Збірник праць Інституту математики НАН України 2019, т. 16, № 2, 85–100

УДК 517.935;681.5

Зважена оцінка гасіння обмежених збурень у дескрипторних дискретних системах керування *

О. Г. Мазко

Інститут математики НАН України, Київ; mazkoag@gmail.com

We establish necessary and sufficient conditions of the upper bounds for the performance criteria of linear discrete-time descriptor systems characterizing the weighted damping level of external and initial disturbances. These conditions require to solve linear matrix equations (LMI). The technique of the generalized H_∞-optimization of the descriptor systems with controlled and observed outputs as well as a method for finding the worst vectors of the external and initial perturbations with respect to the weighted quality criterion are proposed. An illustrative example of a discrete-time descriptor control system with perturbations is given.

Встановлено необхідні й достатні умови виконання верхніх оцінок для критеріїв якості лінійних дискретних дескрипторних систем, що характеризують зважений рівень гасіння обмежених збурень. Перевірка цих умов зводиться до розв'язування лінійних матричних нерівностей (ЛМН). Запропоновано методику узагальненої H_∞-оптимізації дескрипторних систем із керованими і спостережуваними виходами, а також знаходження найгірших векторів зовнішніх і початкових збурень стосовно зваженого критерію якості. Наведено ілюстративний приклад дискретної дескрипторної системи керування зі збуреннями.

1 Вступ

У сучасній теорії керування широко використовуються неперервні й дискретні математичні моделі руху об'єктів, що містять невизначені елементи (параметри, зовнішні збурення тощо). Для таких моделей застосовуються методи H_2/H_∞-оптимізації, які забезпечують не

*Робота виконана за часткової підтримки НДР № 0117U004077.

лише (робастну) стійкість, а й пониження негативного впливу зовнішніх збурень на якісні характеристики керованого об'єкта. З різними постановками задач керування за умов невизначеності можна ознайомитись, наприклад, у [1–5].

Мірою впливу обмежених збурень на динаміку лінійних об'єктів із нульовим початковим вектором є максимальне значення відношення векторних L_2-норм керованого виходу і вхідних збурень, яке збігається з H_∞-нормою матричної передатної функції системи [1]. У [6–9] використовувалися загальніші критерії якості, що враховують вплив початкових збурень, обумовлених початковим вектором. Введення вагових коефіцієнтів у таких критеріях якості дає змогу встановити пріоритети між компонентами виходу, зовнішніх і початкових збурень.

На практиці дискретні моделі систем керування мають певні переваги порівняно з неперервними. Зокрема, застосування різницевих рівнянь руху не вимагає дослідження проблем існування і єдиності розв'язків. Різницеві системи і матричні аналоги прямого методу Ляпунова для дискретних систем є досить-таки придатними для їхньої безпосередньої реалізації програмними засобами на сучасних комп'ютерах. Варто зазначити, що практичне застосування багатьох методів синтезу неперервних і дискретних систем керування базується на розв'язуванні лінійних матричних нерівностей (ЛМН). Для цього створені достатньо ефективні засоби комп'ютерних систем Matlab і Mathcad Prime [10, 11].

Продовжуючи дослідження [7], у цій роботі ми вивчаємо клас дискретних дескрипторних лінійних систем із керованими і спостережуваними виходами і розробляємо новий підхід до розв'язання узагальненої задачі H_∞-оптимізації таких систем на множині статичних регуляторів за спостережуваним виходом.

Використовуватимемо такі позначення: I_n — одинична матриця порядку n; $0_{n\times m}$ — нульова матриця розмірів $n \times m$; $X = X^\top > 0$ (≥ 0) — додатно (невід'ємно) визначена матриця X; $\sigma(\cdot)$ — спектр матриці (пучка матриць); $\rho(A)$ — спектральний радіус матриці A; $A^{-1}(A^+)$ — обернена (псевдообернена) матриця; $\operatorname{Ker} A$ — ядро матриці A; W_A — матриця, стовпці якої утворюють базис ядра матриці A; $\operatorname{Co}\{A_1, \ldots, A_\nu\}$ — опуклий многогранник (політоп) з вершинами $A_1, \ldots, A_\nu$ у просторі матриць. $\|x\|$ — евклідова норма вектора x; $\|x\|_Q$ — зважена l_2-норма векторної послідовності x_t, $t = 0, 1, \ldots$.

