\alpha_1} \prod_{n=1}^{k} q_{\alpha_n\alpha_{n+1}}.\end{gathered}$$

Цей процес є нескінченним, але збіжним, оскільки

$$x_{k+1} < (\max\{q_{00}, q_{01}, q_{10}, q_{11},\})^n \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Отже, можливий розклад (1). $\square$

Означення 1. *Формальний (скорочений) запис* $\Delta^M_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ *ряду (1) і його суми* x *називають марковським зображенням числа* x*, яке є його кодуванням засобами двосимвольного алфавіту* A.

При цьому $\alpha_n = \alpha_n(x)$ називається n-ою *цифрою (символом)* цього зображення. Вираз функції розподілу випадкової величини заданим своїм Q_2-зображенням «природним» чином призводить до поняття марковського зображення числа.

Зауваження 1. *Зліченна множина чисел має два зображення. Це числа виду:*

$$\Delta^M_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k 0(1)} = \Delta^M_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k 1(0)}.$$

Їх називатимемо M*-раціональними та використовуватимемо їхні зображення з періодом 0. Решту ж чисел назвемо* M*-ірраціональними, вони мають одне зображення.*

Означення 2. *Нехай* $(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ *– впорядкований набір нулів та одиниць. Циліндром рангу* m *з основою* $c_1c_2\ldots c_m$ *називається множина* $\Delta^M_{c_1c_2\ldots c_m}$ *чисел* $x \in [0;1]$*, перші* m *цифр у зображенні яких є* $c_1, c_2, \ldots, c_m$ *відповідно, тобто*

$$\Delta^M_{c_1c_2\ldots c_m} = \Big\{x: \quad x = \Delta^M_{c_1c_2\ldots c_m\alpha_{m+1}\alpha_{m+2}\ldots}, \quad \alpha_{m+i} \in A, \quad i \in \mathbb{N}\Big\}.$$

Справджуються такі властивості циліндрів:

1. $\Delta^M_{c_1c_2\ldots c_m} = \Delta^M_{c_1c_2\ldots c_m 0} \cup \Delta^M_{c_1c_2\ldots c_m 1}$;
2. $\min\Delta^M_{c_1c_2\ldots c_m(i+1)} = \sup\Delta^M_{c_1c_2\ldots c_m i}$, $i = \{0,1\}$;
3. $\frac{|\Delta^M_{c_1\ldots c_m ij}|}{|\Delta^M_{c_1\ldots c_m i}|} = q_{ij}$;
4. Довжина циліндра $\Delta^M_{c_1c_2\ldots c_m}$ обчислюється за формулою $|\Delta^M_{c_1\ldots c_m}| = q_{c_1}\prod_{i=1}^{m-1} q_{c_ic_{i+1}}$.
5. $\bigcup\limits_{c_1=0}^{1}\bigcup\limits_{c_2=0}^{1}\ldots\bigcup\limits_{c_m=0}^{1}\Delta_{c_1c_2\ldots c_m} = [0;1]$;
6. Циліндри одного рангу не перетинаються або співпадають, причому $\Delta^M_{c_1c_2\ldots c_m} = \Delta^M_{c'_1c'_2\ldots c'_m} \Leftrightarrow c_i = c'_i \;\; i = \overline{1,m}$;

7.

$$\Delta^M_{c_1c_2\ldots c_m} \cap \Delta^M_{c'_1c'_2\ldots c'_mc'_{m+1}\ldots c'_{m+k}} =$$

$$= \begin{cases} \varnothing, & \text{якщо } \exists\, i \leqslant m,\ c_i \neq c'_i, \\ \Delta^M_{c'_1c'_2\ldots c'_mc'_{m+1}\ldots c'_{m+k}}, & \text{якщо } c_i = c'_i\ i = \overline{1,m}. \end{cases}$$

8. Для довільної послідовності $(c_m) \in L$ переріз $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \Delta^M_{c_1c_2\ldots c_m} = x \equiv \Delta^M_{c_1c_2\ldots c_m\ldots}$ є точкою з $[0;1]$.

9. $\Delta^M_{c_1\ldots c_m} = \left[\Delta^M_{c_1\ldots c_{m-1}[c_m+1](0)}; \Delta^M_{c_1\ldots c_{m-1}c_m(1)}\right)$.

