Збірник праць Інституту математики НАН України 2019, т. 16, № 2, 101–120

УДК 511.7+517.5

Сингулярні монотонні функції, які визначаються збіжним рядом і двічі стохастичною матрицею

В. П. Маркітан

Інститут математики НАН України, Київ;
v.p.markitan@npu.edu.ua

The paper considers functions, which are defined by

$$F(x) = \overline{\Delta}^2_{a_1(x)a_2(x)\ldots a_n(x)\ldots} = \Delta_{a_1(x)a_2(x)\ldots a_n(x)\ldots} = y,$$

where $\overline{\Delta}^2_{a_1a_2\ldots a_n\ldots} = \frac{2}{3} + \frac{\alpha_1}{(-2)^1} + \frac{\alpha_2}{(-2)^2} + \frac{\alpha_3}{(-2)^3} + \ldots$ is the binary nega-positional representation of the number on the interval $[0;1]$, $\Delta_{a_1a_2\ldots a_n\ldots}$ is the Markov representation determined by the positive doubly-stochastic matrix

$$\|p_{ik}\| = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{pmatrix}.$$

The singularity and self-similar properties of the functions are established. Functional relations between them are found.

Використовуючи дві двосимвольні системи зображення дробової частини дійсного числа (нега-двійкову й марковську), досліджуються функції, означені рівністю

$$F(x) = \overline{\Delta}^2_{a_1(x)a_2(x)\ldots a_n(x)\ldots} = \Delta_{a_1(x)a_2(x)\ldots a_n(x)\ldots} = y,$$

де $\overline{\Delta}^2_{a_1a_2\ldots a_n\ldots} = \frac{2}{3} + \frac{\alpha_1}{(-2)^1} + \frac{\alpha_2}{(-2)^2} + \frac{\alpha_3}{(-2)^3} + \ldots$ – нега-двійкове зображення, $\Delta_{a_1a_2\ldots a_n\ldots}$ – марковське зображення, визначене двічі стохастичною матрицею

$$\|p_{ik}\| = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{pmatrix}.$$

Встановлюється факт їхньої сингулярності й автомодельні властивості; наводяться функціональні співвідношення, які вони задовольняють.

Вступ

Сингулярно неперервні функції, пов'язані з ланцюгами Маркова, є актуальним об'єктом дослідження для теорії розподілів випадкових величин (зокрема нескінченних згорток Бернуллі), теорії функцій, а також фрактального аналізу функцій і ймовірнісних мір [2, 6, 7]. Інтерес до них підвищується завдяки розвитку геометрії числових рядів, яка вивчає тополого-метричні і фрактальні властивості множин неповних сум абсолютно збіжних числових рядів, їхні арифметичні суми тощо. Потужним інструментом (знаряддям) розвитку теорії неперервних функцій із неоднорідною локальною поведінкою, з всюди розривними зі всюди щільними множинами особливостей різного роду є різні зображення дійсних чисел у тій чи іншій системі їхнього кодування засобами як скінченного, так і нескінченного, як сталого, так і змінного алфавітів.

У цій роботі використовуються дві двосимвольні топологічно еквівалентні системи кодування чисел засобами алфавіту $A = \{0, 1\}$, а саме: нега-двійкову, яка насправді дає перекодування класичного двійкового зображення чисел, а також марковське зображення [1], яке визначається двічі стохастичною матрицею, для задання і вивчення функції, яка отримується прямим проектуванням цифр першого зображення у цифри другого зображення.

1 Об'єкт дослідження

Вважаємо заданими:

1) $1 = \frac{2}{3} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(-2)^n} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \ldots$ – нормований знакопочережний двійковий ряд, який визначає нега-двійкове зображення чисел відрізка $[0; 1]$:

$$x = \frac{2}{3} + \frac{\alpha_1(x)}{(-2)^1} + \frac{\alpha_2(x)}{(-2)^2} + \frac{\alpha_3(x)}{(-2)^3} + \ldots + \equiv \overline{\Delta}^2_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)\ldots};$$

2) додатна двічі стохастична матриця

$$\|p_{ik}\| = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{pmatrix},$$

тобто $p_{ij} > 0,\ p_{i0} + p_{i1} = 1,\ p_{0j} + p_{1j} = 1,\ i = 0, 1,\ j = 0, 1;$

3) вектор $\overline{p} = (p_0; p_1)$, $p_0 = \frac{p_{10}}{p_{01}+p_{10}} = \frac{1}{2}$ і $p_1 = \frac{p_{01}}{p_{01}+p_{10}} = \frac{1}{2}$.

Відомо [5], що нега-двійкове зображення числа є перекодуванням класичного двійкового зображення:

$$x = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \ldots + \frac{a_n}{2^n} + \ldots \equiv \Delta^2_{a_1(x)a_2(x)\ldots a_n(x)\ldots}, \quad a_n \in \{0;1\},$$

оскільки

$$x = \overline{\Delta}^2_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)\ldots} = \Delta^2_{[1-\alpha_1(x)]\alpha_2(x)\ldots[1-\alpha_{2k-1}(x)]\alpha_{2k}(x)\ldots}.$$

Розглядається функція F, означена рівністю

$$F(x) = F(\overline{\Delta}^2_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)\ldots}) =$$
$$\beta_{\alpha_1(x)} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(\beta^{(k)}_{\alpha_k(x)\alpha_{k+1}(x)}\prod_{i=1}^{k-1}p_{\alpha_i(x)\alpha_{i+1}(x)}), \quad \text{де} \quad (1)$$

$$\beta_{\alpha_1(x)} = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad \alpha_1(x) = 1, \\ \frac{1}{2}, & \text{якщо} \quad \alpha_1(x) = 0, \end{cases}$$

$$\beta^{(2n-1)}_{\alpha_{2n-1}(x)\alpha_{2n}(x)} = \beta^{(1)}_{\alpha_{2n-1}(x)\alpha_{2n}(x)} = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad \alpha_{2n}(x) = 0, \\ p_{00}, & \text{якщо} \quad \alpha_{2n-1}(x) \neq \alpha_{2n}(x) = 1, \\ p_{10}, & \text{якщо} \quad \alpha_{2n-1}(x) = \alpha_{2n}(x) = 1, \end{cases}$$

$$\beta^{(2n)}_{\alpha_{2n}(x)\alpha_{2n+1}(x)} = \beta^{(0)}_{\alpha_{2n}(x)\alpha_{2n+1}(x)} = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad \alpha_{2n+1}(x) = 1, \\ p_{01}, & \text{якщо} \quad \alpha_{2n}(x) = \alpha_{2n+1}(x) = 0, \\ p_{00}, & \text{якщо} \quad \alpha_{2n}(x) \neq \alpha_{2n+1}(x) = 0, \end{cases}$$

і $\alpha_k(x)$ є k-ою нега-двійковою цифрою зображення числа x.

2 Задачі та результати

Означення 2.1. Нехай $(c_1, c_2, \ldots, c_m)-$ упорядкований набір 0 й 1. Циліндром рангу m із основою $c_1c_2\ldots c_m$ називається множина $\overline{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_m}$ чисел $x \in [0;1]$, перші m цифр нега-двійкового зображення яких є $c_1, c_2, \ldots, c_m$ відповідно, тобто

$$\overline{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_m\ldots} = \left\{x: \ x = \overline{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_m a_{m+1}a_{m+2}\ldots}, \quad a_{m+i} \in \{0;1\}, \ i = 1,2,3,\ldots\right\}.$$

Лема 2.1. *Для функції F, означеної рівністю* (1), *образом циліндра $\overline{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_m}$ нега-двійкового зображення є відрізок $[a;b]$, де*

$$a = \beta_{c_1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1}\left(\beta^{(k)}_{c_kc_{k+1}}\prod_{j=1}^{k-1}q_{c_jc_{j+1}}\right), \qquad b = a + \frac{1}{2}\prod_{j=1}^{m-1}q_{c_jc_{j+1}}.$$

Доведення. Зрозуміло, що m може бути як парним, так і непарним.

