Збірник праць Інституту математики НАН України 2019, т. 16, № 2, 121–139

УДК 517.2+517.51

Узагальнення класичної похідної й аналог оператора диференціювання як інструментарій для вивчення диференціальних властивостей функцій

Р. Ю. Осауленко

Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”, Київ;
RomanOsaulenko@gmail.com

In this paper, we consider a (u,v)–derivative that is a generalization of a classical derivative and an operator defined by the equality $\boxtimes^{\mathsf{u}}_{\mathsf{v}} f(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\square^{\mathsf{u}}_{\mathsf{v}} f(x)}{\square^{\mathsf{u}}_{\mathsf{v}} x}$, where $\square^{\mathsf{u}}_{\mathsf{v}} f(x)$ is the oscillation of the function f on the interval with the ends at the points $x + \mathsf{u}(h)$, $x - \mathsf{v}(h)$, functions $\mathsf{u}(h)$, $\mathsf{v}(h)$ are infinitely small at zero, such that for all h from it the inequalities $\mathsf{u}(h) \neq -\mathsf{v}(h)$, $\mathsf{u}(h)\cdot\mathsf{v}(h) \geq 0$ holds for a punctured neighbourhood of zero. Their properties and relationships with the classical derivative are described. Their application for the derivation of differential properties is presented by the example of a model class of nowhere monotone functions.

Розглядається (u,v)–похідна, що є узагальненням класичної похідної, й оператор $\boxtimes^{\mathsf{u}}_{\mathsf{v}}$, означений рівністю $\boxtimes^{\mathsf{u}}_{\mathsf{v}} f(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\square^{\mathsf{u}}_{\mathsf{v}} f(x)}{\square^{\mathsf{u}}_{\mathsf{v}} x}$, де $\square^{\mathsf{u}}_{\mathsf{v}} f(x)$ – коливання функції f на відрізку з кінцями в точках $x + \mathsf{u}(h)$, $x - \mathsf{v}(h)$, функції $\mathsf{u}(h)$, $\mathsf{v}(h)$ є нескінченно малими в нулі, такі, що для всіх h із деякого проколотого околу нуля справедливі нерівності $\mathsf{u}(h) \neq -\mathsf{v}(h)$, $\mathsf{u}(h)\cdot\mathsf{v}(h) \geq 0$. Продемонстровано застосування цих понять для вивчення диференціальних властивостей ніде не монотонних функцій із модельного класу.

Вступ

Останнім часом інтерес до неперервних функцій із "неоднорідною", "іррегулярною" локально складною структурою, всюди щільними некомпактними множинами особливостей різного роду, складними фрактальними й варіаційними властивостями суттєво зріс [2–4, 8–13]. Він посилюється не лише з теоретичної точки зору, а й різноплановими застосуваннями, зокрема в задачах аналізу й синтезу антен [5], аналізу сигналів [5], задачах теорії фінітного управління розподіленими системами [1]. До таких функцій передусім залічують ніде не монотонні, ніде не диференційовні, а також сингулярно неперервні функції (як обмеженої, так і необмеженої варіації). Відомості про останні вичерпуються лише окремими прикладами, нам відомо лише кілька джерел, у яких вони фігурують [1, 9]. Водночас відомі й новостворені системи кодування дійсних чисел засобами скінченного й нескінченного, сталого і змінного алфавітів дозволяють ефективно задавати й вивчати потужні класи вказаних функцій. Для детального вивчення їхніх диференціальних властивостей потрібен гнучкіший інструмент, аніж класична похідна. З цією метою ми пропонуємо її узагальнення й аналог оператора диференціювання.

1 (u, v) – похідна і її властивості

(u, v) – похідна разом із її властивостями і прикладами застосування була представлена у [7]. В цьому пункті наведено основні факти.

У роботі розглядаються дійсні функції дійсної змінної.

Позначимо через $\mathcal{P}$ множину всіх пар (u, v) нескінченно малих у нулі функцій, для кожної з яких існує таке число $\delta > 0$, що для всіх $h \in O^*_\delta$ справедлива нерівність $\mathsf{u}(h) \neq -\mathsf{v}(h)$, де O^*_δ – проколений δ-окіл нуля.

Прикладами пар функції (u, v) є $\left(ah\texttt{Sign}\left(\sin\frac{1}{h}\right), h\mathcal{D}(h)\right)$, $\left(\left[h^{-1}\right]^{-1}, h\right)$, де $\mathbb{R} \ni |a| \neq 1$, $\mathcal{D}(h) = \begin{cases} 0, & h \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}; \\ 1, & h \in \mathbb{Q}; \end{cases}$, $\texttt{Sign}\,(h) = \begin{cases} h/|h|, & h \neq 0; \\ 0, & h = 0; \end{cases}$ а $[x]$ – ціла частина числа.

Нехай $\Delta^{\mathsf{u}(h)}_{\mathsf{v}(h)} x := \mathsf{u}(h) + \mathsf{v}\,(h)$, $\Delta^{\mathsf{u}(h)}_{\mathsf{v}(h)} f(x_0) := f\big(x_0 + \mathsf{u}(h)\big) - f\big(x_0 - \mathsf{v}\,(h)\big)$. Якщо для наперед заданих у деякому околі x_0 функції f та пар функцій $(\mathsf{u};\mathsf{v}) \in \mathcal{P}$ існує границя (скінченна чи нескінченна)

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta_{\mathsf{v}(h)}^{\mathsf{u}(h)} f(x_0)}{\Delta_{\mathsf{v}(h)}^{\mathsf{u}(h)} x} = \lim_{h\to 0} \frac{f\big(x_0 + \mathsf{u}\,(h)\,\big) - f\big(x_0 - \mathsf{v}\,(h)\,\big)}{\mathsf{u}(h) + \mathsf{v}(h)},$$

то її значення називається (u,v)-*похідною функції* f *в точці* x_0 і позначається $\mathfrak{D}_{\mathsf{v}}^{\mathsf{u}} f(x_0)$.

Зазначимо, що у випадку, коли $\mathsf{u}(h) = h$, $\mathsf{v}(h) = 0$, отримуємо класичне означення похідної. Якщо ж $\mathsf{u}(h) = \mathsf{v}(h) = h$, то маємо означення симетричної похідної.

Обравши нескінченно малу числову послідовність (a_n), і взявши за $\mathsf{u}(h) = a_n$ при $h \in \big(2^{-n-1}; 2^{-n}\big]$, $\mathsf{v}(h) = 0$, отримаємо значення $\mathfrak{D}_{\mathsf{v}}^{\mathsf{u}} f(x_0)$, яке дорівнює похідному числу для послідовності (a_n).

Надалі $\mathsf{u} = \mathsf{u}(h)$, $\mathsf{v} = \mathsf{v}(h)$.

Лема 1.1. *Якщо в точці x функція f має скінченну (u,v)-похідну, то*

$$\lim_{h\to 0} \Delta_{\mathsf{v}}^{\mathsf{u}} f(x) = 0. \tag{1}$$

Теорема 1.1. *Нехай A, B – довільні дійсні числа і в околі точки x задано функції f і g такі, що для пари функцій $(\mathsf{u},\mathsf{v}) \in \mathcal{P}$ існують $\mathfrak{D}_{\mathsf{v}}^{\mathsf{u}} f(x)$ і $\mathfrak{D}_{\mathsf{v}}^{\mathsf{u}} g(x)$. Тоді*

- $\mathfrak{D}_{\mathsf{v}}^{\mathsf{u}}\Big(Af + Bg\Big)(x) = A\mathfrak{D}_{\mathsf{v}}^{\mathsf{u}} f(x) + B\mathfrak{D}_{\mathsf{v}}^{\mathsf{u}} g(x)$;
- $\mathfrak{D}_{\mathsf{v}}^{\mathsf{u}}\Big(fg\Big)(x) = \lim\limits_{h\to 0} f\big(x + \mathsf{u}(h)\big) \cdot \mathfrak{D}_{\mathsf{v}}^{\mathsf{u}} g(x) + \lim\limits_{h\to 0} g(x + \mathsf{u}(h)) \cdot \mathfrak{D}_{\mathsf{v}}^{\mathsf{u}} f(x)$ *при* $\lim\limits_{h\to 0} f(x + \mathsf{u}(h)) \in \mathbb{R} \ni \lim\limits_{h\to 0} g(x + \mathsf{v}(g))$;
- $\mathfrak{D}_{\mathsf{v}}^{\mathsf{u}}\left(\frac{1}{f}\right)(x) = -\mathfrak{D}_{\mathsf{v}}^{\mathsf{u}} f(x) \cdot \lim\limits_{h\to 0} f^{-2}(x + \mathsf{u}(h))$ *при* $f(x) \neq 0 \neq$ $\neq \lim\limits_{h\to 0} f(x + \mathsf{u}(h))$.