10. Якщо матриця Q не містить нулів і є двічі стохастичною (сума елементів у кожному рядку і стовпці дорівнює одиниці), то

$$\frac{|\Delta^M_{c_1\ldots c_m01}|}{|\Delta^M_{c_1\ldots c_m0}|} = \frac{|\Delta^M_{c_1\ldots c_m10}|}{|\Delta^M_{c_1\ldots c_m1}|} \quad \text{та} \quad \frac{|\Delta^M_{c_1\ldots c_m00}|}{|\Delta^M_{c_1\ldots c_m0}|} = \frac{|\Delta^M_{c_1\ldots c_m11}|}{|\Delta^M_{c_1\ldots c_m1}|}.$$

2. Множини чисел із обмеженнями на вживання символів у марковському зображенні чисел

Нехай $x \in [0;1]$ задане своїм марковським зображенням $\Delta^M_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}$, яке визначене двічі стохастичною матрицею

$$Q = ||q_{ik}|| = \begin{pmatrix} q_{00} & q_{01} \\ q_{10} & q_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix},$$

причому $0 < a < 1$.

Теорема 2. *Множина*

$$C = \{x : \quad x = \Delta_{c_1c_2\ldots c_n\ldots},\ c_{2k-1}c_{2k} \in \{00, 11\}\ \ \forall k \in \mathbb{N}\} \quad \textit{є}$$

нуль-множиною Лебега, розмірність Гаусдорфа-Безиковича якої є коренем рівняння $a^x(a^x + (1-a)^x) = 1$.

Доведення. Нехай $\overline{\Delta}^M_{c_1c_2\ldots c_m} = \Delta^M_{c_1c_2\ldots c_m} \bigcap C$. Знайдемо міру Лебега $\lambda(C)$.

Очевидно, що $C = \overline{\Delta}^M_{00} \cup \overline{\Delta}^M_{11}$, причому $\overline{\Delta}^M_{00} \bigcap \overline{\Delta}^M_{11} = \varnothing$. Тому

$$\lambda(C) = \lambda(\overline{\Delta}^M_{00}) + \lambda(\overline{\Delta}^M_{11}).$$

Множини $\overline{\Delta}^M_{00}$ і $\overline{\Delta}^M_{11}$ є самоподібними, оскільки

$$\overline{\Delta}^M_{ii} = \overline{\Delta}^M_{ii00} \cup \overline{\Delta}^M_{ii11}, \quad i = \{0, 1\},$$

$$\overline{\Delta}^M_{00} \overset{k_1}{\sim} \overline{\Delta}^M_{0000}, \quad \overline{\Delta}^M_{00} \overset{k_2}{\sim} \overline{\Delta}^M_{0011},$$

$$k_1 = a^2, \quad k_2 = a(1-a).$$

Тоді

$$\begin{aligned} \lambda(\overline{\Delta}^M_{ii}) &= \lambda(\overline{\Delta}^M_{ii00} \cup \overline{\Delta}^M_{ii11}) = \\ &= k_1\lambda(\overline{\Delta}^M_{ii}) + k_2\lambda(\overline{\Delta}^M_{ii}) = (k_1 + k_2)\lambda(\overline{\Delta}^M_{ii}). \end{aligned}$$

Оскільки $0 < k_1 + k_2 < 1$, то $\lambda(\overline{\Delta}^M_{ii}) = 0$, а тому $\lambda(C) = 0$.

Оскільки кожна з множин $\overline{\Delta}^M_{ii}$, бувши самоподібною, задовольняє умову відкритої множини, то її розмірність Гаусдорфа-Безиковича збігається з самодібною розмірністю, яка є розв'язком рівняння

$$k_1^x + k_2^x = 1, \quad \text{тобто} \quad a^x(a^x + (1-a)^x) = 1.$$

$\square$

Теорема 3. *Множина*

$$D = \{x : \quad x = \Delta_{c_1c_2\ldots c_n\ldots}, \ c_k + c_{k+1} + c_{k+2} \neq 1 \ \forall k \in \mathbb{N}\} \quad \textit{є}$$

нуль-множиною Лебега, розмірність Гаусдорфа-Безиковича якої є коренем рівняння $(a(1-a)^2)^x + a^x = 1$.

Доведення. Нехай $\overline{\Delta}^M_{c_1c_2\ldots c_m} = \Delta^M_{c_1c_2\ldots c_m} \bigcap D$. Знайдемо міру Лебега $\lambda(D)$.