Нехай $m=2k-1$. Тоді $\overline{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_m}=[\overline{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_m(01)};\overline{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_m(10)}]$ і

$$F(\overline{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_m(01)})=\beta_{c_1}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1}\left(\beta^{(k)}_{c_kc_{k+1}}\prod_{j=1}^{k-1}q_{c_jc_{j+1}}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\beta^{(1)}_{c_m0}\prod_{j=1}^{m-1}q_{c_jc_{j+1}}+\frac{1}{2}\beta^{(0)}_{01}\prod_{j=1}^{m}q_{c_jc_{j+1}}+\frac{1}{2}\beta^{(1)}_{10}\prod_{j=1}^{m+1}q_{c_jc_{j+1}}+\ldots=$$

$$=\beta_{c_1}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1}\left(\beta^{(k)}_{c_kc_{k+1}}\prod_{j=1}^{k-1}q_{c_jc_{j+1}}\right)+0+0+\ldots=$$

$$=\beta_{c_1}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1}\left(\beta^{(k)}_{c_kc_{k+1}}\prod_{j=1}^{k-1}q_{c_jc_{j+1}}\right).$$

$$F(\overline{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_m(10)})=\beta_{c_1}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1}\left(\beta^{(k)}_{c_kc_{k+1}}\prod_{j=1}^{k-1}q_{c_jc_{j+1}}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\beta^{(1)}_{c_m1}\prod_{j=1}^{m-1}q_{c_jc_{j+1}}+\frac{1}{2}\beta^{(0)}_{10}\prod_{j=1}^{m}q_{c_jc_{j+1}}+\frac{1}{2}\beta^{(1)}_{01}\prod_{j=1}^{m+1}q_{c_jc_{j+1}}\ldots=\beta_{c_1}+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1}\left(\beta^{(k)}_{c_kc_{k+1}}\prod_{j=1}^{k-1}q_{c_jc_{j+1}}\right)+\frac{1}{2}p_{c_m0}\prod_{j=1}^{m-1}q_{c_jc_{j+1}}+\frac{1}{2}p_{00}p_{c_m1}\cdot$$

$$\cdot\prod_{j=1}^{m-1}q_{c_jc_{j+1}}+\frac{1}{2}p_{00}p_{c_m1}p_{01}\prod_{j=1}^{m-1}q_{c_jc_{j+1}}+\ldots=\beta_{c_1}+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1}\left(\beta^{(k)}_{c_kc_{k+1}}\prod_{j=1}^{k-1}q_{c_jc_{j+1}}\right)+\frac{1}{2}p_{c_m0}\prod_{j=1}^{m-1}q_{c_jc_{j+1}}+\frac{1}{2}p_{00}p_{c_m1}\cdot$$

$$\cdot(1+p_{10}+p_{10}^2+\ldots)\prod_{j=1}^{m-1}q_{c_jc_{j+1}}=\beta_{c_1}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1}\left(\beta^{(k)}_{c_kc_{k+1}}\prod_{j=1}^{k-1}q_{c_jc_{j+1}}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}p_{c_m0}\prod_{j=1}^{m-1}q_{c_jc_{j+1}}+\frac{1}{2}p_{00}p_{c_m1}\frac{1}{1-p_{10}}\prod_{j=1}^{m-1}q_{c_jc_{j+1}}=$$

$$=\beta_{c_1}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1}\left(\beta^{(k)}_{c_kc_{k+1}}\prod_{j=1}^{k-1}q_{c_jc_{j+1}}\right)+\frac{1}{2}\prod_{j=1}^{m-1}q_{c_jc_{j+1}}.$$

Нехай $m=2k$. Тоді $\overline{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_m}=[\overline{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_m(10)};\overline{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_m(01)}]$ і

$$F(\overline{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_m(10)})=\beta_{c_1}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1}\left(\beta^{(k)}_{c_kc_{k+1}}\prod_{j=1}^{k-1}q_{c_jc_{j+1}}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\beta^{(0)}_{c_m1}\prod_{j=1}^{m-1}q_{c_jc_{j+1}}+\frac{1}{2}\beta^{(1)}_{10}\prod_{j=1}^{m}q_{c_jc_{j+1}}+\frac{1}{2}\beta^{(0)}_{01}\prod_{j=1}^{m+1}q_{c_jc_{j+1}}+\ldots=\beta_{c_1}+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1}\left(\beta^{(k)}_{c_kc_{k+1}}\prod_{j=1}^{k-1}q_{c_jc_{j+1}}\right)+0+0+\ldots=$$

$$=\beta_{c_1}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1}\left(\beta^{(k)}_{c_kc_{k+1}}\prod_{j=1}^{k-1}q_{c_jc_{j+1}}\right).$$

$$F(\overline{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_m(01)})=\beta_{c_1}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1}\left(\beta^{(k)}_{c_kc_{k+1}}\prod_{j=1}^{k-1}q_{c_jc_{j+1}}\right)+\frac{1}{2}\beta^{(0)}_{c_m0}\prod_{j=1}^{m-1}q_{c_jc_{j+1}}+$$

$$+\frac{1}{2}\beta^{(1)}_{01}\prod_{j=1}^{m}q_{c_jc_{j+1}}+\frac{1}{2}\beta^{(0)}_{10}\prod_{j=1}^{m+1}q_{c_jc_{j+1}}\ldots=\beta_{c_1}+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1}\left(\beta^{(k)}_{c_kc_{k+1}}\prod_{j=1}^{k-1}q_{c_jc_{j+1}}\right)++\frac{1}{2}p_{0[1-c_m]}\prod_{j=1}^{m-1}q_{c_jc_{j+1}}+\frac{1}{2}p_{00}p_{c_m0}\cdot$$

$$\cdot\prod_{j=1}^{m-1}q_{c_jc_{j+1}}+\frac{1}{2}p_{00}p_{c_m0}p_{01}\prod_{j=1}^{m-1}q_{c_jc_{j+1}}+\ldots=$$

$$=\beta_{c_1}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1}\left(\beta^{(k)}_{c_kc_{k+1}}\prod_{j=1}^{k-1}q_{c_jc_{j+1}}\right)+\frac{1}{2}\prod_{j=1}^{m-1}q_{c_jc_{j+1}}.$$

Покажемо, що для будь-якої точки $x \in \overline{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_m}$ значення функції $F(x)$ належить $[a;b]$. Так, нехай $x = \overline{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_m\ldots}$, причому

$$\overline{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_m(10)} \neq x \neq \overline{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_m(01)}.$$

Маємо

$$F(x) = \beta_{c_1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1}\left(\beta^{(k)}_{c_kc_{k+1}}\prod_{j=1}^{k-1} q_{c_jc_{j+1}}\right) + \\ + \beta^{(m)}_{c_mc_{m+1}}\prod_{j=1}^{m-1} q_{c_jc_{j+1}} + \beta^{(m+1)}_{c_{m+1}c_{m+2}}\prod_{j=1}^{m} q_{c_jc_{j+1}} + \ldots = a + C.$$

Припустимо, що $C = 0$, що відповідно означає, що x є однією з точок ($\overline{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_m(10)}$ або $\overline{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_m(01)}$), що неможливо у зв'язку з накладеною вище умовою, тому $C > 0$, а отже, $a < F(x)$.

Покажемо, що $F(x) < b$. Розглянемо кожен із можливих випадків для для $\overline{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_m}$:

1) $m = 2k - 1$. Маємо $b = F(\overline{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_m(10)})$. Розглянемо різницю $F(\overline{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_m(10)}) - F(x)$ і покажемо, що вона додатна. Справді,

$$F(\overline{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_m(10)}) - F(x) = \beta_{c_1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1}\left(\beta^{(k)}_{c_kc_{k+1}}\prod_{j=1}^{k-1} q_{c_jc_{j+1}}\right) +$$

$$\frac{1}{2}\beta^{(1)}_{c_m1}\prod_{j=1}^{m-1} q_{c_jc_{j+1}} + \frac{1}{2}\beta^{(0)}_{10}\prod_{j=1}^{m} q_{c_jc_{j+1}} + \frac{1}{2}\beta^{(1)}_{01}\prod_{j=1}^{m+1} q_{c_jc_{j+1}}\ldots -$$

$$-(\beta_{c_1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1}\left(\beta^{(k)}_{c_kc_{k+1}}\prod_{j=1}^{k-1} q_{c_jc_{j+1}}\right) + \frac{1}{2}\beta^{(1)}_{c_{m[m+1]}}\prod_{j=1}^{m-1} q_{c_jc_{j+1}} +$$

$$+\frac{1}{2}\beta^{(0)}_{c_{[m+1][m+2]}}\prod_{j=1}^{m} q_{c_jc_{j+1}} + \frac{1}{2}\beta^{(1)}_{c_{[m+2][m+3]}}\prod_{j=1}^{m+1} q_{c_jc_{j+1}}\ldots) =$$

$$= \frac{1}{2}\prod_{j=1}^{m-1} q_{c_jc_{j+1}}((\beta^{(1)}_{c_m1} - \beta^{(1)}_{c_{m[m+1]}}) + (\beta^{(0)}_{10}q_{c_m1} - \beta^{(0)}_{c_{[m+1][m+2]}}q_{c_{m[m+1]}}) +$$

$$+(\beta^{(1)}_{10}q_{c_m1}q_{10}-\beta^{(1)}_{c_{[m+2][m+3]}}q_{c_{m[m+1]}}q_{c_{[m+1][m+2]}})+\ldots)>0,$$

оскільки принаймні в одній із дужок останнього виразу різниця буде додатна. Це означає, що $F(\overline{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_m(10)})>F(x)$, тобто $b>F(x)$.