Зауваження 1.1. Якщо функції f, g в теоремі 1.1 є неперервними, то

- $\mathfrak{D}_{\mathsf{v}}^{\mathsf{u}}\Big(Af + Bg\Big)(x) = A\mathfrak{D}_{\mathsf{v}}^{\mathsf{u}} f(x) + B\mathfrak{D}_{\mathsf{v}}^{\mathsf{u}} g(x)$.
- $\mathfrak{D}_{\mathsf{v}}^{\mathsf{u}}\Big(fg\Big)(x) = f(x)\mathfrak{D}_{\mathsf{v}}^{\mathsf{u}} g(x) + g(x)\mathfrak{D}_{\mathsf{v}}^{\mathsf{u}} f(x)$.
- $\mathfrak{D}_{\mathsf{v}}^{\mathsf{u}}\left(\frac{1}{f}\right)(x) = -\mathfrak{D}_{\mathsf{v}}^{\mathsf{u}} f(x) \cdot f^{-2}(x)$ при $f(x) \neq 0$.

1.1 Зв'язок (u,v)-похідної зі класичною похідною

Нехай

$$\mathcal{P}^* = \left\{ (\mathsf{u},\mathsf{v}) \in \mathcal{P} : \varlimsup_{h\to 0} \left| \frac{\mathsf{u}(h)}{\mathsf{u}(h)+\mathsf{v}(h)} \right| < \infty \right\},$$

$$\mathcal{P}^+ = \left\{ (\mathsf{u},\mathsf{v}) \in \mathcal{P} : \mathsf{u}\cdot\mathsf{v} \geq 0, \forall h \in O\left(\mathsf{u},\mathsf{v}\right) \right\},$$

$$\mathcal{P}^- = \left\{ (\mathsf{u},\mathsf{v}) \in \mathcal{P} : \mathsf{u}\cdot\mathsf{v} < 0, \forall h \in O\left(\mathsf{u},\mathsf{v}\right) \right\},$$

де $O\left(\mathsf{u},\mathsf{v}\right)$ – деякий проколотий окіл нуля, в кожній точці якого функції u, v є визначеними і виконується нерівність $\mathsf{u}(h) \neq -\mathsf{v}(h)$ для будь-якого $h \in O\left(\mathsf{u},\mathsf{v}\right)$. Покажемо, що $\mathcal{P}^+ \subset \mathcal{P}^*$. По-перше, якщо $\mathsf{u}(h) = 0$, то $\varlimsup\limits_{h\to 0} \left| \frac{\mathsf{u}(h)}{\mathsf{u}(h)+\mathsf{v}(h)} \right| = 0$. При $\mathsf{u}(h) \neq 0$, враховуючи те, що $\mathsf{u}(h)\cdot\mathsf{v}(h) \geq 0$, а отже, $\frac{\mathsf{v}(h)}{\mathsf{u}(h)} \geq 0$, маємо

$$\varlimsup_{h\to 0} \left| \frac{\mathsf{u}(h)}{\mathsf{u}(h)+\mathsf{v}(h)} \right| = \varlimsup_{h\to 0} \left| \frac{1}{1+\frac{\mathsf{v}(h)}{\mathsf{u}(h)}} \right| \leq 1.$$

Теорема 1.2. *Якщо f має скінченну похідну в точці x_0, то для довільної пари $(\mathsf{u},\mathsf{v}) \in \mathcal{P}^*$ виконується рівність $\mathfrak{D}^{\mathsf{u}}_{\mathsf{v}} f(x_0) = f'(x_0)$.*

Наслідок 1.1. *Нехай ув околі точки x_0 задано функцію f і послідовність пар дійсних чисел (a_n, b_n), таких, що*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;
2. $a_j \neq b_j$ *при* $j \in \mathbb{N}$;
3. $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_n - x_0}{a_n - b_n} \right| < \infty$.

Тоді

- *якщо $f'(x_0) \in \mathbb{R}$, то вона дорівнює $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(a_n)-f(b_n)}{a_n-b_n}$;*
- *якщо не існує скінченної границі $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(a_n)-f(b_n)}{a_n-b_n}$, то f – не диференційовна в точці x_0 (не має скінченної похідної).*

Теорема 1.3. *Нехай f — функція, задана в околі точки x_0, для якої $f'(x_0) \in \mathbb{R}\bigcup\{\pm\infty\}$. Тоді для довільної пари $(\mathsf{u},\mathsf{v}) \in \mathcal{P}^+$ виконується рівність $\mathfrak{D}^{\mathsf{u}}_{\mathsf{v}} f(x_0) = f'(x_0)$.*

Наслідок 1.2. *Якщо f — функція, задана в околі точки x_0 і для деякої $(\mathsf{u},\mathsf{v}) \in \mathcal{P}^+$ не існує скінченної (u,v)-похідної $\mathfrak{D}^{\mathsf{u}}_{\mathsf{v}}f(x_0)$, то f – недиференційовна в цій точці.*

Наслідок 1.3. *Нехай ув околі точки x_0 задано функцію f і послідовності дійсних чисел (l_n), (r_n), збіжні до x_0 і $l_n \le x_0 \le r_n$, $l_n \ne r_n$ при всіх $n \in \mathbb{N}$. Тоді*

- *якщо $f'(x_0) \in \mathbb{R}\bigcup\{\pm\infty\}$, то $f'(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(r_n)-f(l_n)}{r_n-l_n}$;*
- *якщо не існує $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(r_n)-f(l_n)}{r_n-l_n}$, то в точці x_0 не існує похідної.*

Теорема 1.4. *Якщо для функції f існує $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x) \in \mathbb{R}\bigcup\{\pm\infty\}$, то для всіх $(\mathsf{u},\mathsf{v}) \in \mathcal{P}^-$ виконується рівність $\mathfrak{D}^{\mathsf{u}}_{\mathsf{v}}f(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$.*

Наприклад, функція

$$f(x) = \begin{cases} x + x/|x|, & x \ne 0; \\ 0, & x = 0; \end{cases}$$

задовольняє умову попередньої теореми, а тому для всіх $(\mathsf{u},\mathsf{v}) \in \mathcal{P}^-$ маємо $\mathfrak{D}^{\mathsf{u}}_{\mathsf{v}}f(0) = 1$, хоча вона не має неперервної похідної, бо $f'(0) = +\infty$ і $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 1$.

Зауваження 1.2. У випадку неперервності функції f й існування $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$ відомо, що виконується рівність $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x) = f'(x_0)$.

Теорема 1.5. *Нехай для функції f існує збіжна до x_0 послідовність (x_n), при цьому $x_n \ne x_0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$ і $\lim\limits_{n\to\infty} f'(x_n) = c$. Тоді існує така пара функції $(\mathsf{u},\mathsf{v}) \in \mathcal{P}^-$, що $\mathfrak{D}^{\mathsf{u}}_{\mathsf{v}}f(x_0) = c$.*

Прикладом функції f, яка задовольняє умову теореми 1.5, але не задовольняє теорему 1.4, є $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x), & x \ne 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

2 Означення $\square^{\mathsf{u}}_{\mathsf{v}}$, $\boxtimes^{\mathsf{u}}_{\mathsf{v}}$ й основні властивості

Далі використовуватимемо такі позначення при $(\mathsf{u},\mathsf{v}) \in \mathcal{P}^+$:

- $\square_{\mathsf{v}(h)}^{\mathsf{u}(h)} f(x) = \sup\limits_{t \in \Theta_{\mathsf{v}(h)}^{\mathsf{u}(h)}(x)} f(t) - \inf\limits_{t \in \Theta_{\mathsf{v}(h)}^{\mathsf{u}(h)}(x)} f(t) = \sup\limits_{t_1, t_2 \in \Theta_{\mathsf{v}(h)}^{\mathsf{u}(h)}(x)} \big(f(t_1) - f(t_2)\big)$, де $\Theta_{\mathsf{v}(h)}^{\mathsf{u}(h)}(x)$ – відрізок із кінцями в точках $x+\mathsf{u}(h)$, $x-\mathsf{v}(h)$;
- $\boxtimes_{\mathsf{v}(h)}^{\mathsf{u}(h)} f(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{\square_{\mathsf{v}(h)}^{\mathsf{u}(h)} f(x)}{\square_{\mathsf{v}(h)}^{\mathsf{u}(h)} x}$.