Очевидно, що $D = \overline{\Delta}^M_{11} \cup \overline{\Delta}^M_{011} \cup \overline{\Delta}^M_{1011} \cup \overline{\Delta}^M_{(0)}$, причому $\overline{\Delta}^M_{11} \bigcap \overline{\Delta}^M_{011} = \varnothing$, $\overline{\Delta}^M_{11} \cap \overline{\Delta}^M_{1011} = \varnothing$, $\overline{\Delta}^M_{011} \cap \overline{\Delta}^M_{1011} = \varnothing$. Тому

$$\lambda(D) = \lambda(\overline{\Delta}^M_{11}) + \lambda(\overline{\Delta}^M_{011}) + \lambda(\overline{\Delta}^M_{1011}).$$

Множина $\overline{\Delta}^M_{11}$ є самоподібною, оскільки

$$\overline{\Delta}^M_{11} = \overline{\Delta}^M_{111} \cup \overline{\Delta}^M_{11011},$$

$$\overline{\Delta}^M_{11} \overset{k_1}{\sim} \overline{\Delta}^M_{111}\ , \quad \overline{\Delta}^M_{11} \overset{k_2}{\sim} \overline{\Delta}^M_{11011}\ ,$$

$$k_1 = a, \quad k_2 = a(1-a)^2.$$

Тоді

$$\lambda(\overline{\Delta}^M_{11}) = \lambda(\overline{\Delta}^M_{111} \cup \overline{\Delta}^M_{11011}) =$$
$$= k_1\lambda(\overline{\Delta}^M_{11}) + k_2\lambda(\overline{\Delta}^M_{11}) = (k_1+k_2)\lambda(\overline{\Delta}^M_{11}).$$

Оскільки $0 < k_1 + k_2 < 1$, то $\lambda(\overline{\Delta}^M_{11}) = 0$, а тому враховуючи $\overline{\Delta}^M_{11} \sim \overline{\Delta}^M_{011}$ і $\overline{\Delta}^M_{11} \sim \overline{\Delta}^M_{1011}$, маємо $\lambda(D) = 0$.

Оскільки множина $\overline{\Delta}^M_{11}$, бувши самоподібною, задовольняє умову відкритої множини, то її розмірність Гаусдорфа-Безиковича збігається з самодібною розмірністю, яка є розв'язком рівняння

$$k_1^x + k_2^x = 1, \quad \text{тобто} \quad a^x + (a(1-a)^2)^x = 1.$$

Теорему доведено. □

3. Сингулярна функція, пов'язана з марковським і двійковим зображення дійсних чисел

Надалі розглядатимемо марковське зображення дійсних чисел, визначене впорядкованим набором додатних чисел $\overline{q} = (q_0, q_1)$, причому $q_0 + q_1 = 1$, і стохастичною матрицею з додатними елементами

$$Q = ||q_{ik}|| = \begin{pmatrix} q_{00} & q_{01} \\ q_{10} & q_{11} \end{pmatrix}.$$

Для пари $ij \in \{00, 01, 10, 11\}$ через $N_{ij}(x,n)$ позначимо кількість появ цієї пари до n місця включно у марковському зображенні числа $x = \Delta^M_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$, тобто

$$N_{ij}(x,n) = \#\left\{k(k+1) : \alpha_k\alpha_{k+1} = ij,\ k \leqslant n-1\right\}.$$

Означення 3. *Якщо існує границя* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{N_{ij}(x,n)}{n} = \nu_{ij}(x)$, *то її значення* $\nu_{ij}(x)$ *називають частотою пари цифр* ij *у марковському зображенні числа* $x \in [0;1]$.

Означення 4. [8] *Число* $x \in [0;1]$ *називається нормальним за Марковим, якщо для кожної пари цифр* $ij \in \{00, 01, 10, 11\}$ *частота пари існує і дорівнює:*

$$\nu_{00}(x) = q_0 q_{00},\ \nu_{01}(x) = q_0 q_{01},\ \nu_{10}(x) = q_1 q_{10},\ \nu_{11}(x) = q_1 q_{11}. \quad (2)$$

Теорема 4. [8, Теорема 2] *Міра Лебега множини нормальних за Марковим чисел дорівнює 1.*

А тепер, використовуючи марковське та двійкове представлення чисел, розглянемо функцію MD.