2) $m=2k$. Маємо $b=F(\overline{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_m(01)})$.

Розглянемо різницю $F(\overline{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_m(01)})-F(x)$ і покажемо, що вона додатна. Справді,

$$F(\overline{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_m(01)})-F(x)=\beta_{c_1}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1}\left(\beta^{(k)}_{c_kc_{k+1}}\prod_{j=1}^{k-1}q_{c_jc_{j+1}}\right)+$$

$$\frac{1}{2}\beta^{(0)}_{c_m0}\prod_{j=1}^{m-1}q_{c_jc_{j+1}}+\frac{1}{2}\beta^{(1)}_{01}\prod_{j=1}^{m}q_{c_jc_{j+1}}+\frac{1}{2}\beta^{(0)}_{10}\prod_{j=1}^{m+1}q_{c_jc_{j+1}}\ldots-$$

$$-(\beta_{c_1}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1}\left(\beta^{(k)}_{c_kc_{k+1}}\prod_{j=1}^{k-1}q_{c_jc_{j+1}}\right)+\frac{1}{2}\beta^{(0)}_{c_{m[m+1]}}\prod_{j=1}^{m-1}q_{c_jc_{j+1}}+$$

$$+\frac{1}{2}\beta^{(1)}_{c_{[m+1][m+2]}}\prod_{j=1}^{m}q_{c_jc_{j+1}}+\frac{1}{2}\beta^{(0)}_{c_{[m+2][m+3]}}\prod_{j=1}^{m+1}q_{c_jc_{j+1}}\ldots)=$$

$$=\frac{1}{2}\prod_{j=1}^{m-1}q_{c_jc_{j+1}}((\beta^{(0)}_{c_m0}-\beta^{(0)}_{c_{m[m+1]}})+(\beta^{(1)}_{01}q_{c_m1}-\beta^{(1)}_{c_{[m+1][m+2]}}q_{c_{m[m+1]}})+$$

$$+(\beta^{(0)}_{01}q_{c_m1}q_{01}-\beta^{(0)}_{c_{[m+2][m+3]}}q_{c_{m[m+1]}}q_{c_{[m+1][m+2]}})+\ldots)>0,$$

оскільки принаймні в одній із дужок останнього виразу різниця буде додатна. Це означає, що $F(\overline{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_m(10)})>F(x)$, тобто $b>F(x)$. Лему доведено. □

Теорема 2.1. *Образи різних циліндрів одного рангу при відображенні F не перекриваються і в об'єднанні дають увесь відрізок* $[0,1]$.

Доведення. Розглянемо циліндри першого рангу: $\overline{\Delta}^2_0$ та $\overline{\Delta}^2_1$. Згідно з лемою (2.1) маємо

$$F(\overline{\Delta}^2_0)=[a_1,b_1],\ \text{де}\ a_1=\beta_0=\frac{1}{2},\quad b_1=a_1+\frac{1}{2}=1;$$

$$F(\overline{\Delta}^2_1) = [a_2, b_2], \text{ де } a_2 = \beta_1 = 0, \quad b_2 = a_2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2};$$

звідки $F(\overline{\Delta}^2_0) \cap F(\overline{\Delta}^2_1) = [\frac{1}{2}, 1] \cap [0, \frac{1}{2}] = \frac{1}{2}$ і $F(\overline{\Delta}^2_0) \cup F(\overline{\Delta}^2_1) = [\frac{1}{2}, 1] \cup$ $\cup [0, \frac{1}{2}] = [0, 1]$.

Розглянемо циліндри другого рангу: $\overline{\Delta}^2_{00}$, $\overline{\Delta}^2_{01}$, $\overline{\Delta}^2_{10}$, $\overline{\Delta}^2_{11}$.

Згідно з лемою (2.1) маємо

$$F(\overline{\Delta}^2_{00}) = [c_1, d_1], \text{ де } c_1 = \beta_0 + \frac{1}{2}\beta^{(1)}_{00} = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}, \quad d_1 = c_1 + \frac{1}{2}q_{00} = \frac{1}{2} + \frac{p_{00}}{2};$$

$$F(\overline{\Delta}^2_{01}) = [c_2, d_2], \text{ де } c_2 = \beta_0 + \frac{1}{2}\beta^{(1)}_{01} = \frac{1}{2} + \frac{p_{00}}{2}, \quad d_2 = c_2 + \frac{1}{2}q_{01} = \\ = \frac{1}{2} + \frac{p_{00}}{2} + \frac{p_{00}}{2} = 1;$$

$$F(\overline{\Delta}^2_{10}) = [c_3, d_3], \text{ де } c_3 = \beta_1 + \frac{1}{2}\beta^{(1)}_{10} = 0 + 0 = 0, \quad d_3 = c_3 + \frac{1}{2}q_{10} = \\ = 0 + \frac{1}{2}p_{10} = \frac{1}{2}p_{01};$$

$$F(\overline{\Delta}^2_{11}) = [c_4, d_4], \text{ де } c_4 = \beta_1 + \frac{1}{2}\beta^{(1)}_{11} = 0 + \frac{1}{2}p_{10} = \frac{1}{2}p_{01}, \quad d_4 = c_4 + \frac{1}{2}q_{11} = \\ = \frac{1}{2}p_{01} + \frac{1}{2}p_{00} = \frac{1}{2},$$

звідки $F(\overline{\Delta}^2_{00}) \cap F(\overline{\Delta}^2_{01}) = [\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{p_{00}}{2}] \cap [\frac{1}{2} + \frac{p_{00}}{2}, 1] = \frac{1}{2} + \frac{p_{00}}{2}$,

$$F(\overline{\Delta}^2_{11}) \cap F(\overline{\Delta}^2_{10}) = [\frac{1}{2}p_{10}, \frac{1}{2}] \cap [0, \frac{1}{2}p_{10}] = \frac{1}{2}p_{10},$$

$$F(\overline{\Delta}^2_{11}) \cap F(\overline{\Delta}^2_{00}) = F(\overline{\Delta}^2_{10}) \cap F(\overline{\Delta}^2_{01}) = F(\overline{\Delta}^2_{10}) \cap F(\overline{\Delta}^2_{11}) = \varnothing$$

та $F(\overline{\Delta}^2_{00}) \cup F(\overline{\Delta}^2_{01}) \cup F(\overline{\Delta}^2_{10}) \cup F(\overline{\Delta}^2_{10}) = [0, 1]$.

Для повного доведення твердження досить показати, що циліндри

$$\overline{\Delta}^2_{c_1 c_2 \ldots c_m 0} \text{ і } \overline{\Delta}^2_{c_1 c_2 \ldots c_m 1}$$

не перекриваються.

Дійсно, при $m = 2k - 1$ маємо $F(\overline{\Delta}^2_{c_1 c_2 \ldots c_m 0}) = [a, b]$, де

$$a = \beta_{c_1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1}\left(\beta^{(k)}_{c_k c_{k+1}} \prod_{j=1}^{k-1} q_{c_j c_{j+1}}\right) + \frac{1}{2}\beta^{(1)}_{c_m 0} \prod_{j=1}^{m-1} q_{c_j c_{j+1}} = \beta_{c_1} +$$

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1}\left(\beta^{(k)}_{c_k c_{k+1}}\prod_{j=1}^{k-1} q_{c_j c_{j+1}}\right),$$

$$b = a + \frac{1}{2}\prod_{j=1}^{m} q_{c_j c_{j+1}} = \beta_{c_1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1}\left(\beta^{(k)}_{c_k c_{k+1}}\prod_{j=1}^{k-1} q_{c_j c_{j+1}}\right) + \frac{1}{2}\prod_{j=1}^{m} q_{c_j c_{j+1}} =$$

$$= \beta_{c_1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1}\left(\beta^{(k)}_{c_k c_{k+1}}\prod_{j=1}^{k-1} q_{c_j c_{j+1}}\right) + \frac{1}{2}p_{c_m 0}\prod_{j=1}^{m-1} q_{c_j c_{j+1}} =$$

$$\beta_{c_1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1}\left(\beta^{(k)}_{c_k c_{k+1}}\prod_{j=1}^{k-1} q_{c_j c_{j+1}}\right) + \frac{1}{2}\beta^{(1)}_{c_m 1}\prod_{j=1}^{m-1} q_{c_j c_{j+1}}.$$