Зауважимо, що $\square_{\mathsf{v}(h)}^{\mathsf{u}(h)} f(x)$ є коливанням функції f на відрізку $\Theta_{\mathsf{v}(h)}^{\mathsf{u}(h)}(x)$.

Лема 2.1. *Нехай пара функції* $(\mathsf{u}, \mathsf{v}) \in \mathcal{P}^+$ *така, що існує нескінченна послідовність* (h_n)*, для елементів якої справедливі нерівності* $\mathsf{u}(h_n) \neq 0 \neq \mathsf{v}(h_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$*. Якщо* $\boxtimes_{\mathsf{v}}^{\mathsf{u}} f(x_0) = c \in \mathbb{R}$*, то* f *– неперервна в точці* x_0 *функція.*

Доведення. Згідно з означенням:

$$\frac{\square_{\mathsf{v}}^{\mathsf{u}} f(x_0)}{\square_{\mathsf{v}}^{\mathsf{u}} x} = c + \alpha(h), \ \lim_{h \to 0} \alpha(h) = 0 \Rightarrow \square_{\mathsf{v}}^{\mathsf{u}} f(x_0) = \big(c + \alpha(h)\big) \square_{\mathsf{v}}^{\mathsf{u}} x.$$

Отже, $\lim\limits_{h \to 0} \square_{\mathsf{v}}^{\mathsf{u}} f(x_0) = 0$, а тому f – неперервна в точці x_0 функція. □

Теорема 2.1. *Нехай* $(\mathsf{u}, \mathsf{v}) \in \mathcal{P}^+$ *і* a, b *– функції, для яких існують скінченні значення* $\boxtimes_{\mathsf{v}}^{\mathsf{u}} a(x_0)$, $\boxtimes_{\mathsf{v}}^{\mathsf{u}} b(x_0)$*. Тоді*

- $\boxtimes_{\mathsf{v}}^{\mathsf{u}} (Aa + B)(x_0) = |A| \boxtimes_{\mathsf{v}}^{\mathsf{u}} a(x_0)$*, де* $A, B \in \mathbb{R}$*;*
- $\boxtimes_{\mathsf{v}}^{\mathsf{u}} \big(a + b\big)(x_0) \le \boxtimes_{\mathsf{v}}^{\mathsf{u}} a(x_0) + \boxtimes_{\mathsf{v}}^{\mathsf{u}} b(x_0)$*.*

Отже, як оператор $\boxtimes_{\mathsf{v}(h)}^{\mathsf{u}(h)}$ – нелінійний.

2.1 Зв'язок $\boxtimes_{\mathsf{v}}^{\mathsf{u}}$ з похідною

Лема 2.2. *Якщо існує похідна* $f'(x_0) \in \mathbb{R}$*, то для всіх* $(\mathsf{u}, \mathsf{v}) \in \mathcal{P}^+$ *справедлива рівність* $\boxtimes_{\mathsf{v}}^{\mathsf{u}} f(x_0) = |f'(x_0)|$*.*

Доведення. Згідно з означенням похідної $f(x_0+t) = f(x_0)+ct+\alpha(t)t$, $\lim\limits_{t \to 0} \alpha(t) = 0$. Очевидно, що існують функції $a := a(h)$ і $b := b(h)$, такі, що $f(x_0 + a) = \sup\limits_{t \in \Theta_{\mathsf{v}}^{\mathsf{u}}(x)} f(t)$ і $f(x_0 + b) = \inf\limits_{t \in \Theta_{\mathsf{v}}^{\mathsf{u}}(x)} f(t)$. Тоді

$$\square_{\mathsf{v}}^{\mathsf{u}} f(x_0) = f(x_0+a) - f(x_0+b) = f(x_0) + ac + a\alpha(a) - f(x_0) - bc - b\alpha(b) =$$

$= c(a-b) + a\alpha(a) - b\alpha(b) \geq 0 \Rightarrow \square_{\mathsf{v}}^{\mathsf{u}} f(x_0) = |c(a-b) + a\alpha(a) - b\alpha(b)|$.

Оскільки $(\mathsf{u}, \mathsf{v}) \in \mathcal{P}^+$, то згідно з теоремою 1.3 виконується рівність $\mathfrak{D}_{\mathsf{v}}^{\mathsf{u}} f(x_0) = f'(x_0)$. Враховуючи те, що $|a-b| \leq |\mathsf{u}+\mathsf{v}|$, маємо

$$\left|\frac{f(x_0+\mathsf{u}) - f(x_0-\mathsf{v})}{\mathsf{u}+\mathsf{v}}\right| \leq \frac{\square_{\mathsf{v}}^{\mathsf{u}} f(x_0)}{\square_{\mathsf{v}}^{\mathsf{u}} x} = \frac{|c(a-b) + a\alpha(a) - b\alpha(b)|}{|\mathsf{u}+\mathsf{v}|} \leq$$

$$\leq \frac{|c(a-b)| + |\alpha(a)||a-b| + |b||\alpha(a) - \alpha(b)|}{|\mathsf{u}+\mathsf{v}|} \leq$$

$$\leq c + |\alpha(a)| + \frac{\max\{|\mathsf{u}|, |\mathsf{v}|\}}{|\mathsf{u}+\mathsf{v}|} |\alpha(a) - \alpha(b)|.$$

Отже, $|\mathfrak{D}_{\mathsf{v}}^{\mathsf{u}} f(x_0)| \leq \boxtimes_{\mathsf{v}}^{\mathsf{u}} f(x_0) \leq |c| \Rightarrow \boxtimes_{\mathsf{v}}^{\mathsf{u}} f(x_0) = |c|$. □

Лема 2.3. *Нехай f – монотонна функція. Тоді для всіх $(\mathsf{u}, \mathsf{v}) \in \mathcal{P}^+$ маємо*

$$\boxtimes_{\mathsf{v}}^{\mathsf{u}} f(x_0) = \begin{cases} \mathfrak{D}_{\mathsf{v}}^{\mathsf{u}} f(x_0), & \text{якщо } f \text{ – зростаюча;} \\ -\mathfrak{D}_{\mathsf{v}}^{\mathsf{u}} f(x_0), & \text{якщо } f \text{ – спадна.} \end{cases} \tag{2}$$

Доведення. Оскільки f – монотонна функція, то вона набуває свого найбільшого й найменшого значення на кінцях відрізка. А тому $\frac{\square_{\mathsf{v}}^{\mathsf{u}} f(x_0)}{\square_{\mathsf{v}}^{\mathsf{u}} x} = \frac{\Delta_{\mathsf{v}}^{\mathsf{u}} f(x_0)}{\Delta_{\mathsf{v}}^{\mathsf{u}} x}$, якщо f — зростаюча, інакше маємо $\frac{\square_{\mathsf{v}}^{\mathsf{u}} f(x_0)}{\square_{\mathsf{v}}^{\mathsf{u}} x} = -\frac{\Delta_{\mathsf{v}}^{\mathsf{u}} f(x_0)}{\Delta_{\mathsf{v}}^{\mathsf{u}} x}$. Достатньо перейти до границь ув утворених рівностях, щоб отримати необхідні висновки. □

Нехай

$$\mathcal{P}^{\oplus} = \left\{(\mathsf{u}, \mathsf{v}) \in \mathcal{P}^+ \middle| \mathsf{u}(h) \geq 0,\ h \in O(\mathsf{u}, \mathsf{v})\right\}. \tag{3}$$

Зауваження 2.1. Для пари функцій $(\mathsf{u}, \mathsf{v}) \in \mathcal{P}^+$ позначимо $p(h) = \max\{\mathsf{u}(h), -\mathsf{v}(h)\}$, $q(h) = -\min\{\mathsf{u}(h), -\mathsf{v}(h)\}$. Тоді справедлива рівність $\square_{\mathsf{v}(h)}^{\mathsf{u}(h)} f(x) = \square_{q(h)}^{p(h)} f(x)$, а отже, для кожної пари функції $(\mathsf{u}, \mathsf{v}) \in \mathcal{P}^+$ існує єдина пара $(p, q) \in \mathcal{P}^{\oplus}$.

