Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2017, т. 14, № 4, 19–33

УДК 517.51

С. О. Климчук[1]***, М. В. Працьовитий***[2]

[1]*Інститут математики НАН України, Київ; svetaklymchuk@gmail.com*

[2] *НПУ імені М. П. Драгоманова, Інститут математики НАН України, Київ; prats4444@gmail.com*

Про один клас ніде не монотонних функцій з фрактальними властивостями, який містить підклас сингулярних функцій

We study one class of continuous functions f defined on segment $[0,1]$ by equality

$$f(x)=\delta_{\alpha_1(x)1}+\sum_{k=2}^{\infty}\left[\delta_{\alpha_k(x)k}\prod_{j=1}^{k-1}g_{\alpha_j(x)j}\right]\equiv\Delta^{G_3^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots},$$

where $||q^*_{ik}||$ is given infinite stochastic positive matrix ($i=0,1,2$; $k\in N$); $\beta_{0k}=0$, $\beta_{1k}=q_{0k}$, $\beta_{2k}=q_{0k}+q_{1k}$; (ε_k) is given sequence of numbers such that $0\leqslant\varepsilon_k\leqslant 1$; $g_{0k}=\dfrac{1+\varepsilon_k}{3}=g_{2k}$, $g_{1k}=\dfrac{1-2\varepsilon_k}{3}$, $\delta_{0k}=0$, $\delta_{1k}=g_{0k}$, $\delta_{2k}=g_{0k}+g_{1k}$, $k\in N$.

We found criteria of strict monotonicity, non monotonicity and nowhere monotonicity, non-differentiability and singularity of the functions. We pay attention to properties of level sets of the functions.

Keywords: continuous non monotonic function, singular function, level set of function, differentiability of function, Q_3^*-representation of real number, geometry of Q_3^*-representation, cylinders, sets of Cantor type.

У роботі розглядається клас неперервних функцій f, означених на відрізку $[0;1]$ рівністю

$$f(x)=\delta_{\alpha_1(x)1}+\sum_{k=2}^{\infty}\left[\delta_{\alpha_k(x)k}\prod_{j=1}^{k-1}g_{\alpha_j(x)j}\right]\equiv\Delta^{G_3^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots},$$

де $||q^*_{ik}||$ — нескінченна стохастична додатна матриця ($i=0,1,2$; $k\in N$); $\beta_{0k}=0$, $\beta_{1k}=q_{0k}$, $\beta_{2k}=q_{0k}+q_{1k}$; (ε_k) — задана послідовність чисел, де $0\leqslant\varepsilon_k\leqslant 1$; $g_{0k}=\dfrac{1+\varepsilon_k}{3}=g_{2k}$, $g_{1k}=\dfrac{1-2\varepsilon_k}{3}$, $\delta_{0k}=0$, $\delta_{1k}=g_{0k}$, $\delta_{2k}=g_{0k}+g_{1k}$, $k\in N$.
Встановлено критерії строгої монотонності, немонотонності та ніде не монотонності, недиференційовності й сингулярності таких функцій. Приділяється увага властивостям множин рівнів функції f.
Ключові слова: неперервна ніде не монотонна функція, сингулярна функція, множина рівня функції, диференційовність функції, Q_3^*-зображення дійсного числа, геометрія Q_3^*-зображення, циліндри, множини канторівського типу.

Вступ

Нехай $A_3=\{0,1,2\}$ — алфавіт трійкової системи числення, $L_3=A_3\times A_3\times\ldots$ — простір послідовностей алфавіту, $Q_3^*=\|q_{ik}\|$ — нескінченна додатна стохастична матриця ($i=0,1,2$; $k=1,2,\ldots$), тобто

$$Q_3^*=\begin{pmatrix} q_{01} & q_{02} & \cdots & q_{0k} & \cdots\\ q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1k} & \cdots\\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2k} & \cdots\end{pmatrix},$$

де $q_{ik}>0$, $q_{0k}+q_{1k}+q_{2k}=1$, яка визначає Q_3^*-зображення чисел:

$$[0;1]\ni x=\beta_{\alpha_1(x)1}+\sum_{k=2}^{\infty}\left[\beta_{\alpha_k(x)k}\prod_{j=1}^{k-1}q_{\alpha_j(x)j}\right]\equiv\Delta^{Q_3^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots},$$

де $\beta_{0k}=0$, $\beta_{1k}=q_{0k}=\beta_{0k}+q_{0k}$, $\beta_{2k}=q_{0k}+q_{1k}=\beta_{1k}+q_{1k}$.