Означення 5. *Функцію* MD *визначимо таким чином:*

$$MD(x) = MD(\Delta^M_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) := \Delta^2_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots},$$

яка для кожного числа $x = \Delta^M_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ *із відрізка* $[0;1]$ *(заданого своїм марковським зображенням) ставить у відповідність двійкове зображення деякого числа з відрізка* $[0;1]$*, записане тими самими символами (*$\Delta^2_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i}{2^i}$*).*

Лема 5. *Для довільного набору* $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in A^n$ *виконується рівність:*

$$MD\left(\Delta^M_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n 1(0)}\right) = MD\left(\Delta^M_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n 0(1)}\right).$$

Доведення. Справді, перетворимо ліву частину рівності:

$$MD\left(\Delta^M_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n 1(0)}\right) = \Delta^2_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n 1(0)} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{2^i} + \frac{1}{2^{n+1}};$$

тепер перетворимо праву частину:

$$MD\left(\Delta^M_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n 0(1)}\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{2^i} + \sum_{j=n+2}^{\infty}\frac{1}{2^j} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{2^i} + \frac{\frac{1}{2^{n+2}}}{1-\frac{1}{2}} =$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{2^i} + \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Таким чином, права й ліва частини рівності однакові. Лему доведено. □

Лема 2 дає змогу стверджувати, що функція $MD(x)$ коректно визначена для всіх точок $x \in [0;1]$, які мають по два марковські зображення.

Теорема 6. *Функція $MD(x)$ є неперервною, строго зростаючою;*

- *лінійною, якщо $q_0 = q_{00} = q_{01} = \frac{1}{2}$,*
- *кусково лінійною, якщо $q_{00} = q_{01} = \frac{1}{2}$,*
- *сингулярною в решті випадків.*

Доведення. 1. Доведемо, що функція $MD(x)$ є неперервною в кожній точці відрізка $[0;1]$.

Нехай x_0 – довільна точка $[0;1]$. Для доведення неперервності $MD(x)$ в точці x_0 достатньо показати, що

$$\lim_{x\to x_0}|MD(x) - MD(x_0)| = 0. \quad (3)$$

Спочатку розглянемо випадок, коли точка x_0 є M-ірраціональною. Для довільного $x \in [0;1]$ існує $m = m(x)$, таке, що

$$\begin{cases} \alpha_i(x) = \alpha_i(x_0), & \text{якщо} \;\; 0 \leqslant i \leqslant m-1, \\ \alpha_m(x) \neq \alpha_m(x_0); \end{cases}$$

причому умова $x \to x_0$ рівносильна до умови $m \to \infty$. Тоді

$$\begin{aligned} |MD(x) - MD(x_0)| &= \\ &= \left| \Delta^2_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)\ldots} - \Delta^2_{\alpha_1(x_0)\alpha_2(x_0)\ldots\alpha_n(x_0)\ldots} \right| = \\ &= \left| \sum_{i=m}^{\infty} \left(\frac{\alpha_i(x)}{2^i} - \frac{\alpha_i(x_0)}{2^i} \right) \right| \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^{m+1}} + \ldots = \frac{1}{2^{m-1}} \to 0 \;\; \text{при} \;\; m \to \infty. \end{aligned}$$

Отже, функція $MD(x)$ є неперервною в точці x_0.

Нехай x_0 – M-раціональне число. Доведемо, що $MD(x)$ неперервна зліва і неперервна справа в точці x_0.

Для доведення неперервності зліва достатньо використати марковське зображення точки x_0, що містить період (1), а неперервності справа – марковське зображення точки x_0, що містить період (0), і повторити попередні міркування, які проводилися для M-ірраціональної точки.

Таким чином, функція $MD(x)$ є неперервною в кожній точці відрізка $[0; 1]$.

2. Покажемо, що функція $MD(x)$ є строго зростаючою.

Нехай $x_1 = \Delta^M_{\alpha_1^{(1)}\alpha_2^{(1)}\ldots\alpha_n^{(1)}\ldots}$, $x_2 = \Delta^M_{\alpha_1^{(2)}\alpha_2^{(2)}\ldots\alpha_n^{(2)}\ldots}$ і $x_1 < x_2$.

Це означає, що існує $m \in \mathbb{N}$, таке, що:

$\alpha_n^{(1)} = \alpha_n^{(2)} = \alpha_n$, $\alpha_2^{(1)} = \alpha_2^{(2)} = \alpha_2$, ..., $\alpha_{m-1}^{(1)} = \alpha_{m-1}^{(2)} = \alpha_{m-1}$, але $\alpha_m^{(1)} < \alpha_m^{(2)}$.