2 Допоміжні твердження

Для симетричної блочної матриці

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \quad A = A^\top,\ B = C^\top,\ D = D^\top,$$

виконується таке твердження.

Лема 2.1. (лема Шура [12]). *Якщо діагональний блок A (D) матриці M невироджений, то $M \le 0$ тоді і лише тоді, коли*

$$A < 0,\ \ M_A = D - CA^{-1}B \le 0\ \ \big(D < 0,\ \ M_D = A - BD^{-1}C \le 0\big).$$

При цьому $M < 0 \iff A < 0,\ M_A < 0 \iff D < 0,\ M_D < 0.$

Лема 2.2. [13] *Лінійна матрична нерівність*

$$A^T XB + B^T X^T A < C, \tag{1}$$

де A, B і C — задані матриці відповідних розмірів $p\times n$, $q\times n$ і $n\times n$, має розв'язок $X \in \mathbb{R}^{p\times q}$ тоді і лише тоді, коли виконується одна з таких умов: (a) $\operatorname{rank} A = n$, $\operatorname{rank} B = n$; (b) $\operatorname{rank} A < n$, $\operatorname{rank} B = n$, $W_A^T CW_A > 0$; (c) $\operatorname{rank} B < n$, $\operatorname{rank} A = n$, $W_B^T CW_B > 0$ *або* (d) $\operatorname{rank} A < n$, $\operatorname{rank} B < n$, $W_A^T CW_A > 0$, $W_B^T CW_B > 0$, *де W_A і W_B — матриці, стовпці яких складають базиси відповідних ядер* Ker A *і* Ker B.

Розглянемо на множині матриць $\mathcal{K}_D = \big\{K : \det(I_m - KD) \ne 0\big\}$ нелінійний оператор $\mathbf{D}(K) = (I_m - KD)^{-1}K$ і матричну нерівність

$$\mathbf{F}(K) = W + U^\top \mathbf{D}(K)V + V^\top \mathbf{D}^\top(K)U + V^\top \mathbf{D}^\top(K)\, R\, \mathbf{D}(K)V < 0, \tag{2}$$

де $D \in \mathbb{R}^{l\times m}$, $U \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $V \in \mathbb{R}^{l\times n}$, $W \in \mathbb{R}^{n\times n}$ і $R \in \mathbb{R}^{m\times m}$ — задані матриці, причому $W = W^\top$ і $R = R^\top \ge 0$.

Лема 2.3. (Узагальнена лема про матричну невизначеність [6]). *Нехай для деяких матриць $P_0 = P_0^\top > 0$ і $Q_0 = Q_0^\top > 0$ виконується матрична нерівність*

$$\Omega = \begin{bmatrix} W + V^\top Q_0 V & U^\top + V^\top Q_0 D \\ U + D^\top Q_0 V & R + D^\top Q_0 D - P_0 \end{bmatrix} < 0. \tag{3}$$

Тоді $\mathbf{F}(K) < 0$ і $K \in \mathcal{K}_D$ для кожної матриці K із еліпсоїда

$$\mathcal{K} = \big\{K :\ K^\top P_0 K \le Q_0\big\}. \tag{4}$$

Лема 2.4. *Якщо* $R = R^\top > 0$ *і* $\operatorname{rank} V < n$, *то матрична нерівність* (2) *має розв'язок* $K \in \mathbb{R}^{m\times l}$ *тоді і лише тоді, коли*

$$W < U^\top R^{-1} U, \quad W_V^\top W W_V < 0. \tag{5}$$

Доведення. На основі леми 2.1 перепишемо матричну нерівність (2) у формі (1), де

$$A = \left[\, U,\, I_m \,\right], \quad B = \left[\, V,\, 0_{l\times m} \,\right], \quad C = \begin{bmatrix} -W & 0 \\ 0 & R^{-1} \end{bmatrix}, \quad X = \mathbf{D}(K).$$