Теорема 2.2. *Якщо для пари $(\mathsf{u}, \mathsf{v}) \in \mathcal{P}^{\oplus}$ виконуються*

$$0 < \varliminf_{h\to 0} \frac{\mathsf{u}(h)}{\mathsf{v}(h)} \leq \varlimsup_{h\to 0} \frac{\mathsf{u}(h)}{\mathsf{v}(h)} < \infty; \quad \varlimsup_{h\to 0} \left(\left| \frac{\varlimsup\limits_{\xi\to 0} \sup\limits_{t\in[-\xi;\xi]} \mathsf{u}(h+t)}{\varliminf\limits_{\xi\to 0} \inf\limits_{t\in[-\xi;\xi]} \mathsf{u}(h+t)} \right| \right) < \infty,$$

то $\boxtimes_{\mathsf{v}}^{\mathsf{u}} f(x_0) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $f'(x_0) = 0$.

Доведення. Якщо $f'(x_0) = 0$, то згідно з лемою 2.2 маємо $\boxtimes_{\mathsf{v}}^{\mathsf{u}} f(x_0) = 0$. Нехай $\boxtimes_{\mathsf{v}}^{\mathsf{u}} f(x_0) = 0$. Розглянемо нерівності:

$$\frac{\square_{\mathsf{v}}^{0} f(x_0)}{\square_{\mathsf{v}}^{0} x} \leq \frac{\square_{\mathsf{v}}^{\mathsf{u}} f(x_0) \cdot \square_{\mathsf{v}}^{\mathsf{u}} x}{\square_{\mathsf{v}}^{0} x \cdot \square_{\mathsf{v}}^{\mathsf{u}} x}; \ \frac{\square_{0}^{\mathsf{u}} f(x_0)}{\square_{0}^{\mathsf{u}} x} \leq \frac{\square_{\mathsf{v}}^{\mathsf{u}} f(x_0) \cdot \square_{\mathsf{v}}^{\mathsf{u}} x}{\square_{0}^{\mathsf{u}} x \cdot \square_{\mathsf{v}}^{\mathsf{u}} x}. \tag{4}$$

З першої нерівності маємо $\overline{\lim\limits_{h\to 0}} \frac{\square_{\mathsf{v}}^{\mathsf{u}} x}{\square_{\mathsf{v}}^{0} x} = \overline{\lim\limits_{h\to 0}} \frac{\mathsf{u}+\mathsf{v}}{\mathsf{v}} = \overline{\lim\limits_{h\to 0}} \left(1 + \frac{\mathsf{u}}{\mathsf{v}}\right) < \infty$, тобто $\overline{\lim\limits_{h\to 0}} \frac{\mathsf{u}}{\mathsf{v}} < \infty$, відповідно зі другої – $\overline{\lim\limits_{h\to 0}} \frac{\mathsf{v}}{\mathsf{u}} < \infty$, тобто $0 < \underline{\lim\limits_{h\to 0}} \frac{\mathsf{u}(h)}{\mathsf{v}(h)} \leq \overline{\lim\limits_{h\to 0}} \frac{\mathsf{u}(h)}{\mathsf{v}(h)} < \infty$. Остання нерівність є умовою того, що при переході до границі вирази справа в нерівностях (4) прямуватимуть до нуля. Нехай

$$\eta(h) = \overline{\lim_{\xi\to 0}} \sup_{t\in[-\xi;\xi]} \mathsf{u}(h+t); \ \mu(h) = \underline{\lim_{\xi\to 0}} \inf_{t\in[-\xi;\xi]} \mathsf{u}(h+t).$$

Розглянемо довільну функцію $\tau(h)$, таку, що $\tau(h) \in [\mu(h); \eta(h)]$, тоді

$$\left| \frac{f\Big(x_0 + \tau(h)\Big) - f(x_0)}{\tau(h)} \right| \leq \frac{\square_{0}^{\eta(h)} f(x_0)}{\square_{0}^{\mu(h)} x} = \frac{\square_{0}^{\eta(h)} f(x_0) \cdot \square_{0}^{\eta(h)} x}{\square_{0}^{\mu(h)} x \cdot \square_{0}^{\eta(h)} x}. \tag{5}$$

Отже, якщо $\overline{\lim\limits_{h\to 0}} \frac{\square_{0}^{\eta(h)} x}{\square_{0}^{\mu(h)} x} \in \mathbb{R}$, то зі $\boxtimes_{0}^{\mathsf{u}(h)} f(x_0) = 0$ маємо, що правостороння похідна дорівнює нулю.

Нехай

$$\eta_1(h) = \overline{\lim_{\xi\to 0}} \sup_{t\in[-\xi;\xi]} \mathsf{v}(h+t); \ \mu_1(h) = \underline{\lim_{\xi\to 0}} \inf_{t\in[-\xi;\xi]} \mathsf{v}(h+t).$$

З умов $0 < \underline{\lim\limits_{h\to 0}} \frac{\mathsf{u}(h)}{\mathsf{v}(h)} \leq \overline{\lim\limits_{h\to 0}} \frac{\mathsf{u}(h)}{\mathsf{v}(h)} < \infty$ і $\overline{\lim\limits_{h\to 0}} \left(\left| \frac{\overline{\lim\limits_{\xi\to 0}} \sup\limits_{t\in[-\xi;\xi]} \mathsf{u}(h+t)}{\underline{\lim\limits_{\xi\to 0}} \inf\limits_{t\in[-\xi;\xi]} \mathsf{u}(h+t)} \right| \right) < \infty$ маємо, що виконується нерівність $\overline{\lim\limits_{h\to 0}} \left(\left| \frac{\overline{\lim\limits_{\xi\to 0}} \sup\limits_{t\in[-\xi;\xi]} \mathsf{v}(h+t)}{\underline{\lim\limits_{\xi\to 0}} \inf\limits_{t\in[-\xi;\xi]} \mathsf{v}(h+t)} \right| \right) < \infty$, а тому, якщо $\boxtimes_{\mathsf{v}(h)}^{0} f(x_0) = 0$, то лівостороння похідна дорівнює нулю. $\square$

Наслідок 2.1. *Нехай (l_n), (r_n) такі, що*

- $l_n < l_{n+1} < x$, $x > r_{n+1} > r_n$, $n \in \mathbb{N}$;

- $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = x = \lim\limits_{n\to\infty} l_n$;
- $0 < \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{r_n - x}{x - l_n} \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{r_n - x}{x - l_n} < \infty$;
- $\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{r_n - x}{r_{n+1} - x} < \infty$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{l_{n+1} - x}{l_n - x} < \infty$.

Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sup\limits_{t_1,t_2\in[l_n,r_n]} \left(f(t_1)-f(t_2)\right)}{r_n - l_n} = 0$, *то* $f'(x) = 0$.

Доведення. Розглянемо пару функції $\mathsf{u}(h) = r_n - x$, $\mathsf{v}(h) = x - l_n$ при $h \in \left(2^{-n-1}; 2^{-n}\right]$. Легко перевірити, що пара функції $(\mathsf{u}, \mathsf{v}) \in \mathcal{P}^{\oplus}$ і задовольняє умови теореми 2.2, а тому $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\sup\limits_{t_1,t_2\in[l_k,r_k]} \left(f(t_1)-f(t_2)\right)}{r_k - l_k} =$ $= \boxtimes_{\mathsf{v}}^{\mathsf{u}} f(x_0) = 0$. □

Теорема 2.3. *Нехай* (u_k, v_k) *– послідовність пар нескінченно малих числових послідовностей, таких, що* $u_k \geq u_{k+1} > 0 < v_{k+1} \leq v_k$ *і* $0 < \underline{\lim}_{k\to\infty} \frac{u_k}{v_k} \leq \overline{\lim}_{k\to\infty} \frac{u_k}{v_k} < \infty$.

