

Виявлення рухомого об'єкту, що перебуває у зоні пошуку протягом випадкових проміжків часу

Л. М. Шлепаков

Інститут математики НАН України, Київ; lshlepak@imath.kiev.ua

We study the problem on the target detection in the case when this target is assumed to be present in the search region for a random amount of time and moves independent of the detection system. To find the target's detection probability we develop a random process by using the Markov recovery function corresponding to the semi Markov kernel.

Исследуется проблема обнаружения объекта, находящегося в зоне (области) поиска в течение случайных промежутков времени. Задача поиска рассматривается с независимым объектом и поисковой системой. Для нахождения вероятности обнаружения объекта в течение заданного времени построен случайный процесс при помощи функции марковского восстановления, однозначно связанный с полумарковским ядром.

Розглядається задача пошуку, коли об'єкт та пошукова система діють незалежно. Для опису функціонування системи пошуку використовується випадковий процес, який не переривається у момент першого виявлення об'єкту, навіть якщо шукана характеристика пов'язана саме з цим моментом.

Нехай об'єкт то з'являється, то зникає в деякій випадковим чином обраній точці зони пошуку — відкритій області $X \subset \mathbf{R}^n$. Задано щільність розподілу $U(x)$ точки, в якій об'єкт "пульсує", за умови, що цей об'єкт то з'являється, то зникає в точці x із ймовірністю $\beta(x)$ у моменти $0, T(x), \lambda T(x), \dots$ і перебуває в тій же точці x протягом проміжку часу $\Delta(x)$, а потім знову зникає із зони пошуку до наступної

появи у даній точці, де $U(x)$, $\Delta(x)$, $\beta(x)$ — задані кусково-неперервні на X функції, $\Delta(x) \leq T(x)$.

Виявлення об'єкту здійснюється великою пошуковою системою у задані проміжки часу t_0 таким чином, що дію окремих пошукових одиниць можна описати за допомогою функції $\lambda(x, t) : X \times \mathbf{R}^1 \rightarrow \mathbf{R}^1$ — стратегії пошуку [1]. Припустимо, що процес пошуку не припинено в момент першого виявлення об'єкту, а дії пошукової системи заздалегідь запрограмовано на час t_0 . З урахуванням цієї особливості стратегія пошуку буде визначатися функцією $\lambda(x, t) : X \times R \rightarrow R$ з такими властивостями:

- 1) $\lambda(x, t) \geq 0$ для всіх $x \in X$, $t \geq 0$;
- 2) $\int_X \lambda(x, t) dx = L(t)$, $L(t)$ — кусково-неперервна функція, $t \geq 0$;
- 3) $\lambda(x, t)\Delta t + o(\Delta t)$ — ймовірність того, що протягом проміжку часу $(t, t + \Delta t)$ було хоча б одне виявлення об'єкту за умови, що він перебуває в точці x у момент t . Ця ймовірність не залежить від поведінки об'єкту впродовж попередніх проміжків часу та здійснених раніше пошукових дій.

Потрібно знайти ймовірність $C(t_0)$ виявлення об'єкту впродовж даного часу t_0 .

Функціонування системи пошуку опишемо стрибкоподібним випадковим процесом $\xi(t)$, $t \geq 0$, з фазовим простором (X, \mathbf{B}) , де \mathbf{B} — σ -алгебра борелівських множин на X .

Процес $\xi(t)$ потрапляє у стан $x \in X$ за таких умов:

- у нульовий момент часу, якщо x — точка знаходження об'єкту у зоні пошуку;
- у момент виявлення об'єкту в точці x .

Час перебування у певному стані триває до чергового моменту виявлення об'єкту.