Очевидно, що

$$W_A = \begin{bmatrix} I_n \\ -U \end{bmatrix}, \quad W_B = \begin{bmatrix} W_V & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix},$$

оскільки

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} U & I_m \\ I_n & -U^\top \end{bmatrix} = n + m, \quad \operatorname{rank} B < n + m.$$

Застосовуючи лему 2.1 у випадку (d), отримаємо необхідні й достатні умови сумісності матричної нерівності (2) щодо X у формі (5). Оскільки ця нерівність строга, то її розв'язок можна знайти у формі $X = \mathbf{D}(K)$, де $K \in \mathcal{K}_D$ — деяка матриця.

Лему доведено. $\square$

3 Зважений рівень гасіння обмежених збурень

Розглянемо клас лінійних дискретних систем без керування

$$E x_{t+1} = A x_t + B w_t, \quad z_t = C x_t + D w_t, \quad t \in \mathcal{T} = \{0, 1, \dots\}, \tag{6}$$

де $x_t \in \mathbb{R}^n$, $w_t \in \mathbb{R}^m$ і $z_t \in \mathbb{R}^l$ — відповідно вектори стану, зовнішніх збурень і виходу системи, E, A, B, C і D — матриці відповідних розмірів. Введемо критерій якості даної системи стосовно її вектора виходу:

$$J = \sup_{(w,x_0)\in\mathcal{W}} \frac{\|z\|_Q}{\sqrt{\|w\|_P^2 + x_0^\top X_0 x_0}}, \tag{7}$$

де

$$\|z\|_Q^2 = \sum_{t=0}^{\infty} z_t^T Q z_t, \quad \|w\|_P^2 = \sum_{t=0}^{\infty} w_t^T P w_t,$$

$\mathcal{W}$ — множина пар (w, x_0), для яких система має розв'язок і виконується нерівність $0 < \|w\|_P^2 + x_0^\top X_0 x_0 < \infty$, а $P = P^\top > 0$, $Q = Q^\top > 0$ і $X_0 = X_0^\top \geq 0$ — деякі вагові матриці.

Вважаємо, що вектор зовнішніх збурень w обмежений за зваженою l_2-нормою $\|w\|_P$, а x_0 — невідомий початковий вектор. Вираз (7) при фіксованому початковому векторі $x_0 = 0$ позначимо через J_0. Очевидно, що $J_0 \leq J$.

Значення J характеризує зважений рівень гасіння зовнішніх і початкових збурень у системі (6). Цей критерій якості у випадку вагових матриць $P = I_s$, $Q = I_k$ і $X_0 = \beta I_n$ відомий [9].

Означення 3.1. Вектор збурення w_t і початковий вектор x_0 називатимемо *найгіршими* стосовно критерію якості J, якщо на їхніх значеннях досягається sup у (7), тобто

$$\|z\|_Q^2 = J^2\big(\|w\|_P^2 + x_0^\top X_0 x_0\big).$$

Означення 3.2. Система (6) називається *неекспансивною*, якщо її вектор виходу при довільному $\tau > 0$ задовольняє нерівність

$$\sum_{t=0}^{\tau} y_t^T Q y_t \leq \sum_{t=0}^{\tau} w_t^T P w_t + x_0^T X_0 x_0.$$

Очевидно, що неекспансивна система має критерій якості $J \leq 1$.