$F(\overline{\Delta}^2_{c_1 c_2 \ldots c_m 1}) = [c, d]$, де

$$c = \beta_{c_1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1}\left(\beta^{(k)}_{c_k c_{k+1}}\prod_{j=1}^{k-1} q_{c_j c_{j+1}}\right) + \frac{1}{2}\beta^{(1)}_{c_m 1}\prod_{j=1}^{m-1} q_{c_j c_{j+1}} =$$

$$= \beta_{c_1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\left(\beta^{(k)}_{c_k c_{k+1}}\prod_{j=1}^{k-1} q_{c_j c_{j+1}}\right),$$

$$d = c + \frac{1}{2}\prod_{j=1}^{m} q_{c_j c_{j+1}} = \beta_{c_1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\left(\beta^{(k)}_{c_k c_{k+1}}\prod_{j=1}^{k-1} q_{c_j c_{j+1}}\right) + \frac{1}{2}\prod_{j=1}^{m} q_{c_j c_{j+1}}.$$

Враховуючи геометрію циліндрів ($\overline{\Delta}^2_{c_1 c_2 \ldots c_m 0}$ зліва від $\overline{\Delta}^2_{c_1 c_2 \ldots c_m 1}$) і $b = c$, маємо, що циліндри $\overline{\Delta}^2_{c_1 c_2 \ldots c_m 0}$ та $\overline{\Delta}^2_{c_1 c_2 \ldots c_m 1}$ не перекриваються для $m = 2k-1$.

При $m = 2k$ маємо $F(\overline{\Delta}^2_{c_1 c_2 \ldots c_m 0}) = [a, b]$, де

$$a = \beta_{c_1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1}\left(\beta^{(k)}_{c_k c_{k+1}}\prod_{j=1}^{k-1} q_{c_j c_{j+1}}\right) + \frac{1}{2}\beta^{(0)}_{c_m 0}\prod_{j=1}^{m-1} q_{c_j c_{j+1}} = \beta_{c_1} +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\left(\beta^{(k)}_{c_k c_{k+1}}\prod_{j=1}^{k-1} q_{c_j c_{j+1}}\right),$$

$$b = a + \frac{1}{2}\prod_{j=1}^{m} q_{c_j c_{j+1}} = \beta_{c_1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\left(\beta^{(k)}_{c_k c_{k+1}}\prod_{j=1}^{k-1} q_{c_j c_{j+1}}\right) + \frac{1}{2}\prod_{j=1}^{m} q_{c_j c_{j+1}}.$$

$F(\overline{\Delta}^2_{c_1 c_2 \ldots c_m 1}) = [c, d]$, де

$$c = \beta_{c_1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1}\left(\beta^{(k)}_{c_k c_{k+1}}\prod_{j=1}^{k-1} q_{c_j c_{j+1}}\right) + \frac{1}{2}\beta^{(0)}_{c_m 1}\prod_{j=1}^{m-1} q_{c_j c_{j+1}} = \beta_{c_1} +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1}\left(\beta^{(k)}_{c_kc_{k+1}}\prod_{j=1}^{k-1}q_{c_jc_{j+1}}\right),$$

$$d = c+\frac{1}{2}\prod_{j=1}^{m}q_{c_jc_{j+1}} = \beta_{c_1}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1}\left(\beta^{(k)}_{c_kc_{k+1}}\prod_{j=1}^{k-1}q_{c_jc_{j+1}}\right)+\frac{1}{2}\prod_{j=1}^{m}q_{c_jc_{j+1}} =$$

$$= \beta_{c_1}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1}\left(\beta^{(k)}_{c_kc_{k+1}}\prod_{j=1}^{k-1}q_{c_jc_{j+1}}\right)+\frac{1}{2}p_{c_m1}\prod_{j=1}^{m-1}q_{c_jc_{j+1}} =$$

$$= \beta_{c_1}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1}\left(\beta^{(k)}_{c_kc_{k+1}}\prod_{j=1}^{k-1}q_{c_jc_{j+1}}\right)+\frac{1}{2}\beta^{(0)}_{c_m0}\prod_{j=1}^{m-1}q_{c_jc_{j+1}}.$$

Враховуючи геометрію циліндрів ($\overline{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_m0}$ справа від $\overline{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_m1}$) і $d = a$, маємо, що циліндри $\overline{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_m0}$ та $\overline{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_m1}$ не перекриваються для $m = 2k$. Теорему доведено. □

Теорема 2.2. *Функція $F(x)$, означена рівністю (1), є:*

1) коректно означеною,

2) неперервною,

3) строго зростаючою,

4) причому лінійною при $p_{00} = 0,5$ і сингулярною при $p_{00} \neq 0,5$ (має похідну, яка дорівнює нулю майже скрізь у розумінні міри Лебега).

Доведення. 1) Збіжність ряду (1), що є виразом функції, очевидна. Оскільки числа зі зліченної підмножини відрізка $[0;1]$ мають два нега-двійкові зображення

$$\overline{\Delta}^2_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m0(01)} \text{ і } \overline{\Delta}^2_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m1(10)},$$

то коректність могла би порушитись, якби вираз функції $F(x)$ від двох різних зображень того самого числа набував різних значень. Покажемо, що це не так.

Введемо позначення

$$A = p_{\alpha_1}p_{\alpha_1\alpha_2}p_{\alpha_2\alpha_3}\ldots p_{\alpha_{m-1}\alpha_m}$$

і розглянемо різницю

$$\delta \equiv F(\overline{\Delta}^2_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m0(01)}) - F(\overline{\Delta}^2_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m1(10)}).$$

Покажемо, що ця різниця дорівнює 0.

Розглянемо значення виразу δ для кожного з можливих випадків.

1. Нехай $m = 2n-1,\ n \in \mathbb{N}$. Тоді маємо

$$\delta = F(\overline{\Delta}^2_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m 0(01)}) - F(\overline{\Delta}^2_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m 1(10)}) =$$
$$= A[\beta^{(1)}_{\alpha_m 0} + \beta^{(0)}_{00} p_{\alpha_m 0} + \beta^{(1)}_{01} p_{\alpha_m 0} p_{00} + \beta^{(0)}_{10} p_{\alpha_m 0} p_{00} p_{01} +$$
$$+ \beta^{(1)}_{01} p_{\alpha_m 0} p_{00} p_{01} p_{10} + \ldots - (\beta^{(1)}_{\alpha_m 1} + \beta^{(0)}_{11} p_{\alpha_m 1} +$$
$$+ \beta^{(1)}_{10} p_{\alpha_m 1} p_{11} + \beta^{(0)}_{01} p_{\alpha_m 1} p_{11} p_{01} + \beta^{(1)}_{10} p_{\alpha_m 1} p_{11} p_{10} p_{01} + \ldots)] =$$
$$= A[0 + p_{\alpha_m 0}(p_{01} + p_{00} p_{00} + p_{00} p_{00} p_{01} + p_{00} p_{00} p_{01} p_{10} \ldots) -$$
$$-(\beta^{(1)}_{\alpha_m 1} + 0 + 0 + 0 + \ldots)] = A[p_{\alpha_m 0}(p_{01} + \frac{p_{00}^2}{1 - p_{01}}) - \beta^{(1)}_{\alpha_m 1}] =$$
$$= A[p_{\alpha_m 0} - \beta^{(1)}_{\alpha_m 1}].$$

При $\alpha_m = 0$ отримуємо $p_{\alpha_m 0} - \beta^{(1)}_{\alpha_m 1} = p_{00} - \beta^{(1)}_{01} = p_{00} - p_{00} = 0$, а при $\alpha_m = 1 - p_{\alpha_m 0} - \beta^{(1)}_{\alpha_m 1} = p_{10} - \beta^{(1)}_{11} = p_{10} - p_{01} = 0$. Тому

$$\delta = F(\overline{\Delta}^2_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m 0(01)}) - F(\overline{\Delta}^2_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m 1(10)}) = 0.$$