Початковою умовою будемо вважати

$$P\{\xi(0) \in B\} = \int_B U(x) dx. \quad (1)$$

Лема 1. Процес $\xi(t)$ є неоднорідним за часом напівмарковським із щільністю функції марковського відновлення, яка задана співвід-

ношеннями

$$h(0, t, x, B) = \begin{cases} P(x, t)\lambda(x, t)\beta(x), & \text{якщо } x \in B, \\ 0, & \text{якщо } x \notin B, \end{cases} \quad (2)$$

$$h(\tau, t, x, B) = \begin{cases} \lambda(x, t), & \text{якщо } x \in B, \\ & \exists n : \tau, t \in [nT(x), nT(x) + \Delta(x)], \\ P(x, t)\lambda(x, t)\beta(x), & \text{якщо } x \in B, \\ & \beta(x), \tau, t \in [nT(x), nT(x) + \Delta(x)], \\ 0 & \text{— у інших випадках,} \end{cases} \quad (3)$$

де $0 < \tau < t$, $x \in X$, $B \in \mathbf{B}$,

$$P(x, t) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } t \in \bigcup_{n=0}^{\infty} [nT(x), nT(x) + \Delta(x)], \\ 0 & \text{— у іншому випадку.} \end{cases} \quad (4)$$

Доведення. Час перебування процесу $\xi(t)$ у кожному із введених станів за умовами постановки задачі залежить від моменту потрапляння у відповідний стан та не залежить від попередньої еволюції процесу. Крім того, із стану x можливий перехід тільки у той же стан x . Таким чином, відповідна послідовність $\{\xi_n, \tau_n : n \geq 0\}$ є двовимірним ланцюгом Маркова. Визначимо процес $\xi(t)$ із щільністю функції марковського відновлення, однозначно пов'язаний із напівмарковським ядром, таким чином:

$$h(\tau, t, x, B) = q(\tau, t, x, B) + \int_0^t ds \int_X q(\tau, t, x, dy)h(s, t, y, B),$$

$$t \geq \tau, x \in X, B \in \mathbf{B}.$$

Доведемо співвідношення (3). Якщо відомо, що в момент $\tau > 0$ у точці x було виявлено об'єкт, то для моменту $t > \tau$, який належить тому ж періоду неперервного перебування об'єкту в точці x , одержимо $h(\tau, t, x, \{x\}) = \lambda(x, t)$. Для решти $t > \tau$ будемо мати $h(\tau, t, x, \{x\}) = P(x, t)\lambda(x, t)\beta(x)$, оскільки впродовж періоду свого перебування у зоні пошуку ціль з'являється із ймовірністю $\beta(x)$.

Нехай $P(x, t)$ — ймовірність того, що у момент t об'єкт перебуває в зоні пошуку за умови, що x — точка ймовірного перебування об'єкту в зоні пошуку. Очевидно, що співвідношення (4) справджуються.

Співвідношення (2) з початковими умовами (1) доводимо аналогічно доведенню (3).

Введемо такі позначення :

$$W(B, t) = P\{\xi_1 \in B, \tau_1 \leq t\}. \quad (5)$$

Тоді $W(B, t) = \int_X U(y)Q(0, t, y, B)dy$. Припустимо, що функція $W(B, t)$ має щільність $q(x, t)$, тобто

$$W(B, t) = \int_0^t \int_B q(x, s)dxds. \quad (6)$$

Лема 2. *Справедливим є інтегральне рівняння Вольтерра*

$$U(x)h(0, t, x, \{x\}) = q(x, t) + \int_0^t q(x, s)h(s, t, x, \{x\})ds. \quad (7)$$

Доведення. Проведемо доведення для першого стрибка процесу $\xi(t)$ з такими початковими умовами: $P\{\xi_0 \in B\} = \int_B U(x)dx$, $\tau_0 = 0$.

Ймовірність того, що у нескінченно малому проміжку $(t, t+dt)$, $t < 0$, процес $\xi(t)$ потрапив у множину $B \in \mathbf{B}$, дорівнює

$$\int_B U(x)h(0, t, x, \{x\})dxdt,$$

а це є сума ймовірності того, що у множину B відбувся перехід із початкового стану, тобто $\tau_1 \in (t, t+dt)$, та ймовірності того, що відбувся не перший перехід процесу $\xi(t)$. Перший доданок суми з урахуванням (5), (6) дорівнює $\int_B q(x, t)dxdt$. За умови, що перший перехід стався у

момент s в один із станів $y \in X$, тобто $\tau_1 = s$, $\xi_1 = y$, ймовірність того, що протягом нескінченно малого проміжку часу $(t, t+dt)$ процес потрапив у множину B , дорівнює $h(s, t, y, B)dt$. Інтегруючи отриману умовну ймовірність з допомогою відповідної міри із щільністю $q(y, s)$, отримаємо другий доданок суми.