Нехай в'язка матриць $F(\lambda) = A - \lambda E$ в системі (6) *регулярна*, тобто $\det F(\lambda) \not\equiv 0$ $(\lambda \in \mathbb{C})$. Канонічна форма Веєрштрасса регулярної в'язки матриць має вигляд [12]

$$LF(\lambda)R = \left[\begin{array}{c|c} A_1 - \lambda I_r & 0 \\ \hline 0 & I_{n-r} - \lambda N \end{array}\right], \tag{8}$$

де власні значення матриці A_1 утворюють спектр $\sigma(F)$, N — нільпотентна матриця індексу ν, а L і R — деякі невироджені матриці. В'язка матриць $F(\lambda)$ *стійка*, якщо $|\lambda| < 1\ \forall \lambda \in \sigma(F)$, тобто $\rho(A_1) < 1$.

Якщо $\operatorname{rank} E = \rho < n$, то систему (6) можна подати у формі

$$x_{t+1}^1 = A_1 x_t^1 + B_1 w_t,\ N x_{t+1}^2 = x_t^2 + B_2 w_t,\ z_t = C_1 x_t^1 + C_2 x_t^2 + D w_t, \tag{9}$$

де $x_t^1 \in \mathbb{R}^r$, $x_t^2 \in \mathbb{R}^{n-r}$,

$$x_t = R\begin{bmatrix} x_t^1 \\ x_t^2 \end{bmatrix}, \quad x_0 = R\begin{bmatrix} x_0^1 \\ x_0^2 \end{bmatrix}, \quad LB = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad CR = [C_1, C_2].$$

Ця система має r скінченних *динамічних мод*, $n-\rho$ *нединамічних мод* і $\rho-r$ *непричинних мод* [4]. Регулярна в'язка матриць $F(\lambda)$ при відсутності непричинних мод ($\rho=r$) називається *причинною*.

Означення 3.3. В'язка матриць $F(\lambda)$ називається *допустимою*, якщо вона регулярна, стійка і причинна. Дескрипторна система (6) з допустимою в'язкою матриць $F(\lambda)$ є *допустимою*.

Лема 3.1. [14] *В'язка матриць $F(\lambda)=A-\lambda E$ є допустимою тоді і лише тоді, коли існує матриця $X=X^\top$, що задовольняє систему ЛМН*

$$A^\top XA-E^\top XE<0, \quad E^\top XE\geq 0. \tag{10}$$

Введемо лінійний матричний оператор

$$\Psi(X)=\begin{bmatrix} A^\top XA-E^\top XE+C^\top QC & A^\top XB+C^\top QD \\ B^\top XA+D^\top QC & B^\top XB+D^\top QD-\gamma^2P \end{bmatrix},$$

що визначений у просторі симетричних матриць $X=X^\top$.

Лема 3.2. *Для системи* (6) *такі твердження еквівалентні:*

1) *в'язка матриць $F(\lambda)=A-\lambda E$ допустима і $J_0<\gamma$;*

2) *існує матриця $X=X^\top$, що задовольняє систему ЛМН*

$$\Psi(X)<0, \quad E^\top XE\geq 0. \tag{11}$$

Доведення. 2) $\Rightarrow$ 1). Для першої різниці функції Ляпунова $v(x)=x^TE^\top XEx$ у силу системи (6) виконуються співвідношення

$$v(x_{t+1})-v(x_t)+z_t^TQz_t-\gamma^2w_t^TPw_t=\left[x_t^T,\ w_t^T\right]\Psi(X)\begin{bmatrix} x_t \\ w_t \end{bmatrix},\ t\in\mathcal{T}.$$

Після підсумовування від 0 до τ маємо

$$v(x_{\tau+1})-v(x_0)+\sum_{t=0}^{\tau}z_t^TQz_t-\gamma^2\sum_{t=0}^{\tau}w_t^TPw_t\leq 0, \quad v(x_{\tau+1}\geq 0.$$

Враховуючи, що $v(x_0)=0$ і в'язка матриць $F(\lambda)$ допустима, при $\tau\to\infty$ маємо $v(x_{\tau+1})\to 0$ і $\|z\|_Q^2\leq\gamma^2\|w\|_P^2$, що означає $J_0\leq\gamma$. Насправді $J_0<\gamma$, оскільки умови (11) зберігаються при заміні γ на $\gamma-\varepsilon$, де $\varepsilon>0$ — достатньо мале число.