Якщо $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\Box_{v_k}^{u_k} f(x)}{\Box_{v_{k+1}}^{u_{k+1}} x} = 0$, *то* $f'(x) = 0$.

Доведення. Умова $0 < \underline{\lim}_{k\to\infty} \frac{u_k}{v_k} \leq \overline{\lim}_{k\to\infty} \frac{u_k}{v_k} < \infty$ – це адаптована умова $0 < \underline{\lim}_{h\to 0} \frac{\mathsf{u}(h)}{\mathsf{v}(h)} \leq \overline{\lim}_{h\to 0} \frac{\mathsf{u}(h)}{\mathsf{v}(h)} < \infty$ з теореми 2.2.

Розглянемо довільну функцію $\tau(h) \in [u_{k+1}, u_k]$ при $h \in \left(2^{-k-1}, 2^{-k}\right]$.

$$\left|\frac{f\left(x + \tau(h)\right) - f(x)}{\tau(h)}\right| \leq \frac{\Box_0^{u_k} f(x)}{\Box_0^{u_{k+1}} x} \leq \frac{\Box_{v_k}^{u_k} f(x)}{\Box_0^{u_{k+1}} x}.$$

Покажемо, що $\frac{\Box_{v_k}^{u_k} f(x)}{\Box_0^{u_{k+1}} x} \to 0$ тоді і тільки тоді, коли $\frac{\Box_{v_k}^{u_k} f(x)}{\Box_{v_{k+1}}^{u_{k+1}} x} \to 0$ при $k \to \infty$. Справді, згідно з умовою теореми існує $M \in \mathbb{R}$, що $\frac{v_k}{u_k} \leq M$. Тоді

$$\frac{\Box_{v_k}^{u_k} x}{\Box_0^{u_k} x} = \frac{u_k + v_k}{u_k} = \left(1 + \frac{v_k}{u_k}\right) \in [1; M+1], \tag{6}$$

тому $\frac{\Box_{v_k}^{u_k} f(x)}{\Box_0^{u_{k+1}} x} \to 0$ тоді і тільки тоді, коли $\frac{\Box_{v_k}^{u_k} f(x)}{\Box_{v_{k+1}}^{u_{k+1}} x} \to 0$. Отже, якщо $\frac{\Box_{v_k}^{u_k} f(x)}{\Box_{v_{k+1}}^{u_{k+1}} x} \to 0$, то правостороння похідна дорівнює нулю.

Аналогічно, якщо $\frac{\square_{v_k}^{u_k} f(x)}{\square_{v_{k+1}}^{u_{k+1}} x} \to 0$, то лівостороння похідна дорівнює нулю. Отже, якщо $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\square_{v_k}^{u_k} f(x)}{\square_{v_{k+1}}^{u_{k+1}} x} = 0$, то $f'(x) = 0$. $\square$

2.2 $\tilde{Q}$–зображення дійсного числа

$\tilde{Q}$–зображення дійсного числа з $[0;1]$ є узагальненням відомих систем зображення дійсних чисел: класичне s-кове зображення, Q_s–, Q_s^*–, Q_∞–зображення. Нагадаємо його зміст [8].

Нехай маємо послідовність алфавітів $A_k = \{0, 1, \dots, m_k\}$, $m_k \in \in \mathbb{N}\bigcup\{\infty\}$, $k \in \mathbb{N}$, $L = A_{m_1} \times A_{m_2} \times \dots \times A_{m_k} \times \dots$ – простір послідовностей елементів алфавітів; $\tilde{Q} = ||q_{i,j}||$ – "матриця" з нескінченною кількістю стовпців (k-ий стовпець містить m_k елементів), $i \in A_j$, $m_j \in \mathbb{N}_\infty = \mathbb{N}\bigcup\{+\infty\}$, $j \in \mathbb{N}$, така, що задовольняє подальші умови:

1. $0 < q_{i,j} < 1$ для всіх $i \in A_j$, $j \in \mathbb{N}$;
2. $\sum_{c=0}^{m_j} q_{c,j} = 1$ для всіх $j \in \mathbb{N}$;
3. $\prod_{j=1}^{\infty} \sup\limits_{i \in A_j} \{q_{i,j}\} = 0$.

Відомо [8], що для будь-якого дійсного числа $x \in [0;1]$ існує послідовність $(\alpha_n) \in L$, така, що

$$x = \beta_{\alpha_1 1} + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\beta_{\alpha_n n} \prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j j} \right) = \Delta^{\tilde{Q}}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots},$$

де $\beta_{0,n} = 0$, $\beta_{c,n} = \sum_{i=0}^{n-1} q_{i,n}$, $c \in A_n$. Нехай $A \equiv \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j$.

Означення 2.1. Нехай $N_j(x,n)$ – це кількість цифр j серед перших n цифр $\tilde{Q}$-зображення числа $x = \Delta^{\tilde{Q}}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}$. Якщо існує границя

$$\nu_j^{\tilde{Q}}(x) = \lim_{n\to\infty} n^{-1} N_j(x,n),$$

то її значення називається *частотою цифри* $j \in A$ у $\tilde{Q}$-зображенні числа x .

Значення $\overline{\nu}_j^{\tilde{Q}}(x) = \varlimsup\limits_{n\to\infty} n^{-1} N_j(x,n)$, $\underline{\nu}_j^{\tilde{Q}}(x) = \varliminf\limits_{n\to\infty} n^{-1} N_j(x,n)$ називаються *верхньою й нижньою частотами цифри* j $\tilde{Q}$-зображення числа x відповідно.

У разі, коли $\tilde{Q}$-зображення числа x містить нескінченну кількість цифр j, використовуватимемо лічильники: P_k – порядковий номер k-ої цифри j, тобто $P_k = n$, якщо $\alpha_n = j$ і $N_j(x, n-1) = k-1$. Наприклад, для числа $x = \Delta^{\tilde{Q}}_{1023012101002410\ldots}$, у записі якого зустрічається нескінченна кількість цифр 1, то $P_1 = 1$, $P_2 = 6$, $P_3 = 8$, $P_4 = 10$, $P_5 = 15, \ldots$

Легко довести таке твердження: *якщо в зображенні числа x використовується нескінченна кількість цифр j, то справедлива рівність:*

$$\nu_j^{\tilde{Q}}(x) = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{P_k}, \tag{7}$$

де P_k – порядковий номер k-ої цифри j, яке для Q_s-зображення доведене в роботі [6]. Аналогічно $\overline{\nu}_i^{\tilde{Q}}(x) = \varlimsup\limits_{k\to\infty} \frac{k}{P_k}$ або $\underline{\nu}_i^{\tilde{Q}}(x) = \varliminf\limits_{k\to\infty} \frac{k}{P_k}$, $i \in A$.

Нехай $c \in A$ і

$$\chi_{c,j} = \chi_{c,j}(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } \alpha_j = c; \\ 0 & \text{при } \alpha_j \neq c; \end{cases} \tag{8}$$

$$p_{c,j} = \begin{cases} q_{c,j} & \text{при } c \le m_j; \\ 0 & \text{при } c > m_j. \end{cases} \tag{9}$$

Теорема 2.4. *Для майже всіх (у розумінні міри Лебега) чисел $x \in [0;1]$ є істинною рівність*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \Big(\chi_{c,j} - p_{c,j}\Big) = 0 \tag{10}$$

для всіх $x \in A$.