Зауважимо, що при $q_i = q_{i1} = q_{i2} = ... = q_{ik} = ...$, де $i \in A_3$, $k \in N$, отримаємо Q_3-зображення, яке визначається трійкою додатних чисел q_0, q_1, q_2, а у випадку $q_0 = q_1 = q_2 = \frac{1}{3}$ — класичне трійкове зображення.

Нехай також задано послідовність дійсних чисел (ε_k), таку, що $0 \leqslant \varepsilon_k \leqslant 1$; нехай $g_{0k} = \dfrac{1+\varepsilon_k}{3} = g_{2k}$, $g_{1k} = \dfrac{1-2\varepsilon_k}{3}$, $k \in N$.

Об'єктом даного дослідження є функція f, означена рівністю

$$f(x) = \delta_{\alpha_1(x)1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left[\delta_{\alpha_k(x)k} \prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j(x)j} \right] \equiv \Delta^{G_3^*}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_k...}, \qquad (1)$$

де $\delta_{0k} = 0$, $\delta_{1k} = g_{0k} = \delta_{0k} + g_{0k}$, $\delta_{2k} = g_{0k} + g_{1k} = \delta_{1k} + g_{1k}$.

Ніде не монотонні функції з фрактальними властивостями вивчались у ряді робіт. Зокрема, у роботі [3] вивчались немонотонні неперервні на відрізку $[0;1]$ функції, похідна яких майже скрізь (у розумінні міри Лебега) дорівнює нулю, визначені в термінах s-кового та його узагальнення — Q_s-зображенння дійсних чисел, досліджувались властивості їхніх графіків. Значна увага приділена функціям, аргумент яких має трійкове та четвіркове зображення. В роботі [6] запропоновано клас неперервних функцій зі складною локальною будовою, визначених у термінах Q_s^*-зображення, властивості яких залежать від заданого скінченного набору дійсних чисел. У роботах [10, 11] досліджувалась сім'я неперервних строго зростаючих сингулярних функцій, залежних від параметра $0 < a < 1$, визначених трійковим зображенням аргументу. Показано, що залежно від значення параметру функція є ніде не диференційовною, недиференційовною майже скрізь (у розумінні міри Лебега), сингулярною тощо.

1. Коректність означення функції

Для обґрунтування коректності означення функції f достатньо довести, що ряд (1) є збіжним за будь–якої послідовності

$(\alpha_n) \in L_3$ і вираз (1) дає однакові значення для різних зображень того самого Q_3^*-раціонального числа.

Оскільки для ряду з модулів можливі співвідношення

$$|\delta_{\alpha_1(x)1}| + \sum_{k=2}^{\infty} |\delta_{\alpha_k(x)k} \prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j(x)j}| \leqslant \frac{2}{3} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 2,$$

то ряд (1) є абсолютно збіжним.

Нехай x — довільна Q_3^*-раціональна точка, яка має такі два зображення: $\Delta^{Q_3^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(0)}$ і $\Delta^{Q_3^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots[\alpha_n-1](2)}$, $\alpha_n \neq 0$. Розглянемо різницю