1) $\Rightarrow$ 2). Нехай в'язка матриць $F(\lambda) = A - \lambda E$ допустима і $J_0 < \gamma$. У цьому випадку $N = 0$ і динамічна підсистема в (9) має форму

$$x_{t+1}^1 = A_1 x_t^1 + B_1 w_t, \quad z_t = C_1 x_t^1 + D_1 w_t, \tag{12}$$

де $D_1 = D - C_2 B_2$. Причому критерії якості типу J_0 для систем (6) і (12) збігаються. Відомо [7], що $\rho(A_1) < 1$ і $J_0 < \gamma$ тоді і лише тоді, коли $\Psi_1(X_1) < 0$ для деякої матриці $X_1 = X_1^\top > 0$, де

$$\Psi_1(X_1) = \begin{bmatrix} A_1^\top X_1 A_1 - X_1 + C_1^\top Q C_1 & A_1^\top X_1 B_1 + C_1^\top Q D_1 \\ B_1^\top X_1 A_1 + D_1^\top Q C_1 & B_1^\top X_1 B_1 + D_1^\top Q D_1 - \gamma^2 P \end{bmatrix}.$$

Побудуємо розв'язок $X = X^\top$ системи ЛМН (11) як

$$X = L^\top \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_2^\top & X_3 \end{bmatrix} L. \tag{13}$$

Застосуємо конгруентне перетворення

$$T^\top \Psi(X) T = \left[\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{\Psi_1(X_1)} & \begin{matrix} A_1^\top X_2 + C_1^\top Q C_2 \\ B_1^\top X_2 + D_1^\top Q C_2 \end{matrix} \\ \hline X_2^\top A_1 + C_2^\top Q C_1 & X_2^\top B_1 + C_2^\top Q D_1 & X_3 + C_2^\top Q C_2 \end{array}\right],$$

де

$$T = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & I_s \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cc|c} I_r & 0 & 0 \\ 0 & -B_2 & I_{n-r} \\ \hline 0 & I_s & 0 \end{array}\right]$$

і припустимо, що $X_2 = 0$, $X_3 = -C_2^\top Q C_2 - \varepsilon^{-1} I_{n-r}$. Тоді матрична нерівність $\Psi(X) < 0$ за лемою Шура означає

$$\Psi_1(X_1) + \varepsilon \begin{bmatrix} C_1^\top \\ D_1^\top \end{bmatrix} Q C_2 C_2^\top Q \big[C_1, D_1\big] < 0.$$

Якщо $\Psi_1(X_1) < 0$, то існує $\varepsilon > 0$, при якому ця нерівність виконується. При цьому

$$E^\top X E = R^{-1\top} \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} R^{-1} \geq 0, \quad X_1 = X_1^\top > 0.$$

Отже, за умов 1) система ЛМН (11) сумісна. $\square$

Твердження леми 3.2 у випадку одиничних вагових матриць P і Q отримано в [14, 15].

Зауваження 3.1. Із доведення леми 3.2 випливає, що для виконання оцінки $J \leq \gamma$ достатньо, щоб система ЛМН (11) і $E^\top X E \leq \gamma^2 X_0$ була сумісною стосовно $X = X^\top$. При цьому $J < \gamma$, якщо $E^\top X E < \gamma^2 X_0$.