Доведення. Нехай $A \ni c$ – довільна цифра. З геометрії $\tilde{Q}$–зображення дійсних чисел:

$$\int_0^1 \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \chi_{c,j}(x) dx = \frac{1}{n} \int_0^1 \sum_{j=1}^{n} \chi_{c,j}(x) dx = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} p_{c,j}.$$

Нехай $g_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \Big(\chi_{c,j}(x) - p_{c,j}\Big)$, тоді $\int_0^1 g_n(x) dx = 0$. Покажемо, що майже скрізь $\lim\limits_{n\to\infty} |g_n(x)| = 0$. Для цього розглянемо

$$I_n^c = \int_0^1 g_n^2(x)dx = \int_0^1 \left(n^{-1} \sum_{j=1}^{n} \Big(\chi_{c,j}(x) - p_{c,j} \Big) \right)^2 dx.$$

Далі $\chi_{c,j} := \chi_{c,j}(x)$. Інтеграл I_c^n можна представити у вигляді суми інтегралів таких двох типів:

1. $\int\limits_0^1 (\chi_{c,j} - p_{c,j})^2 \, dx = \int\limits_0^1 \chi_{c,j}^2 dx - 2p_{c_j} \int_0^1 \chi_{c,j} dx + p_{c,j}^2 \int_0^1 dx = p_{c,j} - p_{c,j}^2$.
2. $\int\limits_0^1 \Big((\chi_{c,j} - p_{c,j})(\chi_{c,t} - p_{c,t}) \Big) dx = \int\limits_0^1 \chi_{c,j}\chi_{c,t} dx - p_{c,j} \int\limits_0^1 \chi_{c,t} dx - - p_{c,t} \int\limits_0^1 \chi_{c,j} dx + p_{c,j}p_{c,t} \int\limits_0^1 dx = 0$, $j \neq t$.

Отже, $I_n^c = n^{-2} \sum_{j=1}^n \left(p_{c,j} - p_{c,j}^2 \right) \leq n^{-1}$.

Для довільного $\varepsilon > 0$ позначимо $F_n^c := F_n^c(\varepsilon)$ множину дійсних чисел із $[0;1]$, таких, що задовольняють умову $\left| n^{-1} \sum_{j=1}^n (\chi_{c,j} - p_{c,j}) \right| > > \varepsilon$.

Тоді $n^{-1} \geq \int_0^1 g_n^2(x)dx \geq \int_0^1 \varepsilon^2 dx = \varepsilon^2 \lambda F_n^c$, де λF_n^c – міра Лебега множини F_n^c. Отже, $\lambda F_n^c \leq \left(n\varepsilon^2 \right)^{-1}$, а тому для кожного фіксованого $\varepsilon > 0$ виконується $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda F_n^c = 0$.

Нехай $G_k^c = F_{k^2}^c \bigcup F_{(k+1)^2}^c \bigcup F_{(k+2)^2}^c \bigcup \ldots$, тоді $\lambda G_k^c \leq \sum_{j=k}^\infty \lambda F_{j^2}^c \leq \leq \varepsilon^{-2} \sum_{j=k}^\infty j^{-2}$, отже, $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda G_k^c = 0$, що рівнозначно $\lim\limits_{k\to\infty} g_{k^2}(x) = 0$ майже скрізь у розумінні міри Лебега.

Для всіх натуральних n існують k, t, такі, що $n = t^2 + k$, $t^2 \leq n < < (t+1)^2 \Rightarrow 0 \leq n - t^2 \leq 2t + 1$. Тоді $\int\limits_0^1 |g_n(x)| \, dx \leq \frac{t^2}{n} \int\limits_0^1 |g_{t^2}(x)| dx + + \int\limits_0^1 \left| \frac{1}{n} \sum_{j=t^2+1}^n (\chi_{c,j} - p_{c,j}) \right| dx$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 |g_n(x)| \, dx = 0$, що й треба було довести. □

При доведенні теореми використовувались підходи наведені в [12].

Наслідок 2.2. *Для майже всіх (у розумінні міри Лебега) чисел* $x \in [0;1]$ *виконуються такі рівності:* $\overline{\nu}_c(x) = \varlimsup\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n p_{c,j}$, $\underline{\nu}_c(x) = \varliminf\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n p_{c,j}$.

Доведення. Нехай $a_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\chi_{c,j}$, $b_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}p_{c,j}$. Враховуючи те, що $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = \overline{\nu}_c(x)$ і нерівність $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,(a_n - b_n) \geq \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n - \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, b_n$, маємо

$$0 = \overline{\lim_{n\to\infty}}\,(a_n - b_n) \geq \overline{\nu}_c(x) - \overline{\lim_{n\to\infty}}\, b_n \Rightarrow \overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} p_{c,j} \geq \overline{\nu}_c(x). \quad (11)$$

З іншого боку

$$0 = \overline{\lim_{n\to\infty}}\,(b_n - a_n) \geq \overline{\lim_{n\to\infty}}\, b_n - \overline{\nu}_c(x) \Rightarrow \overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} p_{c,j} \leq \overline{\nu}_c(x). \quad (12)$$

Отже, $\overline{\nu}_c(x) = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}p_{c,j}$. Друга частина твердження доводиться аналогічно. □

Якщо в послідовності алфавітів (A_n) усі елементи дорівнюють A_s, то утворене зображення є Q_s^*-зображенням.

2.3 G_3^*-зображення дійсного числа

Розглянемо матрицю

$$G_3^* = \begin{pmatrix} g_{01} & g_{02} & \cdots g_{0n} & \cdots \\ g_{11} & g_{12} & \cdots g_{1n} & \cdots \\ g_{21} & g_{22} & \cdots g_{2n} & \cdots \end{pmatrix}, \quad (13)$$

де $g_{0n} > 0$ $g_{2n} > 0$, $g_{1n} \leq 0$, $|g_{in}| < 1$, $g_{0n} + g_{1n} + g_{2n} = 1$ і $\prod\limits_{j=1}^{\infty}\max\limits_{i=0,1,2}|g_{ij}| = 0$.

Довільне число $x \in [0;1]$ можна подати як:

$$x = \delta_{\alpha_1 1} + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\delta_{\alpha_n n}\prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j j}\right) = \Delta^{G_3^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots},$$

де $\alpha_i \in A_3$, $\delta_{0n} = 0$, $\delta_{1n} = g_{0n}$, $\delta_{2n} = g_{0n} + g_{1n}$.

Лема 2.4. *Всі* $\delta_{in} \geq 0$ *при* $i \in A_3$, $n \in \mathbb{N}$.

Доведення. Очевидно, що $\delta_{0n} \geq 0 \leq \delta_{1n}$. Доведемо, що $\delta_{2n} \geq 0$, використовуючи метод від супротивного. Припустимо, що $0 > \delta_{2n} = g_{0n} + g_{1n}$, тоді $g_{1n} < -g_{0n}$, але має виконуватися рівність $1 = g_{0n} + g_{1n} + g_{2n} < g_{0n} - g_{0n} + g_{2n} = g_{2n} < 1$. Отримали суперечність, отже, припущення хибне. □

3 Неперервна функція на основі Q_3^* і G_3^* зображень чисел

Розглянемо функцію

$$f\Big(x \equiv \triangle^{Q_3^*}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)\ldots}\Big) = \triangle^{G_3^*}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)\ldots}, \qquad (14)$$

де $\alpha_j(x)$ – це j-та цифра Q_3^*-зображення числа x. Обґрунтування коректності задання, неперервності, ніде не монотонності функцій, знаходження екстремумів функції було розглянуте в [4].

Теорема 3.1. *Нехай функціональна послідовність (φ_n) рівномірно збігається до φ на $[a;b]$. Для $\bigvee\limits_{[a;b]}\varphi$ варіації функції φ справедлива нерівність*

$$\bigvee_{[a;b]}\varphi \le \varliminf_{n\to\infty}\bigvee_{[a;b]}\varphi_n \le \varlimsup_{n\to\infty}\bigvee_{[a;b]}\varphi_n.$$

Доведення. Для натурального n позначимо через T_n^* таке розбиття відрізка $[a;b]$ n точками, що $\bigvee\limits_{[a;b]}(f,T_n^*) = \sup\limits_{T_n}\bigvee\limits_{[a;b]}(\varphi,T_n)$.