2. Нехай $m = 2n,\ n \in \mathbb{N}$. Тоді маємо

$$\delta = F(\overline{\Delta}^2_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m 0(01)}) - F(\overline{\Delta}^2_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m 1(10)}) =$$
$$= A[\beta^{(0)}_{\alpha_m 0} + \beta^{(1)}_{00} p_{\alpha_m 0} + \beta^{(0)}_{01} p_{\alpha_m 0} p_{00} + \beta^{(1)}_{10} p_{\alpha_m 0} p_{00} p_{01} +$$
$$+ \beta^{(1)}_{01} p_{\alpha_m 0} p_{00} p_{01} p_{10} + \ldots - (\beta^{(0)}_{\alpha_m 1} + \beta^{(1)}_{11} p_{\alpha_m 1} + \beta^{(0)}_{10} p_{\alpha_m 1} p_{11} +$$
$$+ \beta^{(1)}_{01} p_{\alpha_m 1} p_{11} p_{01} + \beta^{(0)}_{10} p_{\alpha_m 1} p_{11} p_{10} p_{01} + \ldots)] == A[\beta^{(0)}_{\alpha_m 0} + 0 + 0 +$$
$$+ 0 + 0 - (0 + p_{\alpha_m 1}(p_{10} + p_{00} p_{11} + p_{00} p_{11} p_{10} + p_{00} p_{11} p_{10} p_{01} \ldots)] =$$
$$= A[\beta^{(0)}_{\alpha_m 0} - p_{\alpha_m 1}(p_{10} + \frac{p_{11}^2}{1 - p_{10}})] = A[\beta^{(0)}_{\alpha_m 0} - p_{\alpha_m 1}],$$

звідки за умови $\alpha_m = 0$ маємо $\beta^{(0)}_{\alpha_m 0} - p_{\alpha_m 1} = \beta^{(0)}_{00} - p_{01} = p_{01} - p_{01} = 0$. Якщо $\alpha_m = 1$, то $\beta^{(0)}_{\alpha_m 0} - p_{\alpha_m 1} = \beta^{(0)}_{10} - p_{11} = p_{00} - p_{11} = p_{11} - p_{11} = 0$. Тому

$$\delta = F(\overline{\Delta}^2_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m 0(01)}) - F(\overline{\Delta}^2_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m 1(10)}) = 0$$

і функція $F(x)$ є коректно означеною.

2) Нехай $x_0 = \overline{\Delta}^2_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)\ldots}$ – довільне число з $[0;1]$. Для доведення неперервності F у точці x_0 досить показати, що

$$\lim_{x\to x_0} |F(x) - F(x_0)| = 0.$$

1. Спочатку розглянемо випадок, коли x_0 — нега-двійково-ірраціональна точка. Для довільного $x \in [0,1]$, $x \neq x_0$, існує $m = m(x)$, таке, що

$$\begin{cases} \alpha_i(x) = \alpha_i(x_0), \quad i = \overline{1, m-1}, \\ \alpha_m(x) \neq \alpha_m(x_0). \end{cases}$$

Тоді

$$F(x) - F(x_0) = \frac{1}{2}\left(\prod_{i=1}^{m-1} p_{\alpha_i(x_0)\alpha_{i+1}(x_0)}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\beta^{(m)}_{\alpha_m(x)\alpha_{m+1}(x)} + \sum_{k=m+1}^{\infty}\beta^{(k)}_{\alpha_k(x)\alpha_{k+1}(x)}\prod_{j=m}^{k-1} p_{\alpha_i(x)\alpha_{i+1}(x)}\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\left(\prod_{i=1}^{m-1} p_{\alpha_i(x_0)\alpha_{i+1}(x_0)}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\beta^{(m)}_{\alpha_m(x_0)\alpha_{m+1}(x_0)} + \sum_{k=m+1}^{\infty}\beta^{(k)}_{\alpha_k(x_0)\alpha_{k+1}(x_0)}\prod_{j=m}^{k-1} p_{\alpha_i(x_0)\alpha_{i+1}(x_0)}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\prod_{i=1}^{m-1} p_{\alpha_i(x_0)\alpha_{i+1}(x_0)}\right)(C_1 - C_2) \to 0 \text{ при } m \to \infty,$$

де $0 \leq C_1 = \beta_{\alpha_m(x)\alpha_{m+1}(x)} + \beta_{\alpha_{m+1}(x)\alpha_{m+2}(x)}p_{\alpha_m(x)\alpha_{m+1}(x)} + \ldots < 1$,
$0 \leq C_2 = \beta_{\alpha_m(x_0)\alpha_{m+1}(x_0)} + \beta_{\alpha_{m+1}(x_0)\alpha_{m+2}(x)}p_{\alpha_m(x_0)\alpha_{m+1}(x_0)} + \ldots < 1$.

Отже,

$$\lim_{x\to x_0} F(x) = F(x_0)$$

і функція $F(x)$ є неперервною у точці x_0 за означенням.

2. У випадку, коли x_0 — нега-двійково-раціональна точка, тобто

$$\overline{\Delta}^2_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m 0(01)} = \overline{\Delta}^2_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m 1(10)},$$

можна скористатись міркуваннями з пункту 1, але при розгляді ситуації, коли x прямує до x_0 зліва, досить скористатися зображенням числа x_0 із періодом (10), а коли x прямує до x_0 справа — з періодом (01).

3) Щоб показати, що $F(x)$ строго зростає, досить довести, що приріст $u_F\left(\overline{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_m}\right)$ функції F на циліндрі $\overline{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_m}$ є додатним.

Справді,

$$u_F\left(\overline{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_m}\right) = \frac{1}{2}\prod_{j=m}^{m-1} p_{c_ic_{i+1}} > 0$$

і функція F строго зростає.

4) Покажемо, що при $p_{00} = 0,5$ функція $F(x)$ є лінійною.

Оскільки $p_{00} = 0,5$, то, враховуючи двічі стохастичність матриці, $p_{01} = p_{10} = p_{11} = p_0 + p_1 = 0,5$

Приріст функції F на циліндрі $\mu_F\left(\overline{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_m}\right)$ збігається з його довжиною. Справді,

$$\mu_F\left(\overline{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_m}\right) = \frac{1}{2}\prod_{j=m}^{m-1} p_{c_ic_{i+1}} = \frac{1}{2^m} = \left|\overline{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_m}\right|.$$

А це означає, що функція $F(x)$ лінійна, причому $F(x) = x$.

Покажемо, що при $p_{00} \neq 0,5$ функція $F(x)$ є сингулярною, тобто має похідну, яка дорівнює нулю майже скрізь у розумінні міри Лебега.

Справді, якщо похідна функції $F'(x)$ існує в точці x_0, то

$$F'(x_0) = \lim_{k\to\infty} \frac{\mu_F\left(\overline{\Delta}^2_{\alpha_1(x_0)\alpha_2(x_0)\ldots\alpha_k(x_0)}\right)}{|\overline{\Delta}^2_{\alpha_1(x_0)\ldots\alpha_k(x_0)}|},$$

але

$$\mu_F\left(\overline{\Delta}^2_{\alpha_1(x_0)\alpha_2(x_0)\ldots\alpha_k(x_0)}\right) = \frac{1}{2}\prod_{j=1}^{k-1} p_{\alpha_j(x_0)\alpha_{j+1}(x_0)},$$

а

$$|\overline{\Delta}^2_{\alpha_1(x_0)\ldots\alpha_k(x_0)}| = \frac{1}{2^k}.$$

Звідки й випливає

$$F'(x_0) = \prod_{j=1}^{\infty}\left[2p_{\alpha_j(x_0)\alpha_{j+1}(x_0)}\right] = 0, \tag{2}$$

оскільки згідно з теоремою Лебега кожна неперервна монотонна функція має скінченну похідну майже скрізь, а необхідна умова збіжності нескінченного добутку (прямування n-го члена до 1) не виконується. Отже, при $p_{00} \neq 0,5$ функція $F(x)$ сингулярна. Теорему доведено. $\square$

Теорема 2.3. *Функція $y = F(x)$, означена рівністю (1), є функцією розподілу випадкової величини ξ, цифри ξ_k нега-двійкового зображення $\overline{\Delta}^2_{\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4\ldots\xi_n\ldots}$ якої є випадковими величинами, які набувають значень 0 і 1 і утворюють однорідний ланцюг Маркова з початковими ймовірностями $\frac{1}{2}$ й $\frac{1}{2}$ і матрицею перехідних імовірностей*

$$\|p_{ik}\| = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{pmatrix}.$$

Доведення. Знайдемо вираз функції розподілу F_ξ випадкової величини ξ. Оскільки згідно з означенням $F_\xi(x) = P\{\xi < x\}$, то проаналізуємо подію $\{\xi < x\}$ і виразимо її ймовірність. Враховуючи геометрію нега-двійкового зображення чисел ($x = \overline{\Delta}^2_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)\ldots}$), маємо

$$\{\xi < x\} = \{\xi_1 > \alpha_1(x)\} \cup \{\xi_1 = a_1(x) \ \wedge\ \xi_2 < \alpha_2(x)\} \cup \ldots$$
$$\cup \{\xi_i = \alpha_i(x),\ \text{при } i = \overline{1, 2k-1} \ \wedge\ \xi_{2k} < \alpha_{2k}(x)\} \cup$$
$$\cup \{\xi_i = \alpha_i(x),\ \text{при } i = \overline{1, 2k} \ \wedge\ \xi_{2k+1} > \alpha_{2k+1}(x)\} \cup \ldots,$$