$$\begin{aligned}
\rho \equiv & f(\Delta^{Q_3^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots[\alpha_n-1](2)}) - f(\Delta^{Q_3^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(0)}) = \\
= & \sum_{k=n}^{\infty} \left[\delta_{\alpha_k(x_2)k} \prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j(x_2)j}\right] - \sum_{k=n}^{\infty} \left[\delta_{\alpha_k(x_1)k} \prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j(x_1)j}\right] \\
= & \prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j j} \big[\delta_{[\alpha_n-1]n} + \delta_{2[n+1]} g_{\alpha_n(x_2)n} + \delta_{2[n+2]} g_{\alpha_n(x_2)n} g_{\alpha_{n+1}(x_2)[n+1]} + \ldots \\
& - \delta_{0[n+1]} g_{\alpha_n(x_1)n} - \delta_{0[n+2]} g_{\alpha_n(x_1)n} g_{\alpha_{n+1}(x_1)[n+1]} - \ldots\big]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= & \prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j j} \big[\delta_{[\alpha_n-1]n} - \delta_{\alpha_n n} + g_{\alpha_n(x_2)n} \big(\delta_{2[n+1]} + \delta_{2[n+2]} g_{\alpha_{n+1}(x_2)[n+1]} + \ldots\big)\big] \\
= & \prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j j} \left[\delta_{[\alpha_n-1]n} - \delta_{\alpha_n n} + g_{\alpha_n(x_2)n} \left(\delta_{2[n+1]} + \sum_{k=2}^{\infty} \delta_{2[n+k]} \prod_{j=1}^{k-1} g_{2[n+j]}\right)\right].
\end{aligned}$$

Оскільки $\delta_{2(n+1)} + \sum\limits_{k=2}^{\infty} \left[\delta_{2(n+k)} \prod\limits_{j=1}^{k-1} g_{2(n+j)}\right] = \Delta^{G_3^*}_{(2)} = 1$, то

$$\rho = \prod_{j=1}^{n-1} g_{\alpha_j j} \left[\delta_{[\alpha_n-1]n} - \delta_{\alpha_n n} + g_{[\alpha_n-1]n}\right].$$

Якщо $\alpha_1 = 1$, то

$$\rho = \prod_{j=1}^{n-1} g_{\alpha_j j}\left[\delta_{0n} - \delta_{1n} + g_{0n}\right] = \prod_{j=1}^{n-1} g_{\alpha_j j}\left[0 - g_{0n} + g_{0n}\right] = 0.$$

Якщо $\alpha_1 = 2$, то

$$\rho = \prod_{j=1}^{n-1} g_{\alpha_j j}\left[\delta_{1n} - \delta_{2n} + g_{1n}\right] = \prod_{j=1}^{n-1} g_{\alpha_j j}\left[g_{0n} - g_{0n} - g_{1n} + g_{1n}\right] = 0.$$

Зважаючи на ці факти, можемо вказати, що функція означена коректно.

2. Множина значень функції

З означення функції отримуємо

$$f(0) = f\left(\Delta^{Q_3^*}_{(0)}\right) = \delta_{01} + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\delta_{0k}\prod_{j}^{k-1} g_{0j}\right) = 0 + \sum_{k=2}^{\infty}\left(0\prod_{j}^{k-1} g_{0j}\right) = 0;$$

$$f(1) = f\left(\Delta^{Q_3^*}_{(2)}\right) = \delta_{21} + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\delta_{2k}\prod_{j}^{k-1} g_{2j}\right) = \frac{2-\varepsilon_1}{3} + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{2-\varepsilon_k}{3}\prod_{j=1}^{k-1}\frac{1+\varepsilon_j}{3}\right).$$

Оцінимо вираз $\frac{2-\varepsilon_1}{3} + \sum\limits_{k=2}^{\infty}\left(\frac{2-\varepsilon_k}{3}\prod\limits_{j=1}^{k-1}\frac{1+\varepsilon_j}{3}\right) = A$. Оскільки $0 \leqslant \varepsilon_n \leqslant 1$, то

$$A \geqslant \frac{2}{3} + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{2}{3}\prod_{j=1}^{k-1}\frac{1}{3} = \frac{2}{3} + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3^{k-1}} = \frac{2}{3} + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{2}{3^k} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + ... = 1;$$

$$A \leqslant \frac{1}{3} + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{3}\prod_{j=1}^{k-1}\frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3} + \frac{2^2}{3^2} + ...\right) = 1.$$

Отже, $f(1) = 1$.

Лема 1. *Функція f, означена рівністю (1), набуває значень з відрізка* $[0; 1]$.

Доведення. Розглянемо частинну суму

$$S_m \equiv \delta_{\alpha_1 1} + \sum_{k=2}^{m} \left[\delta_{\alpha_k(x)k} \prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j(x)j} \right]$$

і доведемо, що $0 \leqslant S_m < 1$, причому $S_m = 0$ тоді і тільки тоді, коли $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$. Для цього скористаємось методом математичної індукції.