Лема 3.3. *Нехай вагова матриця X_0 в (7) подана у вигляді*

$$X_0 = E^\top H E, \quad H = H^\top > 0. \tag{14}$$

Тоді для системи (6) такі твердження еквівалентні:

1) *в'язка матриць $F(\lambda) = A - \lambda E$ допустима і $J < \gamma$;*

2) *існує матриця $X = X^\top$, що задовольняє систему співвідношень*

$$\Psi(X) < 0, \tag{15}$$

$$0 \leq E^\top X E \leq \gamma^2 X_0, \quad \operatorname{rank}(E^\top X E - \gamma^2 X_0) = \operatorname{rank} E. \tag{16}$$

Доведення. Якщо в'язка матриць $F(\lambda) = A - \lambda E$ допустима, то для матриць (13) і (14) виконуються співвідношення (див. доведення леми 3.2)

$$E^\top X E - \gamma^2 X_0 = R^{-1\top} \begin{bmatrix} X_1 - \gamma^2 H_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} R^{-1},$$

$$x_0^\top X_0 x_0 = x_0^{1\top} H_1 x_0^1, \quad H = L^\top \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \\ H_2^\top & H_3 \end{bmatrix} L > 0.$$

При цьому $\rho(A_1) < 1$ і $J < \gamma$ тоді і лише тоді, коли сумісна щодо X_1 система ЛМН $\Psi_1(X_1) < 0$ і $0 < X_1 < \gamma^2 H_1$ [7]. □

Зауваження 3.2. Матричну нерівність $\Psi(X) < 0$ у лемах 3.2 і 3.3 згідно з лемою Шура можна подати у формі

$$\begin{bmatrix} A^\top X A - E^\top X E & A^\top X B & C^\top \\ B^\top X A & B^\top X B - \gamma^2 P & D^\top \\ C & D & -Q^{-1} \end{bmatrix} < 0. \tag{17}$$

Зауваження 3.3. Рангова умова (16) у лемі 3.3 завжди виконується, якщо $X < \gamma^2 H$.

Зауваження 3.4. При виконанні умов, що забезпечують строгі оцінки $J_0 < \gamma$ і $J < \gamma$ у лемах 3.2 і 3.3, нульовий стан системи (6) зі структурованою невизначеністю вектора збурень

$$w_t = \frac{1}{\gamma} \Theta z, \quad \Theta^\top P \Theta \leq Q \tag{18}$$

робастно стійкий зі спільною функцією Ляпунова $v(x) = x^\top E^\top XEx$. Це твердження доводиться за допомогою узагальненої леми про матричну невизначеність [6, лема 3.3.1].

Із лем 3.2 і 3.3 випливають алгоритми обчислення критеріїв якості J_0 і J системи (6) на основі розв'язування відповідних оптимізаційних задач:

$$\begin{aligned} J_0 &= \inf\big\{\gamma:\ \Psi(X) < 0,\ \ E^\top XE \ge 0\big\}, \\ J &= \inf\big\{\gamma:\ \Psi(X) < 0,\ \ 0 \le E^\top XE \le \gamma^2 X_0\big\}. \end{aligned} \tag{19}$$

4 Найгірші зовнішні і початкові збурення стосовно зваженого критерію якості

У практичних задачах керування доцільно визначити так звані найгірші зовнішні й початкові збурення у системі, а також дослідити поведінку замкненої системи при таких збуреннях.

Із доведення лем 3.2 і 3.3 випливає, що для виконання нестрогої оцінки $J \le \gamma$ достатньо сумісності щодо $X = X^\top$ системи ЛМН $\Psi(X) \le 0$ і

$$0 \le E^\top XE \le \gamma^2 X_0. \tag{20}$$

Якщо

$$R_X = \gamma^2 P - D^\top QD - B^\top XB > 0, \tag{21}$$

то за лемою Шура $\Psi(X) \le 0$ лише тоді, коли виконується матрична нерівність типу Ріккаті

$$A^\top XA - E^\top XE + C^\top QC + (A^\top XB + C^\top QD)R_X^{-1}(B^\top XA + D^\top QC) \le 0,$$