де події у правій частині рівності попарно несумісні. Тому:

$$F_\xi(x) = P\{\xi < x\} = P\big\{\{\xi_1 > \alpha_1(x)\} \cup \{\xi_1 = \alpha_1(x) \wedge \xi_2 < \alpha_2(x)\} \cup$$
$$\cup \{\xi_i = \alpha_i(x),\ \text{при } i = \overline{1, 2k-1} \ \wedge\ \xi_{2k} < \alpha_{2k}(x)\} \cup$$
$$\cup \{\xi_i = \alpha_i(x),\ \text{при } i = \overline{1, 2k} \ \wedge\ \xi_{2k+1} > \alpha_{2k+1}(x)\} \cup \ldots\big\} =$$
$$= P\{\xi_1 > \alpha_1(x)\} + + P\{\xi_1 = \alpha_1(x) \wedge \xi_2 < \alpha_2(x)\} + \ldots + P\{\xi_i = \alpha_i(x),$$
$$\text{при } i = \overline{1, 2k-1} \ \wedge\ \xi_{2k} < \alpha_{2k}(x)\} +$$
$$+ P\{\xi_i = \alpha_i(x),\ \text{при } i = \overline{1, 2k} \ \wedge\ \xi_{2k+1} > \alpha_{2k+1}(x)\} \ldots.$$

Врахувавши незалежність подій ξ_k, отримаємо:

$$F_\xi(x) = P\left\{\xi_1 > \alpha_1(x)\right\} + P\left\{\xi_1 = \alpha_1(x)\right\} \cdot P\left\{\xi_2 < \alpha_2(x)\right\} + \ldots +$$
$$+ P\left\{\xi_1 = \alpha_1(x)\right\} \cdot P\left\{\xi_2 = \alpha_2(x)\right\} \cdot \ldots \cdot P\left\{\xi_{2k-1} = \alpha_{2k-1}(x)\right\} \cdot$$
$$\cdot P\left\{\xi_{2k} < \alpha_{2k}(x)\right\} + P\left\{\xi_1 = \alpha_1(x)\right\} \cdot P\left\{\xi_2 = \alpha_2(x)\right\} \cdot \ldots \cdot$$
$$\cdot P\left\{\xi_{2k} = \alpha_{2k}(x)\right\} \cdot P\left\{\xi_{2k+1} > \alpha_{2k+1}(x)\right\} + \ldots = \beta_{\alpha_1} + \frac{1}{2}\beta_{\alpha_1\alpha_2} + \ldots +$$
$$+ \frac{1}{2}p_{\alpha_1\alpha_2}p_{\alpha_2\alpha_3} \cdot \ldots \cdot p_{\alpha_{2k-1}\alpha_{2k-1}}\beta_{\alpha_{2k}\alpha_{2k}} + \frac{1}{2}p_{\alpha_1\alpha_2}p_{\alpha_2\alpha_3} \cdot \ldots \cdot$$
$$\cdot p_{\alpha_{2k}\alpha_{2k}}\beta_{\alpha_{2k+1}\alpha_{2k+1}} = \beta_{\alpha_1(x)} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(\beta^{(k)}_{\alpha_k(x)\alpha_{k+1}(x)}\prod_{i=1}^{k-1}p_{\alpha_i(x)\alpha_{i+1}(x)}).$$

Теорему доведено. □

Зауваження 2.1. Для функції $F(x)$ виконуються рівності

$$F(x) = \begin{cases} F_1(x), & \text{якщо} \quad x \in \Delta_1 \Leftrightarrow \alpha_1(x) = 1, \\ F_0(x), & \text{якщо} \quad x \in \Delta_0 \Leftrightarrow \alpha_1(x) = 0, \end{cases}$$

де

$$F_1(x) = \frac{1}{2}(\beta^{(1)}_{1\alpha_2} + p_{1\alpha_2}\beta^{(2)}_{\alpha_2\alpha_3} + p_{1\alpha_2}p_{\alpha_2\alpha_3}\beta^{(3)}_{\alpha_3\alpha_4} + \ldots)$$

$$F_0(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\beta^{(1)}_{0\alpha_2} + p_{0\alpha_2}\beta^{(2)}_{\alpha_2\alpha_3} + p_{0\alpha_2}p_{\alpha_2\alpha_3}\beta^{(3)}_{\alpha_3\alpha_4} + \ldots)$$

Лема 2.2. *Оператор $\delta_{ij}(x)$ правостороннього зсуву $\overline{\Delta}^2$-зображення числа з параметрами $(i;j)$, який означується рівністю*

$$\delta_{ij}(x) = \delta_{ij}(\overline{\Delta}^2_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)\ldots}) = \overline{\Delta}^2_{ij\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)\ldots},$$

аналітично задається

$$\delta_{ij}(x) = \frac{1-i}{2} + \frac{j}{2^2} + \frac{1}{2^2}x.$$

Доведення. Оскільки $x = \overline{\Delta}^2_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)\ldots} = \frac{2}{3} - x_1$, де

$$x_1 = \frac{\alpha_1(x)}{2} - \frac{\alpha_2(x)}{2^2} + \frac{\alpha_3(x)}{2^3} - \ldots$$

і $\delta_{ij}(x) = \overline{\Delta}^2_{ij\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)\ldots} = \frac{2}{3} - t_1$, де $t_1 = \frac{i}{2} - \frac{j}{2^2} + \frac{\alpha_1(x)}{2^3} - \frac{\alpha_2(x)}{2^4}\ldots$, то з отриманих рівностей маємо:

$$t_1 = \frac{i}{2} - \frac{j}{2^2} + \frac{1}{2^2}x_1.$$

Звідки

$$\delta_{ij}(x) = \frac{2}{3} - t_1 = \frac{2}{3} - \frac{i}{2} + \frac{j}{2^2} - \frac{1}{2^2}\left(\frac{2}{3} - x\right) = \frac{1-i}{2} + \frac{j}{2^2} + \frac{1}{2^2}x.$$

Лему доведено. □

Теорема 2.4. *Функція $F(x)$ задовольняє систему функціональних рівнянь:*

$$F(\delta_{ij}(x)) =$$

$$= \begin{cases} F(\frac{1}{4}x + \frac{1}{3}) = \frac{1}{2}p_{01}^2 - \frac{1}{2}p_{01}p_{00} + p_{01}p_{00}F_0(x), \\ \qquad \textit{якщо } x = \overline{\Delta}^2_{0\alpha_2\alpha_3\ldots},\ \delta_{ij}(x) = \overline{\Delta}^2_{100\alpha_2\alpha_3\ldots}, \\ F(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}p_{00}p_{01} - \frac{1}{2}p_{00}^2 + p_{00}^2F_0(x), \\ \qquad \textit{якщо } x = \overline{\Delta}^2_{0\alpha_2\alpha_3\ldots},\ \delta_{ij}(x) = \overline{\Delta}^2_{000\alpha_2\alpha_3\ldots}, \\ F(\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}p_{00} + \frac{1}{2}p_{00}p_{01} - \frac{1}{2}p_{01}^2 + p_{01}^2F_0(x), \\ \qquad \textit{якщо } x = \overline{\Delta}^2_{0\alpha_2\alpha_3\ldots},\ \delta_{ij}(x) = \overline{\Delta}^2_{010\alpha_2\alpha_3\ldots}, \\ F(\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}) = \frac{1}{2}p_{01} + \frac{1}{2}p_{00}^2 - \frac{1}{2}p_{00}p_{01} + p_{00}p_{01}F_0(x), \\ \qquad \textit{якщо } x = \overline{\Delta}^2_{0\alpha_2\alpha_3\ldots},\ \delta_{ij}(x) = \overline{\Delta}^2_{110\alpha_2\alpha_3\ldots}, \\ F(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} + p_{00}p_{01}F_1(x), \\ \qquad \textit{якщо } x = \overline{\Delta}^2_{1\alpha_2\alpha_3\ldots},\ \delta_{ij}(x) = \overline{\Delta}^2_{001\alpha_2\alpha_3\ldots}, \\ F(\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}p_{00} + p_{00}p_{01}F_1(x), \\ \qquad \textit{якщо } x = \overline{\Delta}^2_{1\alpha_2\alpha_3\ldots},\ \delta_{ij}(x) = \overline{\Delta}^2_{011\alpha_2\alpha_3\ldots}, \\ F(\frac{1}{4}x) = p_{01}^2F_1(x), \\ \qquad \textit{якщо } x = \overline{\Delta}^2_{1\alpha_2\alpha_3\ldots},\ \delta_{ij}(x) = \overline{\Delta}^2_{101\alpha_2\alpha_3\ldots}, \\ F(\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}) = \frac{1}{2}p_{01} + p_{00}^2F_1(x), \\ \qquad \textit{якщо } x = \overline{\Delta}^2_{1\alpha_2\alpha_3\ldots},\ \delta_{ij}(x) = \overline{\Delta}^2_{111\alpha_2\alpha_3\ldots}. \end{cases} \tag{3}$$