При $m = 1$ маємо $S_1 = \delta_{\alpha_1 1}$. Якщо $\alpha_1 = 0$, то $S_1 = 0$, якщо $\alpha_1 \neq 0$, то $0 \leqslant S_1 < 1$ за означенням δ_{i1}, $i = 1, 2$.

При $m = 2$ маємо $S_2 = \delta_{\alpha_1 1} + \delta_{\alpha_2 2} g_{\alpha_1 1}$. Оскільки $\alpha_n \in \{0, 1, 2\}$, то залежно від значень, яких набувають цифри α_1, α_2, матимемо такі значення частинної суми S_2 для кожного з випадків:

$$\alpha_1 = 0: \quad \begin{cases} 0 \text{ при } \alpha_2 = 0, \\ g_{02} g_{01} \text{ при } \alpha_2 = 1, \\ (g_{02} + g_{12}) g_{01}, \alpha_2 = 2. \end{cases} \qquad \alpha_1 = 1: \quad \begin{cases} g_{01} \text{ при } \alpha_2 = 0, \\ g_{01} + g_{02} g_{11} \text{ при } \alpha_2 = 1, \\ g_{01} + (g_{02} + g_{12}) g_{11}, \alpha_2 = 2. \end{cases}$$

$$\alpha_1 = 2: \begin{cases} g_{01} + g_{11} \text{ при } \alpha_2 = 0, \\ g_{01} + g_{11} + g_{02} g_{21} \text{ при } \alpha_2 = 1, \\ g_{01} + g_{11} + (g_{02} + g_{12}) g_{21} \text{ при } \alpha_2 = 2. \end{cases}$$

Очевидно, що у кожному з цих випадків число S_2 є невід'ємним (значення нуля досягається лише, коли $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$) і меншим за 1. Отже,

$$0 \leqslant S_2 = \delta_{\alpha_1 1} + \delta_{\alpha_2 2} g_{\alpha_1 1} < 1.$$

Припустимо, що твердження виконується для $m = n$, тобто $0 \leqslant S_n < 1$, і доведемо, що з цього випливає істинність твердження для $m = n + 1$.

Розглянемо частинну суму

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \delta_{\alpha_1 1} + \sum_{k=2}^{n+1}\left[\delta_{\alpha_k(x)k}\prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j(x)j}\right] \\ &= \delta_{\alpha_1 1} + g_{\alpha_1 1}\left(\delta_{\alpha_2 2} + \sum_{k=3}^{n+1}\left[\delta_{\alpha_k(x)k}\prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j(x)j}\right]\right) \\ &= \delta_{\alpha_1 1} + g_{\alpha_1 1} S'_n, \end{aligned}$$

де $S'_n = \delta_{\alpha_2 2} + \sum\limits_{k=3}^{n+1}\left[\delta_{\alpha_k(x)k}\prod\limits_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j(x)j}\right]$ — частинна сума для набору $(\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{n+1})$.

За припущенням, $0 \leqslant S'_n < 1$, причому $S'_n = 0$ тоді і тільки тоді, коли $\alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_{n+1} = 0$. Якщо $S'_n = 0$, то $1 > S_{n+1} = \delta_{\alpha_1 1} \geqslant 0$ (причому $S_{n+1} = 0$, коли $\alpha_1 = 0$). Якщо $0 < S'_n < 1$, то

$$0 < S_{n+1} < \begin{cases} g_{01}, \ \text{якщо} \ \alpha_1 = 0, \\ g_{01} + g_{11}, \ \text{якщо} \ \alpha_1 = 1, \\ g_{01} + g_{11} + g_{21}, \ \text{якщо} \ \alpha_1 = 2. \end{cases}$$

Таким чином, для довільного $x \in [0;1]$ і $m \in N$ виконується нерівність $0 \leqslant S_m < 1$.

Здійснивши граничний перехід в останній подвійній нерівності, отримуємо $0 \leqslant f(x) = \lim\limits_{m\to\infty} S_m \leqslant 1 = f(1)$. □

3. Неперервність функції

Теорема 2. *Функція f, означена рівністю (1), є неперервною у кожній точці відрізка* $[0;1]$.