Оскільки (φ_k) рівномірно прямують до φ, то для довільного натурального k існує $\varepsilon_k > 0$, таке, що $|\varphi_k(x)-\varphi(x)| < \varepsilon_k$, $\lim\limits_{k\to\infty}\varepsilon_k = 0$. Тобто $\varphi(x) = \varphi_k(x)+\alpha_k(x)$, $|\alpha_k(x)| < \varepsilon$. Тоді $|\varphi(x_{l+1})-\varphi(x_l)| \le |\varphi_{k_n}(x_{l+1})-\varphi_{k_n}(x_l)| + |\alpha_{k_n}(x_{l+1})-\alpha_{k_n}(x_l)| \le$ $\le |\varphi_{k_n}(x_{l+1})-\varphi_{k_n}(x_l)| + 2\varepsilon_k$, де $x_l \in T_n^*$.

$$\bigvee_{[a;b]}(\varphi,T_n^*) < \bigvee_{[a,b]}(\varphi_{k_n},T_n^*) + 2\varepsilon_{k_n}n.$$

Перейшовши до границі, отримуємо:

$$\bigvee_{[a,b]}\varphi = \lim_{n\to\infty}\bigvee_{[a;b]}(f,T_n^*) \le \lim_{n\to\infty}\left(\bigvee_{[a,b]}(\varphi_{k_n},T_n^*) + 2\varepsilon_{k_n}n\right).$$

Обравши послідовність k_n таким чином, щоб $\varepsilon_{k_n} < n^{-2}$, маємо $\bigvee\limits_{[a,b]}\varphi \le \lim\limits_{n\to\infty}\bigvee\limits_{[a,b]}\varphi_{k_n}$.

Випадок, коли $\lim\limits_{n\to\infty}\bigvee\limits_{[a,b]}\varphi_n(x)$ – не існує, а $\varliminf\limits_{n\to\infty}\bigvee\limits_{[a;b]}\varphi_n(x) <$ $< \infty$ доводиться виділенням підпослідовності n_k: $\varliminf\limits_{n\to\infty}\bigvee\limits_{[a;b]}\varphi_n(x) =$ $= \lim\limits_{k\to\infty}\bigvee\limits_{[a,b]}\varphi_{n_k}(x)$ і розглядається функціональна послідовність $g_k(x) = \varphi_{n_k}(x)$. Аналогічним чином і для випадку $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\bigvee\limits_{[a;b]}\varphi_n(x) <$ $< \infty$. □

Теорема 3.2. *Функція $f(x)$ буде функцією обмеженої варіації тоді і тільки тоді, коли є збіжним ряд:* $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\Big(g_{0j}+|g_{1j}|+g_{2j}-1\Big)$.

Доведення. Побудуємо збіжну до f функціональну послідовність (f_n), графіки яких є ламаними з вершинами в точках $\left(\triangle^{Q_3^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(0)};\triangle^{G_3^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(0)}\right)$ і $\left(\triangle^{Q_3^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(2)};\triangle^{G_3^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(2)}\right)$.

Враховуючи рівності $\triangle^{Q_3^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots[\alpha_n+1](0)}=\triangle^{Q_3^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(2)}$ і $\triangle^{G_3^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots[\alpha_n+1](0)}=\triangle^{G_3^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(2)}$, маємо неперервність кожної функції f_n на відрізку $[0;1]$.

Згідно з побудовою функції f й відповідної послідовності f_n, для довільного $x\in[0;1]$ виконується нерівність $|f_n(x)-f(x)|\leq$ $\leq\prod\limits_{j=1}^{n}\max\limits_{i=0,1,2}|q_{ij}|$, отже, маємо рівномірну збіжність, а тому застосуємо теорему 3.1. Враховуючи те, що графіки f_n – є ламаними, з переходом до подальшого індексу варіація кожної ланки попередньої ламаної зросте у $\Big(g_{0j}+|g_{1j}|+g_{2j}\Big)$ разів, тож маємо

$$\lim_{j\to\infty}\bigvee_{[0;1]}f_j(x)=\prod_{j=1}^{\infty}\Big(g_{0j}+|g_{1j}|+g_{2j}\Big). \tag{15}$$

Враховуючи $g_{0j}+|g_{1j}|+g_{2j}\geq1$ і використавши логарифмічну ознаку збіжності нескінченних добутків, а також граничний випадок ознаки порівняння для додатних рядів, отримаємо

$$\lim_{j\to\infty}\frac{\ln\Big(g_{0j}+|g_{1j}|+g_{2j}\Big)}{g_{0j}+|g_{1j}|+g_{2j}-1}=\lim_{j\to\infty}\frac{\ln\Big(1+(g_{0j}+|g_{1j}|+g_{2j}-1)\Big)}{g_{0j}+|g_{1j}|+g_{2j}-1}=1.$$

З урахуванням того, що розв'язками рівняння $f_n(x)=f(x)$ є точки злому (точками у яких існують нерівні односторонні похідні), нескладно довести, що якщо $\lim\limits_{j\to\infty}\bigvee\limits_{[0;1]}f_j(x)=\infty$, то f – функція необмеженої варіації. $\square$

Лема 3.1. *Нехай (a_n) і (b_n) – нескінченна послідовність дійсних чисел, таких, що $|a_n|\leq a<1$, $|b_n|>b>1$. Тоді для довільної послідовності (t_j), де $t_j\in\{0,1\}$, границя $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{j=1}^{n}\mu_j$ може або не існувати,* *або дорівнювати нулю чи нескінченності, де* $\mu_j = \begin{cases} a_j & \text{при } t_j = 0; \\ b_j & \text{при } t_j = 1. \end{cases}$

Доведення. Нескладно показати, що залежно від вибору послідовності (t_n) границя $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{j=1}^{n} \mu_j$ може дорівнювати 0 або $\pm\infty$ або взагалі не існувати.

Методом від супротивного покажемо, що не існує такого $c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, щоб $\prod\limits_{j=1}^{\infty} \mu_j = c$. Припустимо, що таке c існує, але тоді згідно з необхідною умовою збіжності нескінчених добутків послідовності (a_n) і (b_n) мають прямувати до 1, а це суперечить умові леми, а, отже, такого числа не існує. $\square$

Теорема 3.3. *Нехай f – функція обмеженої варіації при цьому існує таке $\varepsilon > 0$, що $\left|\frac{g_{k,j}}{q_{k,j}}\right| \geq 1 + \varepsilon$ або $\left|\frac{g_{k,j}}{q_{k,j}}\right| \leq 1 - \varepsilon$ для всіх $j \in \mathbb{N}$, $k \in \{0, 1, 2\}$, то f – сингулярна.*

Доведення. Розглянемо послідовність пар чисел (l_n, r_n), де $l_n = \triangle^{Q_3^*}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)(0)}$, $r_n = \triangle^{Q_3^*}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)(2)}$. Нескладно перевірити, що вони задовольняють умову наслідку 1.3. Враховуючи лему 3.1, розглянемо границю

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{f(r_n) - f(l_n)}{r_n - l_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \prod_{j=1}^{n} \frac{|g_{\alpha_j j}|}{q_{\alpha_j j}} = \begin{cases} 0; \\ \infty; \\ \nexists. \end{cases}$$

Оскільки кожна функція обмеженої варіації має майже скрізь скінченну похідну, то маємо, що майже скрізь $f'(x) = 0$. $\square$

Теорема 3.4. *Якщо існує таке $\varepsilon > 0$, що $\left|\frac{g_{k,j}}{q_{k,j}}\right| \geq 1 + \varepsilon$ для всіх $j \in \mathbb{N}$ і $k \in \{0, 1, 2\}$, то f – ніде не диференційовна (не має скінченної похідної).*

Доведення. Розглянемо послідовність пар чисел (l_n, r_n), де $l_n = \triangle^{Q_3^*}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)(0)}$, $r_n = \triangle^{Q_3^*}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)(2)}$. Нескладно перевірити, що вони задовольняють умову наслідку 1.3. Розглянемо границю

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{f(r_n) - f(l_n)}{r_n - l_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \prod_{j=1}^{n} \frac{|g_{\alpha_j j}|}{q_{\alpha_j j}} = \begin{cases} \infty; \\ \nexists. \end{cases}$$

Отже, згідно з наслідком 1.3, функція f не має скінченної похідної. $\square$

З наслідку теореми 2.4 маємо, що для майже всіх чисел із відрізка $[0;1]$ виконуються рівності $\overline{\nu}_c^{Q_3^*}(x) = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n q_{c,k}\right) = \overline{\eta_c}$, $\underline{\nu}_c^{Q_3^*}(x) = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n q_{c,k}\right) = \underline{\eta_c}$, множину таких чисел позначимо E.