Розглянемо різницю значень функції у заданих точках:

$$MD(x_2) - MD(x_1) = \Delta^2_{\alpha_1^{(2)}\alpha_2^{(2)}\ldots\alpha_n^{(2)}\ldots} - \Delta^2_{\alpha_1^{(1)}\alpha_2^{(1)}\ldots\alpha_n^{(1)}\ldots} =$$

$$= \Delta^2_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{m-1}\alpha_m^{(2)}\alpha_{m+1}^{(2)}\ldots} - \Delta^2_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{m-1}\alpha_m^{(1)}\alpha_{m+1}^{(1)}\ldots} =$$

$$= \frac{1}{2^m} + \frac{\alpha_{m+1}^{(2)}}{2^{m+1}} + \frac{\alpha_{m+1}^{(2)}}{2^{m+2}} + \ldots - (\frac{0}{2^m} + \frac{\alpha_{m+1}^{(1)}}{2^{m+1}} + \frac{\alpha_{m+2}^{(1)}}{2^{m+2}} + \ldots) =$$

$$= \frac{1}{2^m} + \frac{\alpha_{m+1}^{(2)} - \alpha_{m+1}^{(1)}}{2^{m+1}} + \frac{\alpha_{m+1}^{(2)} - \alpha_{m+1}^{(1)}}{2^{m+2}} + \ldots \geqslant 0.$$

Оскільки $x_2 \neq x_1$, то

$$\begin{cases} \alpha_j^{(2)}(x) \neq 1, & \text{для всіх } \ j \geqslant m+1, \\ \alpha_i^{(1)}(x) \neq 0, & \text{для всіх } \ i \geqslant m+1, \end{cases}$$

тому $MD(x_2) - MD(x_1) > 0$ при $x_2 > x_1$, тобто функція $MD(x)$ є строго зростаючою.

3. Якщо $q_0 = q_{00} = q_{01} = \dfrac{1}{2}$, то марковське зображення є звичайним двійковим зображенням і $MD(x) = x$.

Нехай $q_{00} = q_{01} = \dfrac{1}{2}$. Тоді

$$x = \Delta^M_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots} = \beta_{\alpha_1} + q_{\alpha_1}u, \ \text{а} \ y = \Delta^2_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots} = \frac{\alpha_1}{2} + \frac{1}{2}u,$$

де $u = \frac{\alpha_2}{2} + \frac{\alpha_3}{2^2} + \ldots = \Delta^2_{\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots}$. Звідки

$$y = \frac{1}{2q_{\alpha_1}}x + \left(\frac{\alpha_1}{2} - \frac{\beta_{\alpha_1}}{2q_{\alpha_1}}\right).$$

Якщо $\alpha_1 = 0$, то $y = \frac{1}{2q_0}x$. Якщо $\alpha_1 = 1$, то $y = \frac{1}{2q_1}x$. Це означає, що $MD(x)$ – кусково лінійна на циліндрах першого рангу.

Доведемо сингулярність функції $MD(x)$ для решти випадків. Нехай x – нормальне за Марковим число і $MD^{'}(x)$ існує. Оскільки функція $MD(x)$ є монотоною, то згідно з відомою теоремою

Лебега в майже кожній точці відрізка $[0;1]$ існує скінченна похідна. Тому множина чисел $x \in [0;1]$, які є нормальними за Марковим і в яких існує скінченна похідна, є множиною повної міри. Нехай x – одне з такких чисел. Обчислимо похідну функції $MD(x)$:

$$MD^{'}(x) =$$
$$= \lim_{x \to x_0} \frac{MD(x) - MD(x_0)}{x - x_0} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left| MD(\Delta^M_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_{n+1}(x)}) \right|}{\left|\Delta^M_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_{n+1}(x)}\right|} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{q_{\alpha_1}\prod_{j=1}^{n} q_{\alpha_j\alpha_{j+1}}} = \frac{1}{2q_{\alpha_1}} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2q_{00}^{\frac{N_{00}}{n}} q_{01}^{\frac{N_{01}}{n}} q_{10}^{\frac{N_{10}}{n}} q_{11}^{\frac{N_{11}}{n}}} \right)^n =$$
$$= \frac{1}{2q_{\alpha_1}} \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{q_{00}}\right)^{q_0 q_{00}} \cdot \left(\frac{1}{(1-q_{00})}\right)^{q_0 q_{01}} \cdot \left(\frac{1}{(1-q_{11})}\right)^{q_1 q_{10}} \cdot \right.$$
$$\left. \cdot \left(\frac{1}{q_{11}}\right)^{q_1 q_{11}} \right]^n = \frac{1}{2q_{\alpha_1}} \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{q_{00}}\right)^{q_{00}} \cdot \left(\frac{1}{1-q_{00}}\right)^{1-q_{00}} \right)^{q_0} \cdot \right.$$
$$\left. \cdot \left(\left(\frac{1}{q_{11}}\right)^{q_{11}} \cdot \left(\frac{1}{1-q_{11}}\right)^{1-q_{11}} \right)^{q_1} \right]^n .$$