Доведення. Для доведення неперервності функції в точці $x_0 = \Delta^{Q_3^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ скористаємось означенням неперервності, а саме: доведемо, що $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x) - f(x_0)| = 0$. Якщо x_0 — Q_3^*–ірраціональна точка, то $x \to x_0$ рівносильне $m \to \infty$, де $\alpha_m(x) \neq \alpha_m(x_0)$, але $\alpha_j(x) = \alpha_j(x_0)$ при $j < m$. Тоді

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) = &\prod_{j=1}^{m-1} g_{\alpha_j(x_0)j} \times \\ &\times \left(\delta_{\alpha_m(x)m} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \left[\delta_{\alpha_k(x)k} \prod_{j=m+1}^{k-1} g_{\alpha_j(x)j} \right] - \right. \\ &\left. - \delta_{\alpha_m(x_0)m} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \left[\delta_{\alpha_k(x_0)k} \prod_{j=m+1}^{k-1} g_{\alpha_j(x_0)j} \right] \right) = \\ &= \prod_{j=1}^{m-1} g_{\alpha_j(x_0)j} \cdot B \to 0 \ \ (m \to \infty), \end{aligned}$$

оскільки $\prod\limits_{j=1}^{m-1} g_{\alpha_j(x_0)j} \to 0$ $(m \to \infty)$, а ряд

$$\delta_{\alpha_m(u)m} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \left[\delta_{\alpha_k(u)k} \prod_{j=m+1}^{k-1} g_{\alpha_j(u)j} \right]$$

є збіжним для $u = x$ і $u = x_0$. Для доведення неперервності f у Q_3^*–раціональній точці x_0 достатньо скористатись тим самим прийомом, але для доведення неперервності зліва варто використовувати зображення числа x_0 з періодом (2), а для доведення неперервності справа – зображенням з періодом (0). □

Наслідок 1. *Множиною значень функції f, означеної рівністю (1), є відрізок* $[0;1]$.

4. Властивості монотонності

Теорема 3. *Приріст $\mu_f(\Delta^{Q_3^*}_{c_1\ldots c_m})$ функції f, означеної на відріз-*

ку $[0;1]$ *рівністю (1), обчислюється за формулою*

$$\mu_f(\Delta^{Q_3^*}_{c_1\ldots c_m}) = \prod_{j=1}^{m} g_{c_j j}.$$

Доведення. Справді,

$$\begin{aligned}\mu_f(\Delta^{Q_3^*}_{c_1 c_2\ldots c_m}) &= f(\Delta^{Q_3^*}_{c_1 c_2\ldots c_m(2)}) - f(\Delta^{Q_3^*}_{c_1 c_2\ldots c_m(0)}) = \\ &\sum_{k=m+1}^{\infty} \delta_{2k} \prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j(x_2)j} - \sum_{k=m+1}^{\infty} \delta_{0k} \prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j(x_1)j} = \\ &\prod_{j=1}^{m} g_{c_j j} \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} \delta_{2k} \prod_{j=1}^{k-1} g_{2j} - \sum_{k=m+1}^{\infty} \delta_{0k} \prod_{j=1}^{k-1} g_{0j} \right) = \\ &\prod_{j=1}^{m} g_{c_j j} \left(\delta_{2(m+1)} + \sum_{k=m+2}^{\infty} \delta_{2k} \prod_{j=m+1}^{k-1} g_{2j} \right) = \prod_{j=1}^{m} g_{c_j j}.\end{aligned}$$

□

Наслідок 2. *Якщо* $\varepsilon_k = \frac{1}{2}$ *для деякого натурального* $k \leqslant m$, *то* $g_{1k} = 0$ *і* $g_{0k} = g_{2k} = \frac{1}{2}$, *а отже, функція* $f(x)$ *є сталою на деякому циліндрі* $\Delta^{Q_3^*}_{c_1 c_2\ldots c_m}$.

Наслідок 3. *Якщо* $0 \leqslant \varepsilon_k < \frac{1}{2}$, *то функція* $f(x)$ *є строго зростаючою на всій області визначення.*

Теорема 4. *Неперервна на* $[0;1]$ *функція* f, *означена рівністю (1), є ніде не монотонною, якщо для будь–якого* $k \in N$ *виконується нерівність* $\frac{1}{2} < \varepsilon_k \leqslant 1$.