Нехай при $c \in A$:

$$p_c := \begin{cases} \left(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left|\dfrac{g_{c,j}}{q_{c,j}}\right|\right)^{\overline{\nu}_c} & \text{при } \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left|\dfrac{g_{c,j}}{q_{c,j}}\right| \geq 1; \\ \left(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left|\dfrac{g_{c,j}}{q_{c,j}}\right|\right)^{\underline{\nu}_c} & \text{при } \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left|\dfrac{g_{c,j}}{q_{c,j}}\right| < 1; \end{cases}$$

Теорема 3.5. *Нехай існує таке $\xi > 0$, що $q_{c,n} \geq \xi$ для всіх $n \in \mathbb{N}$ і $c \in A_3$. Якщо $\xi^{\overline{\eta_1}^{-1} - \underline{\eta_1}^{-1}} \prod\limits_{c=0}^{2} p_c < 1$, тоді майже скрізь (у розумінні міри Лебега) $f'(x) = 0$.*

Доведення. Для доведення скористуємось теоремою 2.3.

З урахуванням умови теореми справедлива оцінка $\underline{\nu}_c^{Q_3^*}(x) \geq \xi$ для всіх $c \in A_3$.

Розглянемо довільне $x \in E$ й побудуємо для нього пару послідовностей (l_n, r_n) за правилом

$$l_n = \Delta^{Q_3^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{P_n-1}(0)},\ r_n = \Delta^{Q_3^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{P_n-1}(2)},$$

де P_n – номер позиції запису n-ої одиниці Q_3^*-зображення числа x. Утворимо пару послідовностей (u_k, v_k) таким чином:

$$v_n = x - l_n = \Delta^{Q_3^*}_{\underbrace{00\ldots0}_{P_n-1}1\alpha_{P_{n+1}}\alpha_{P_{n+2}}\ldots};$$

$$u_n = r_n - x = \Delta^{Q_3^*}_{\underbrace{00\ldots0}_{P_n-1}1[2-\alpha_{P_{n+1}}][2-\alpha_{P_{n+2}}]\ldots}.$$

Очевидно, що послідовності (u_k), (v_k) нескінченно малі.

Враховуючи той факт, що $\xi \leq q_{c,j} \leq 1$ для всіх $j \in \mathbb{N}$ і $c \in A_3$, стає очевидним, що

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{u_n}{v_n}\le\xi^{-1},\ \ \underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{u_n}{v_n}\ge\xi,$$

а отже, виконуються нерівності $0<\underline{\lim_{k\to\infty}}\frac{u_k}{v_k}\le\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{u_k}{v_k}<\infty$ і $u_k\ge$ $\ge u_{k+1}>0<v_{k+1}\le v_k$.

Покажемо, що $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\square_{v_n}^{u_n}f(x)}{\square_{v_{n+1}}^{u_{n+1}}x}=0$.

Згідно з побудовою функції f і вибором послідовності пар (u_n,v_n) маємо

$$\square_{v_n}^{u_n}f(x)=\prod_{j=1}^{P_n-1}\left|g_{\alpha_j,j}\right|,\ \ \square_{v_{n+1}}^{u_{n+1}}x=\prod_{j=1}^{P_{n+1}-1}q_{\alpha_j,j}.$$

Отже,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\square_{v_n}^{u_n}f(x)}{\square_{v_{n+1}}^{u_{n+1}}x}=\lim_{n\to\infty}\left(\prod_{j=1}^{P_n-1}\left|\frac{g_{\alpha_j,j}}{q_{\alpha_j,j}}\right|\cdot\prod_{j=P_n}^{P_{n+1}-1}q_{\alpha_j,j}^{-1}\right)\le$$

$$\le\lim_{n\to\infty}\left(\prod_{j=1}^{P_n-1}\left|\frac{g_{\alpha_j,j}}{q_{\alpha_j,j}}\right|\cdot\xi^{P_n-P_{n+1}+1}\right)=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{\prod_{j=1}^{P_n-1}\left|\frac{g_{\alpha_j,j}}{q_{\alpha_j,j}}\right|}\cdot\xi^{\frac{P_n-P_{n+1}+1}{n}}\right)^n\le\lim_{n\to\infty}\left(\xi^{\frac{1}{\overline{\eta_1}}-\frac{1}{\underline{\eta_1}}}\cdot\prod_{c=0}^{2}p_c\right)^n=0.$$

Отже, згідно з теоремою 2.3, $f'(x)=0$ майже скрізь. $\square$

Зауважимо, що серед класу побудованих функцій f є сингулярні ніде немонотонні функції необмеженої варіації. Наприклад, при $q_{c,j}=1/3$, $1/2<g_{0,j}=g_{2,j}=g_0\le\frac{1}{6}\left(1+\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}+\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}\right)\approx 0,559$, $g_1=1-2g_0$ для всіх $c\in A_3$ і $j\in\mathbb{N}$ якраз отримаємо таку функцію.

[1] *Agadzhanov A. N.* Nowhere monotone singular functions in problems of finite control of distributed systems — Doklady Mathematics.// Doklady Mathematics. — 2014. — jan. — **89**, 1. — P. 84-87.

[2] *Pratsiovytyi M., Vasylenko N.* Fractal properties of functions defined in terms of Q-representation // International Journal of Mathematical Analysis — 2013. — **7**. — P. 3155-3167.

[3] *Калашніков А. В., Працьовитий М. В.* Самоафінні сингулярні та ніде не монотонні функції, пов'язані з Q-зображенням дійсних чисел // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, 3. – С. 405–417.

[4] *Климчук С. О., Працьовитий М. В.* Про один клас ніде не монотонних функцій з фрактальними властивостями, який містить підклас сингулярних // Збірник праць Інституту математики НАН України. – 2017. – **14**, 4.– С. 19–33.

[5] *Кравченко В. Ф., Масюк В. М.* Современные методы аппроксимации в теории антенн. Кн. 3. Новый класс фрактальных функций в задачах анализа и синтеза антенн. – Москва : ИПРЖР (Издательское предприятие редакции журнала "Радиотехника"), 2002. – ISBN: 5-93108-021-X.

[6] *Осауленко Р. Ю.* Група неперервних перетворень відрізка [0;1], які зберігають частоти Q_s-зображення числа // Збірник праць Інституту математики НАН України. – 2016. – **13**, 3. – С. 191–204.

[7] *Осауленко Р. Ю.* Узагальнення класичної похідної функції в точці і його застосування // Збірник праць інституту матеметики НАН України. – 2018. – **15**, № 1. – С. 100–113.

[8] *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. – Київ: НПУ імені М.П.Драгоманова, 1998. – 296 с.

[9] *Працьовитий М. В.* Ніде не монотонні сингулярні функції // Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки. – 2011. – № 12. – С.24–36.

[10] *Працьовитий М. В., Свинчук О. В.* Один клас неперервних ніде не монотонних функцій з автомодельними властивостями // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1:Фізико-математичні науки. – 2014. – № 16(2). – С. 81-93.

[11] Працьовитий М. В., Свинчук О. В. Розсіювання значень однієї фрактальної неперервної немонотонної функції канторівського типу // Нелінійні коливання. – 2018. – **21**, 1. – С. 116-130.

[12] *Працьовитий М. В., Фещенко О. Ю.* Математичні моделі двосторонніх динамічних конфліктів і Q-представлення чисел // Наук. записки НПУ ім. М.П. Драгоманова. Фіз.-мат. науки. – 2003. – № 4. – С. 260-269.

[13] *Турбин А. Ф., Працевитый Н. В.* Фрактальные множества, функции, распределения. – Київ: Наук. думка, 1992. — 205 с.