Таким чином, справедливим є рівняння

$$\int_B U(x)h(0, t, x, \{x\})dxdt = \int_B q(x, t)dxdt + \int_0^t \int_X q(y, s)h(s, t, y, B)dydsdt.$$

Враховуючи те, що з леми 2 випливає співвідношення $h(s, t, x, \{x\}) = 0$ для $y \neq x$, отримуємо рівняння (7).

Теорема. *Справедливим є співвідношення*

$$C(t_0) = \int_X V(x, t_0)dx, \quad (8)$$

де функція $V(x, t)$ обчислюється за рекурентною формулою

$$V(x, t) = V(x, nT(x)) + \beta(x) \left[1 - e^{-G(nT(x), t)} \right] [U(x) - V(x, nT(x))],$$

$$nT(x) \leq t \leq (n+1)T(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad V(x, 0) = 0, \quad (9)$$

$$G(a, t) = \int_a^t P(x, s)\lambda(x, s)ds.$$

Доведення. Підставимо в рівняння (7) значення функції h із (2), (3). Використовуючи позначення $V(x, t) = \int_0^t q(x, s)ds$, отримуємо ланцюжок диференціальних рівнянь

$$U(x)P(x, t)\lambda(x, t)\beta(x) = \frac{dV(x, t)}{dt} + V(x, nT(x))P(x, t)\lambda(x, t)\beta(x) + [V(x, t) - V(x, nT(x))]P(x, t)\lambda(x, t),$$

$$nT(x) \leq t \leq (n+1)T(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Кожне з рівнянь цього ланцюжка — лінійне диференціальне рівняння першого порядку стосовно $V(x, t)$, $nT(x) \leq t \leq (n+1)T(x)$. Для заданого $V(x, nT(x))$ єдиний розв'язок рівняння має вигляд (9). Із співвідношень (5), (6) та того, що момент першого виявлення об'єкту в термінах процесу $\xi(t)$ є моментом виходу з початкового стану, випливає (8).

Наслідок 1. Якщо $\beta(x) = 1$, $x \in X$, то

$$C(t_0) = 1 - \int_X dx U(x) e^{-G(0,t_0)}. \quad (10)$$

Доведення проводиться безпосередньо підстановкою $\beta(x)$, $x \in X$ у (8) та (9).

Для вибору оптимальної стратегії пошуку у випадку, розглянутому в наслідку 1, тобто для знаходження функції $\lambda(x, t)$, яка задовольняє умови 1)–3) і така, що

$$C(t_0) = 1 - \int_X dx U(x) e^{-G(0,t_0)}$$

приймає максимальне значення, можна також використати відомі результати для нерухомого об'єкту.

Наслідок 2. Якщо $\beta(x) = 1$, $\Delta(x) = T(x)$, $x \in X$, то об'єкт буде нерухомим і співвідношення (10) збігається з результатами, широко відомими в теорії пошуку.

Оптимальна стратегія пошуку для цього випадку є предметом вивчення у роботах [1,2]. Побудову моделей для оптимального селективного пошуку сигналів у багатоканальних системах зв'язку з використанням методів теорії марковських та напівмарковських випадкових процесів досліджено у роботі [3].

- [1] Хеллман О. Введение в теорию оптимального поиска. — М.: Наука, 1985. — 248 с.
- [2] De Guenin, J. Optimum distribution of effort: an extension of the Koopman Basic Theory // Oper. Research. — 1969. — 9. — P. 1–7.
- [3] Шлепаков Л. Н., Вовкодав Н. Г. Оптимальный поиск движущихся объектов в дискретной области // Праці Ін-ту математики НАН України. — 2008. — 79. — 144 с.