Доведення. Оскільки $\varepsilon_k \neq \frac{1}{2}$, то $g_{0k} g_{1k} g_{2k} \neq 0$, отже, функція f не має проміжків сталості. Припустимо, що існує інтервал

$(a;b) \subset [0;1]$ монотонності функції f. Оскільки завжди існує циліндр $\Delta^{Q_3^*}_{c_1\ldots c_m} \subset (a;b)$, то він є проміжком монотонності f. Оскільки $g_{0k}g_{1k}g_{2k} \neq 0$, то $\mu_f(\Delta^{Q_3^*}_{c_1c_2\ldots c_m}) = \prod\limits_{j=1}^{m} g_{c_j j} \neq 0$ і

$$\mu_f(\Delta^{Q_3^*}_{c_1c_2\ldots c_m 0})\mu_f(\Delta^{Q_3^*}_{c_1c_2\ldots c_m 1})\mu_f(\Delta^{Q_3^*}_{c_1c_2\ldots c_m 2}) < 0,$$

тобто на циліндрі $\Delta^{Q_3^*}_{c_1c_2\ldots c_m 1}$ функція f має від'ємний приріст, а на циліндрах $\Delta^{Q_3^*}_{c_1c_2\ldots c_m 0}$ і $\Delta^{Q_3^*}_{c_1c_2\ldots c_m 2}$ — додатний, а це суперечить її монотонності на циліндрі $\Delta^{Q_3^*}_{c_1c_2\ldots c_m}$. $\square$

5. Ознаки ніде не монотонності, канторовості

Якщо $\varepsilon_n = \dfrac{1}{2}$, то функція $f(x)$ є сталою на циліндричному інтервалі $\nabla^{Q_3^*}_{c_1\ldots c_{m-1}1}$, де $c_i \in V$, $i = 0, 1, ..., m-1$, $m \in N$, суміжному з множиною $C[Q_3^*, V]$.

Оскільки для довільного x з цього інтервалу $\alpha_m(x) = 2$, то

$$\prod_{j=1}^{m} g_{\alpha_j j}(x) = 0,$$

і з цього випливає, що

$$f(x) = \delta_{\alpha_1(x)1} + \delta_{\alpha_2(x)2} g_{\alpha_1(x)1} + ... + \delta_{\alpha_{m-1}(x)[m-1]} \prod_{j=1}^{m-2} g_{\alpha_j(x)j} +$$
$$+ 0 \cdot \prod_{j=1}^{m-1} g_{\alpha_j(x)j} + 0 = const,$$

тобто f є сталою на цьому інтервалі.

Сума довжин усіх інтервалів $\nabla^{Q_3^*}_{c_1...c_{m-1}1}$, суміжних з множиною $C[Q_3^*, V]$, де $c_i \in V$, $i = 0, 1, ..., m-1$, $m \in N$, дорівнює 1. Справді,

$$S = |\Delta^{Q_3^*}_1| + \sum_{c_1 \in V} |\Delta^{Q_3^*}_{c_1 1}| + \sum_{c_1 \in V} \sum_{c_2 \in V} |\Delta^{Q_3^*}_{c_1 c_2 1}| + ... = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2^2}{3^3} + ... = 1.$$

Функція f є сталою на кожному з інтервалів $\nabla^{Q_3^*}_{c_1...c_{m-1}1}$, $c_i \in V$, $i = 0, 1, ..., m-1$, $m \in N$, тому має на кожному з них похідну, яка дорівнює 0. Отже, вона є сингулярною.