При цьому виконуються співвідношення

$$v(x_{t+1}) - v(x_t) + z_t^\top Qz_t - \gamma^2 w_t^\top Pw_t = [x_t^\top, w_t^\top]\Psi(X)\begin{bmatrix} x_t \\ w_t \end{bmatrix} \le 0, \tag{22}$$

$$\|z\|_Q^2 - \gamma^2\|w\|_P^2 \le x_0^\top E^\top XEx_0 \le \gamma^2 x_0^\top X_0 x_0, \tag{23}$$

де $v(x) = x^\top E^\top XEx$ — функція Ляпунова системи (6). Причому виконання обох рівностей у (23) означає, що $J = \gamma$, а відповідні вектори збурення w_t і початковий вектор x_0 є найгіршими стосовно критерію якості J. Перша рівність у (23) виконується, якщо

$$w_t = K_0 x_t, \quad K_0 = R_X^{-1}(B^\top X + D^\top QC), \tag{24}$$

де X — розв'язок матричного рівняння

$$A^\top XA - E^\top XE + C^\top QC + (A^\top XB + C^\top QD)R_X^{-1}(B^\top XA + D^\top QC) = 0, \tag{25}$$

а x_t — розв'язок системи

$$Ex_{t+1} = (A + BK_0)x_t, \quad t \in \mathcal{T}. \tag{26}$$

При цьому права частина співвідношення (22) є нульовою. Друга рівність у (23) виконується, якщо

$$x_0^\top (E^\top XE - \gamma^2 X_0)x_0 = 0. \tag{27}$$

Останнє співвідношення за умови (20) еквівалентне рівності $(E^\top XE - \gamma^2 X_0)x_0 = 0$. Зокрема, ненульовий вектор $x_0 \in \operatorname{Ker}(E^\top XE - \gamma^2 X_0)$ є власним вектором матриці $E^\top XE - \gamma^2 X_0$, що відповідає її нульовому власному значенню. Якщо $x_0 \in \operatorname{Ker} E$, то рівність (27) виконується незалежно від значення матриці-розв'язку X рівняння (25).

Отже, встановлено таке твердження.

Лема 4.1. *Нехай існує матриця X, що задовольняє співвідношення* (20), (21) *і* (25) *при $\gamma = J$. Тоді структурований вектор зовнішніх збурень* (24) *і довільний вектор $x_0 \in \operatorname{Ker}(E^\top XE - J^2 X_0)$ є найгіршими стосовно критерію якості J для системи* (6).

5 Лінійна дескрипторна система з керованими і спостережуваними виходами

Розглянемо лінійну дескрипторну систему з керованими і спостережуваними виходами

$$\begin{aligned} Ex_{t+1} &= Ax_t + B_1 w_t + B_2 u_t, \\ z_t &= C_1 x_t + D_{11} w_t + D_{12} u_t, \\ y_t &= C_2 x_t + D_{21} w_t + D_{22} u, \end{aligned} \tag{28}$$

де $x_t \in \mathbb{R}^n$, $u_t \in \mathbb{R}^m$, $w_t \in \mathbb{R}^s$, $z_t \in \mathbb{R}^k$ і $y_t \in \mathbb{R}^l$ — відповідно вектори стану, керування, зовнішніх збурень, керованого і спостережуваного виходів, $t \in \mathcal{T}$, а всі матричні коефіцієнти відповідних розмірів сталі, причому $\operatorname{rank} E = \rho \leq n$. Нас цікавлять закони керування, які понижують критерії якості типу J_0 і J типу (7) і, зокрема, забезпечують умови неекспансивності замкненої системи стосовно вектора керованого виходу z_t. Статичні й динамічні регулятори, які мінімізують критерій якості J, називатимемо J-*оптимальними*. J_0-оптимальне керування у разі одиничних вагових матриць P і Q є H_∞-*оптимальними*.