Доведення. Розглянемо всі можливі випадки:

1. Якщо $\alpha_1 = 0$, то

$x = \overline{\Delta}^2_{0\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)\ldots} = \frac{2}{3} - x_1$, де $x_1 = -\frac{\alpha_2(x)}{2^2} + \frac{\alpha_3(x)}{2^3} - \ldots$.

Нехай:

а) $i = 1; j = 0$. Тоді

$\delta_{ij}(x) = \overline{\Delta}^2_{100\alpha_2\alpha_3\ldots} = \frac{2}{3} - t_1$, де $t_1 = \frac{1}{2} - \frac{\alpha_2(x)}{2^4} + \frac{\alpha_3(x)}{2^5} - \ldots$, звідки $t_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}x_1$.

$\delta_{ij}(x) = \frac{2}{3} - t_1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2}x_1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{4}(\frac{2}{3} - x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{3}.$

$$F(\delta_{ij}(x)) = F(\overline{\Delta}^2_{100\alpha_2\alpha_3\ldots}) = \frac{1}{2}(\beta^{(1)}_{10} + \beta^{(0)}_{00}p_{10} + \beta^{(1)}_{0\alpha_2}p_{10}p_{00} +$$
$$+ \beta^{(0)}_{\alpha_2\alpha_3}p_{10}p_{00}p_{0\alpha_2} + \ldots) = \frac{1}{2}(0 + p_{10}p_{01} + \beta^{(1)}_{0\alpha_2}p_{10}p_{00} +$$
$$+ \beta_{\alpha_2\alpha_3}p_{10}p_{00}p_{0\alpha_2} + \ldots) = \frac{1}{2}p^2_{01} + \frac{1}{2}p_{10}p_{00}(\beta^{(1)}_{0\alpha_2} + \beta^{(0)}_{\alpha_2\alpha_3}p_{0\alpha_2} + \ldots) =$$
$$= \frac{1}{2}p^2_{01} + \frac{1}{2}p_{10}p_{00}(2F_0(x) - 1) = \frac{1}{2}p^2_{01} - \frac{1}{2}p_{01}p_{00} + p_{01}p_{00}F_0(x),$$

звідки випливає перше рівняння системи (3).

б) $i = 0; j = 0$. Тоді

$\delta_{ij}(x) = \overline{\Delta}^2_{000\alpha_2\alpha_3\ldots} = \frac{2}{3} - t_1$, де $t_1 = -\frac{\alpha_2(x)}{2^4} + \frac{\alpha_3(x)}{2^5} - \ldots$, звідки $t_1 = \frac{1}{2^2}x_1$.

$\delta_{ij}(x) = \frac{2}{3} - t_1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2^2}x_1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2^2}(\frac{2}{3} - x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}.$

$$F(\delta_{ij}(x)) = F(\overline{\Delta}^2_{000\alpha_2\alpha_3\ldots}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\beta^{(1)}_{00} + \beta^{(0)}_{00}p_{00} + \beta^{(1)}_{0\alpha_2}p^2_{00} +$$
$$+\beta^{(0)}_{\alpha_2\alpha_3}p^2_{00}p_{0\alpha_2} + \ldots) == \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(0 + p_{01}p_{00} + \beta^{(1)}_{0\alpha_2}p^2_{00} + \beta_{\alpha_2\alpha_3}p^2_{00}p_{0\alpha_2} + \ldots) =$$
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}p_{00}p_{01} + \frac{1}{2}p^2_{00}(\beta^{(1)}_{0\alpha_2} + \beta^{(0)}_{\alpha_2\alpha_3}p_{0\alpha_2} + \ldots) =$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}p_{00}p_{01} + \frac{1}{2}p^2_{00}(2F_0(x) - 1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}p_{00}p_{01} - \frac{1}{2}p^2_{00} + p^2_{00}F_0(x),$$

звідки випливає друге рівняння системи (3).

в) $i = 0; j = 1$. Тоді

$\delta_{ij}(x) = \overline{\Delta}^2_{010\alpha_2\alpha_3\ldots} = \frac{2}{3} - t_1$, де $t_1 = -\frac{1}{2^2} - \frac{\alpha_2(x)}{2^4} + \frac{\alpha_3(x)}{2^5} - \ldots$, звідки $t_1 = \frac{1}{2^2}x_1 - \frac{1}{4}$.

$\delta_{ij}(x) = \frac{2}{3} - t_1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2^2}x_1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2^2}(\frac{2}{3} - x) + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$.

$$F(\delta_{ij}(x)) = F(\overline{\Delta}^2_{010\alpha_2\alpha_3\ldots}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\beta^{(1)}_{01} + \beta^{(0)}_{10}p_{01} + \beta^{(1)}_{0\alpha_2}p_{01}p_{10}+$$
$$+ \beta^{(0)}_{\alpha_2\alpha_3}p_{01}p_{10}p_{0\alpha_2} + \ldots) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(p_{00} + p_{01}p_{00} + \beta^{(1)}_{0\alpha_2}p_{01}p_{10}+$$
$$+ \beta_{\alpha_2\alpha_3}p_{01}p_{10}p_{0\alpha_2} + \ldots) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}p_{00} + \frac{1}{2}p_{00}p_{01}+$$
$$+ \frac{1}{2}p_{01}p_{10}(\beta^{(1)}_{0\alpha_2} + \beta^{(0)}_{\alpha_2\alpha_3}p_{0\alpha_2} + \ldots) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}p_{00} + \frac{1}{2}p_{00}p_{01}+$$
$$\frac{1}{2}p_{01}p_{10}(2F_0(x) - 1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}p_{00} + \frac{1}{2}p_{00}p_{01} - \frac{1}{2}p^2_{01} + p^2_{01}F_0(x)$$

звідки випливає третє рівняння системи (3).

г) $i = 1; j = 1$. Тоді $\delta_{ij}(x) = \overline{\Delta}^2_{110\alpha_2\alpha_3\ldots} = \frac{2}{3} - t_1$, де $t_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} - \frac{\alpha_2(x)}{2^4} + \frac{\alpha_3(x)}{2^5} - \ldots$, звідки $t_1 = \frac{1}{2^2}x_1 + \frac{1}{4}$.

$\delta_{ij}(x) = \frac{2}{3} - t_1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2^2}x_1 - \frac{1}{4} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2^2}(\frac{2}{3} - x) - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$.

$$F(\delta_{ij}(x)) = F(\overline{\Delta}^2_{110\alpha_2\alpha_3\ldots}) = \frac{1}{2}(\beta^{(1)}_{11} + \beta^{(0)}_{10}p_{11} + \beta^{(1)}_{0\alpha_2}p_{11}p_{10}+$$
$$+\beta^{(0)}_{\alpha_2\alpha_3}p_{11}p_{10}p_{0\alpha_2} + \ldots) = \frac{1}{2}(p_{10} + p_{11}p_{00} + \beta^{(1)}_{0\alpha_2}p_{11}p_{10}+$$
$$+\beta_{\alpha_2\alpha_3}p_{11}p_{10}p_{0\alpha_2}+\ldots) = \frac{1}{2}p_{01}+\frac{1}{2}p^2_{00}+\frac{1}{2}p_{00}p_{01}(\beta^{(1)}_{0\alpha_2}+\beta^{(0)}_{\alpha_2\alpha_3}p_{0\alpha_2}+\ldots) =$$
$$= \frac{1}{2}p_{01} + \frac{1}{2}p^2_{00} + \frac{1}{2}p_{00}p_{01}(2F_0(x) - 1) =$$
$$= \frac{1}{2}p_{01} + \frac{1}{2}p^2_{00} - \frac{1}{2}p_{00}p_{01} + p_{00}p_{01}F_0(x),$$

звідки випливає четверте рівняння системи (3).