6. Екстремуми функції

Позначимо приріст μ_f функції f на циліндрі $\Delta^{Q_3^*}_{c_1...c_m}$ через μ_m, тобто

$$\mu_m = \mu_f(\Delta^{Q_3^*}_{c_1...c_m}) = \prod_{j=1}^{m} g_{c_j j}(x).$$

Лема 5. *Функція f на циліндрі $\Delta^{Q_3^*}_{c_1...c_m}$ набуває найбільшого і найменшого значень на його кінцях. Причому, якщо*

$$\mu_m > 0, \text{ то } \max f(x) = f(\Delta^{Q_3^*}_{c_1...c_m(2)}), \min f(x) = f(\Delta^{Q_3^*}_{c_1...c_m(0)}).$$

Якщо ж

$$\mu_m < 0, \text{ то } \max f(x) = f(\Delta^{Q_3^*}_{c_1...c_m(0)}), \min f(x) = f(\Delta^{Q_3^*}_{c_1...c_m(2)}).$$

Доведення. Оскільки циліндр $\Delta^{Q_3^*}_{c_1...c_m}$ є відрізком $[\Delta^{Q_3^*}_{c_1...c_m(0)}; \Delta^{Q_3^*}_{c_1...c_m(2)}]$, то значення функції f у довільній точці $x \in \Delta^{Q_3^*}_{c_1...c_m}$ можна подати у формі

$$f(x) = f(\Delta^{Q_3^*}_{c_1...c_m(0)}) + \mu_m \cdot f(\Delta^{Q_3^*}_{\alpha_{m+1}\alpha_{m+2}...\alpha_{m+n}...}).$$

Якщо $\alpha_{m+j} = 0$ для всіх $j \in N$, то $f(\Delta^{Q_3^*}_{\alpha_{m+1}\alpha_{m+2}\ldots\alpha_{m+n}\ldots}) = 0$. Якщо ж $\alpha_{m+j} = 2$ для всіх $j \in N$, то $f(\Delta^{Q_3^*}_{\alpha_{m+1}\alpha_{m+2}\ldots\alpha_{m+n}\ldots}) = 1$. Тоді при $\mu_m > 0$

$$\max_{x \in \Delta^{Q_3^*}_{c_1\ldots c_m}} f(x) = f(\Delta^{Q_3^*}_{c_1\ldots c_m(2)}), \quad \min_{x \in \Delta^{Q_3^*}_{c_1\ldots c_m}} f(x) = f(\Delta^{Q_3^*}_{c_1\ldots c_m(0)}),$$

а при $\mu_m < 0$

$$\max_{x \in \Delta^{Q_3^*}_{c_1\ldots c_m}} f(x) = f(\Delta^{Q_3^*}_{c_1\ldots c_m(0)}), \quad \min_{x \in \Delta^{Q_3^*}_{c_1\ldots c_m}} f(x) = f(\Delta^{Q_3^*}_{c_1\ldots c_m(2)}).$$

□

7. Властивості графіка Γ_f функції

Теорема 6. *Якщо* $\varepsilon_n = const$, *і* $\prod\limits_{i=0}^{2} g_i \neq 0$, *то графік функції* f *і його частина* $\Gamma^i_f \equiv \{(x;y) : x \in \Delta^{G_3^*}_i, y = f(x)\}$ *афінно-еквівалентні, причому* $\Gamma^i_f = \phi_i(\Gamma_f)$, *де*

$$\phi_i : \begin{cases} x' = q_i x + \beta_i, \\ y' = g_i y + \delta_i, \quad i \in \{0,1,2\} \end{cases}$$

Доведення. Для доведення теореми покажемо, що $\Gamma^i_\phi \subset \phi_i(\Gamma_f)$ і $\phi_i(\Gamma_f) \subset \Gamma^i_\phi$.

Нехай $M(x;y) \subset \Gamma^i_f$, тобто

$$x = \Delta^{Q_3}_{i\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}, \text{ і } y = \delta_i + g_i\left(\delta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\delta_{\alpha_k}\prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j}\right)\right).$$

Розглянемо точку $M_0(x_0;y_0)$ на графіку Γ_f, де

$$x_0 = \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}, \text{ і } y_0 = \delta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\delta_{\alpha_k}\prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j}\right).$$

Її образ $\phi_i(M_0) = M$, тому $M \in \Gamma_f$.