Доведемо, що

$$\left(\left(\frac{1}{q_{00}}\right)^{q_{00}} \cdot \left(\frac{1}{1-q_{00}}\right)^{1-q_{00}} \right)^{q_0} \cdot \left(\left(\frac{1}{q_{11}}\right)^{q_{11}} \cdot \left(\frac{1}{1-q_{11}}\right)^{1-q_{11}} \right)^{q_1} < 2 \qquad (4)$$

Показавши, що

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{x} \cdot \left(\frac{1}{1-x}\right)^{1-x} < 2 \text{ при } x \in (0;1)\,, \qquad (5)$$

матимемо

$$\left(\left(\frac{1}{q_{00}}\right)^{q_{00}}\cdot\left(\frac{1}{1-q_{00}}\right)^{1-q_{00}}\right)^{q_0}\cdot\left(\left(\frac{1}{q_{11}}\right)^{q_{11}}\cdot\left(\frac{1}{1-q_{11}}\right)^{1-q_{11}}\right)^{q_1}<$$
$$< 2^{q_0}\cdot 2^{1-q_0}=2.$$

Нерівність (5) рівносильна до нерівності

$$f(x)\equiv -x\cdot\ln x-(1-x)\cdot\ln(1-x)<\ln 2.$$

Для її доведення зазначимо, що

$$f(x)=f(1-x)\quad\forall\quad x\in(0;1)\,, \tag{6}$$

тому розглядатимемо функцію f для $x:\ 0<x<\frac{1}{2}$.

Оскільки

$$f^{'}(x)=\ln(1-x)-\ln x=\ln\frac{1-x}{x}>0, \tag{7}$$

то f зростає на $\left(0;\frac{1}{2}\right)$. А отже, $f(x)<f\left(\frac{1}{2}\right)=\ln 2$, що й треба було довести.

Тому

$$MD^{'}(x)=\frac{1}{2q_{\alpha_1}}\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{q_{00}}\right)^{q_{00}}\cdot\left(\frac{1}{1-q_{00}}\right)^{1-q_{00}}\right)^{q_0}\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\left(\left(\frac{1}{q_{11}}\right)^{q_{11}}\cdot\left(\frac{1}{1-q_{11}}\right)^{1-q_{11}}\right)^{q_1}\right]^n=0.$$

Оскільки згідно з теоремою 4 множина нормальнних за Марковом чисел є множиною міри 1, то похідна функції $MD(x)$ дорівнює нулю майже скрізь у розумінні міри Лебега, тому за означенням ця функція є сингулярною. Теорему доведено. □

Література

[1] *Працьовитий М. В.* Сингулярні і фрактальні властивості розподілів випадкових величин, цифри поліосновного зображення яких утворюють однорідний ланцюг Маркова // Укр. мат. журн. – 52 (2000). – № 3. – С. 368-374.

[2] *Працьовитий М. В.* Канторовість і фрактальні властивості розподілів випадкових величин, Q-знаки яких утворюють однорідний ланцюг Маркова // Теорія ймовірностей та мат. статистика. – 58 (1998). – С. 139-148.

[3] *Працьовитий М. В.* Фрактальні властивості розподілів випадкових величин, Q-знаки яких утворюють однорідний ланцюг Маркова // Асимптотичний аналіз випадкових еволюцій. – Київ: Ін-т математики АН України, 1994. – С. 245-254.

[4] *Луцак В. В.* Циліндричне марковське зображення дійсних чисел з нескінченним алфавітом та його застосування // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1 : Фізико-математичні науки. — 15 (2013). – С. 188-194.

[5] *Працьовитий О. М.* Про один специфічний спосіб кодування дійсних чисел та його застосування // Студентські фізико-математичні етюди. – №3 (2008). – С. 57-67.

[6] *Турбин А. Ф., Працевитый Н. В.* Фрактальные множества, функции, распределения. – Киев: Наук. думка. – 1992. – 208 с.

[7] *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. – Київ: Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова. – 1998. – 296 с.

[8] *Постников А. Г., Пятецкий И. И.* Нормальная по Маркову последовательность знаков и нормальная цепная дробь, Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1957. – том 21, выпуск 6. – С. 729-746.