2. Якщо $\alpha_1 = 1$, то $x = \overline{\Delta}^2_{1\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)\ldots} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} - x_1 = \frac{1}{6} - x_1$, де $x_1 = -\frac{\alpha_2(x)}{2^2} + \frac{\alpha_3(x)}{2^3} - \ldots$.

Нехай:

а) $i = 0; j = 0$. Тоді

$\delta_{ij}(x) = \overline{\Delta}^2_{001\alpha_2\alpha_3\ldots} = \frac{2}{3} - t_1$, де $t_1 = \frac{1}{2^3} - \frac{\alpha_2(x)}{2^4} + \frac{\alpha_3(x)}{2^5} - \ldots$, звідки $t_1 = \frac{1}{8} + \frac{1}{2^2}x_1$.

$\delta_{ij}(x) = \frac{2}{3} - t_1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{8} - \frac{1}{2^2}x_1 = \frac{13}{24} - \frac{1}{4}(\frac{1}{6} - x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$.

$$F(\delta_{ij}(x)) = F(\overline{\Delta}^2_{001\alpha_2\alpha_3\ldots}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\beta^{(1)}_{00} + \beta^{(0)}_{01}p_{00} + \beta^{(1)}_{1\alpha_2}p_{00}p_{01}+$$

$$+\beta^{(0)}_{\alpha_2\alpha_3}p_{00}p_{01}p_{1\alpha_2}+\ldots) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(0+0+\beta^{(1)}_{1\alpha_2}p_{00}p_{01}+\beta^{(0)}_{\alpha_2\alpha_3}p_{00}p_{01}p_{1\alpha_2}+\ldots) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}p_{00}p_{01}(\beta^{(1)}_{1\alpha_2} + \beta^{(0)}_{\alpha_2\alpha_3}p_{1\alpha_2} + \ldots) = \frac{1}{2} + p_{00}p_{01}F_1(x),$$

звідки випливає п'яте рівняння системи (3).

б) $i = 0; j = 1$. Тоді

$\delta_{ij}(x) = \overline{\Delta}^2_{011\alpha_2\alpha_3\ldots} = \frac{2}{3} - t_1$, де $t_1 = -\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \frac{\alpha_2(x)}{2^4} + \frac{\alpha_3(x)}{2^5} - \ldots$, звідки $t_1 = \frac{1}{2^2}x_1 - \frac{1}{8}$.

$\delta_{ij}(x) = \frac{2}{3} - t_1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{8} - \frac{1}{2^2}x_1 = \frac{19}{24} - \frac{1}{4}(\frac{1}{6} - x) = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$.

$$F(\delta_{ij}(x)) = F(\overline{\Delta}^2_{011\alpha_2\alpha_3\ldots}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\beta^{(1)}_{01} + \beta^{(0)}_{11}p_{01} + \beta^{(1)}_{1\alpha_2}p_{01}p_{11}$$

$$+\beta^{(0)}_{\alpha_2\alpha_3}p_{01}p_{11}p_{1\alpha_2}+\ldots) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(p_{00}+\beta^{(1)}_{1\alpha_2}p_{01}p_{11}+\beta^{(0)}_{\alpha_2\alpha_3}p_{01}p_{11}p_{1\alpha_2}+\ldots) =$$

$$= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}p_{00}+\frac{1}{2}p_{01}p_{11}(\beta^{(1)}_{1\alpha_2}+\beta^{(0)}_{\alpha_2\alpha_3}p_{1\alpha_2}+\ldots) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}p_{00}+p_{00}p_{01}F_1(x),$$

звідки випливає шосте рівняння системи (3).

в) $i = 1; j = 0$. Тоді

$\delta_{ij}(x) = \overline{\Delta}^2_{101\alpha_2\alpha_3\ldots} = \frac{2}{3} - t_1$, де $t_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} - \frac{\alpha_2(x)}{2^4} + \frac{\alpha_3(x)}{2^5} - \ldots$, звідки $t_1 = \frac{1}{2^2}x_1 + \frac{5}{8}$.

$\delta_{ij}(x) = \frac{2}{3} - t_1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2^2}x_1 - \frac{5}{8} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2^2}(\frac{1}{6} - x) - \frac{5}{8} = \frac{1}{4}x$.

$$F(\delta_{ij}(x)) = F(\overline{\Delta}^2_{101\alpha_2\alpha_3\ldots}) = \frac{1}{2}(\beta^{(1)}_{10} + \beta^{(0)}_{01}p_{10} + \beta^{(1)}_{1\alpha_2}p_{10}p_{01}+$$

$$+\beta^{(0)}_{\alpha_2\alpha_3}p_{01}p_{11}p_{1\alpha_2}+\ldots) = \frac{1}{2}(0+0+\beta^{(1)}_{1\alpha_2}p_{10}p_{01}+\beta^{(0)}_{\alpha_2\alpha_3}p_{10}p_{01}p_{1\alpha_2}+\ldots) =$$

$$= \frac{1}{2}p^2_{01}(\beta^{(1)}_{1\alpha_2} + \beta^{(0)}_{\alpha_2\alpha_3}p_{1\alpha_2} + \ldots) = p^2_{01}F_1(x),$$

звідки випливає сьоме рівняння системи (3).

г) $i = 1; j = 1$. Тоді

$\delta_{ij}(x) = \overline{\Delta}^2_{111\alpha_2\alpha_3\ldots} = \frac{2}{3} - t_1$, де $t_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \frac{\alpha_2(x)}{2^4} + \frac{\alpha_3(x)}{2^5} - \ldots$, звідки $t_1 = \frac{1}{2^2}x_1 + \frac{3}{8}$.

$$\delta_{ij}(x) = \tfrac{2}{3} - t_1 = \tfrac{2}{3} - \tfrac{1}{2^2}x_1 - \tfrac{3}{8} = \tfrac{2}{3} - \tfrac{1}{2^2}(\tfrac{1}{6} - x) - \tfrac{3}{8} = \tfrac{1}{4}x + \tfrac{1}{4}.$$

$$F(\delta_{ij}(x)) = F(\overline{\Delta}^2_{111\alpha_2\alpha_3\ldots}) = \frac{1}{2}(\beta^{(1)}_{11} + \beta^{(0)}_{11}p_{11} + \beta^{(1)}_{1\alpha_2}p^2_{11} +$$
$$+ \beta^{(0)}_{\alpha_2\alpha_3}p^2_{11}p_{1\alpha_2} + \ldots) = \frac{1}{2}(p_{10} + 0 + \beta^{(1)}_{1\alpha_2}p^2_{11} + \beta^{(0)}_{\alpha_2\alpha_3}p^2_{11}p_{1\alpha_2} + \ldots) =$$
$$= \frac{1}{2}p_{01} + \frac{1}{2}p^2_{00}(\beta^{(1)}_{1\alpha_2} + \beta^{(0)}_{\alpha_2\alpha_3}p_{1\alpha_2} + \ldots) = \frac{1}{2}p_{01} + p^2_{00}F_1(x),$$

звідки випливає восьме рівняння системи (3).

Теорему доведено. □

[1] *Маркітан В.П.* Фрактальні властивості множин та функцій, пов'язаних з марковським зображенням дійсних чисел, визначеним двічі стохастичною матрицею // Фрактальний аналіз і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2017. — **14**, 4. — с. 34–49.

[2] *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. — 296 с.

[3] *Працьовитий М. В.* Геометрія класичного двійкового зображення дійсних чисел — Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 2012. — 68 с.

[4] *Працьовитий М.В.* Геометрія дійсних чисел у їх кодуваннях засобами нескінченного алфавіту як основа топологічних, метричних, фрактальних і ймовірнісних теорій // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова.Серія 1. Фізико-математичні науки. — 2013. — № 14. — с. 189–216.

[5] Працьовитий М.В. Нега-канторівські зображення дійсних чисел як тривіальні перекодування канторівських // Фрактальний аналіз і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2017. — **14**, 4. — с. 167–177.

[6] *Працьовитий М.В.* Сингулярні і фрактальні властивості розподілів випадкових величин, цифри поліосновного зображення яких утворюють однорідний ланцюг Маркова // Укр. мат. журн. — 2000. — **52**, 3. — с. 368–374.

[7] *Працьовитий М.В.* Канторовість і фрактальні властивості розподілів випадкових величин, Q-знаки яких утворюють однорідний ланцюг Маркова // Теорія ймовірностей та мат. статистика. — 1998. — **58**, 3. — с. 139–148.