Нехай $M'(x'; y')$ є образом точки $M(x; y)$ при афінному перетворенні ϕ_i, тобто

$$x = \Delta^{Q_3}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}, \text{ і } y = \delta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\delta_{\alpha_k}\prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j}\right),$$

а

$$x' = \Delta^{Q_3}_{i\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}, \text{ і } y' = \delta_i + g_i\left(\delta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\delta_{\alpha_k}\prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j}\right)\right).$$

Звідси випливає, що $M' \in \Gamma^i_f$, а отже, $\phi_i(\Gamma_f) \subset \Gamma^i_f$. Таким чином, $\Gamma^i_f = \phi_i(\Gamma_f)$. □

8. Рівні функції

Нагадаємо, що множиною рівня y_0 функції f називається множина

$$f^{-1}(y_0) = \{x : f(x) = y_0\}.$$

Якщо $0 \leqslant \varepsilon_n < \frac{1}{2}$ для всіх $n \in N$, то функція f є строго зростаючою, тому кожен її рівень складається з однієї точки.

Якщо $\varepsilon_n = \frac{1}{2}$, то $g_{1n} = 0$ для всіх $n \in N$ і кожен рівень функції f завдяки її неперервності є або точкою, або відрізком.

Якщо $\frac{1}{2} < \varepsilon_n \leqslant 1$, то $g_{1n} < 0$ і кожен рівень функції f є зліченною множиною. Справді, в силу того, що прирости функції f на циліндрах $\Delta^{Q_3^*}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_i(x)}$ рангу i та $\Delta^{Q_3^*}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_i(x)\alpha_{i+1}(x)}$ рангу $i+1$ мають протилежні знаки і, враховуючи неперервність функції f, пряма $y = y_0$ перетинає графік функції f принаймні у двох точках, які належать циліндру $\Delta^{Q_3^*}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_i(x)}$ і не належать циліндру $\Delta^{Q_3^*}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_i(x)\alpha_{i+1}(x)}$. Отже, рівень $f^{-1}(y_0)$ є зліченною множиною. Континуальним він бути не може, оскільки множина локальних максимумів і мінімумів злічення.

Література

[1] *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. – 1998. – 296 с.

[2] *Турбин А. Ф., Працевитый Н. В.* Фрактальные множества, функции, распределения. – Киев: Наук. думка. – 1992. – 208 с.

[3] *Працьовитий М. В.* Ніде не монотонні сингулярні функції // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. – 2011, №12. – С. 24-36.

[4] *Працьовитий М. В.* Фрактальні властивості однієї неперервної, ніде не диференційовної функції // Наукові записки НПУ імені М. П. Драгоманова. Фізико-математичні науки. – № 3, 2002. – С. 327-338.

[5] *Працевитый Н. В.* Непрерывные канторовские проекторы // Методы исследования алгебраических и топологических структур. — Киев: КГПИ, 1989. – С. 95-105.

[6] *Працьовитий М. В., Свинчук О. В.* Сингулярні немонотонні функції, визначені в термінах Q_s^*–зображення аргумента // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. – 2013, № 15. – С. 144-155.

[7] *Працьовитий М. В., Василенко Н. А.* Одна сім'я неперервних ніде не монотонних функцій з фрактальними властивостями // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. – 2013, № 14. – С. 174-186.

[8] *Калашніков А. В., Працьовитий М. В.* Самоафінні сингулярні та ніде не монотонні функції, пов'язані з Q-зображенням дійсних чисел // Укр. мат. журн. – 2013. – 65, № 3. – С. 405-417.

[9] *Марсалья Д.* Случайные величины с независимыми двоичными цифрами // Кибернет. сб. – 1983. – № 20. – С. 216-224

[10] *Okamoto H.* A remark on continuous, nowhere differentiable functions // Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. – 2005, Vol. 81, № 3. – P. 47-50.

[11] *Okamoto H., Wunsh M.* A geometric construction of continuous strictly increasing singular functions // Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. – 2007, Vol. 83, № 7. – P. 114-118.

[12] *Marsalia G.* Random variables with independent binary digits // Ann. Math. Statist. – 1971. – Vol. 42, № 2. – P. 1922-1929.

[13] *Salem R.* On some singular monotonic functions which are strictly increasing // Trans. Amer. Math. Soc. – 1943, № 53. – P. 427-439.

[14] *Takacs L.* An increasing continuous singular function // The American Math. Monthly. – 1978, № 85. – P. 35-37.

[15] *Zamfirescu T.* Most monotone functions are singular // Amer. Math. Mon. – 1981, № 88. – P. 47-49.