Побудуємо множину керувань для системи (28) у формі лінійного зворотного зв'язку за вимірюваним виходом

$$u_t = Ky_t, \quad \det(I_m - KD_{22}) \neq 0, \tag{29}$$

де $K \in \mathcal{K}$, $\mathcal{K}$ — еліпсоїд у просторі $\mathbb{R}^{m\times l}$ виду (3), визначений матрицями $P_0 = P_0^\top > 0$ і $Q_0 = Q_0^\top > 0$.

Наведемо замкнену систему

$$Ex_{t+1} = A_* x_t + B_* w_t, \quad z_t = C_* x_t + D_* w_t, \tag{30}$$

де

$$A_* = A + B_2 K_0 C_2, \quad B_* = B_1 + B_2 K_0 D_{21}, \quad C_* = C_1 + D_{12} K_0 C_2,$$

$$D_* = D_{11} + D_{12} K_0 D_{21}, \quad K_0 = (I_m - KD_{22})^{-1} K.$$

Теорема 5.1. *Нехай існують матриці* X, $P_0 = P_0^\top > 0$ *і* $Q_0 = Q_0^\top > 0$, *що задовольняють систему ЛМН*

$$\Omega(X, P_0, Q_0) = \begin{bmatrix} \Omega_1 & \Omega_2 & \Omega_3 \\ \Omega_2^\top & \Omega_4 & \Omega_5 \\ \Omega_3^\top & \Omega_5^\top & \Omega_6 \end{bmatrix} < 0, \quad E^\top XE \geq 0, \tag{31}$$

де

$$\Omega_1 = A^\top XA - E^\top XE + C_1^\top QC_1 + C_2^\top Q_0 C_2,$$
$$\Omega_2 = A^\top XB_1 + C_1^\top QD_{11} + C_2^\top Q_0 D_{21},$$
$$\Omega_3 = A^\top XB_2 + C_1^\top QD_{12} + C_2^\top Q_0 D_{22},$$
$$\Omega_4 = B_1^\top XB_1 + D_{11}^\top QD_{11} + D_{21}^\top Q_0 D_{21} - \gamma^2 P,$$
$$\Omega_5 = B_1^\top XB_2 + D_{11}^\top QD_{12} + D_{21}^\top Q_0 D_{22},$$
$$\Omega_6 = B_2^\top XB_2 + D_{12}^\top QD_{12} + D_{22}^\top Q_0 D_{22} - P_0.$$

Тоді для довільного керування (29) *при* $K \in \mathcal{K}$ *замкнена система* (30) *є допустимою і має критерій якості* $J_0 < \gamma$. *При цьому* $J < \gamma$, *якщо разом зі* (31) *виконуються умови* (14), (16) *або*

$$X_0 = X_0^\top > 0, \quad 0 \leq E^\top XE < \gamma^2 X_0. \tag{32}$$

Доведення теореми 5.1 безпосередньо випливає з лем 3.2, 3.3 і подання виразу $\Psi(X)$ у лемі 3.2 для системи (30) у формі (2), де

$$W(X) = \begin{bmatrix} A^\top XA - E^\top XE + C_1^\top QC_1 & A^\top XB_1 + C_1^\top QD_{11} \\ B_1^\top XA + D_{11}^\top QC_1 & B_1^\top XB_1 + D_{11}^\top QD_{11} - \gamma^2 P \end{bmatrix},$$

$$U(X) = \big[B_2^\top XA + D_{12}^\top QC_1, \quad B_2^\top XB_1 + D_{12}^\top QD_{11}\big], \tag{33}$$

$$V = \big[C_2,\, D_{21}\big], \quad R(X) = B_2^\top XB_2 + D_{12}^\top QD_{12}, \quad \mathbf{D}(K) = K_0.$$

При цьому умова (2) зводиться до першої нерівності (31).

При застосуванні теореми 5.1 необхідно, щоб у відсутності керування ($u_t = 0$) виконувалась оцінка $J_0 < \gamma$, а в'язка матриць $F(\lambda) = A - \lambda E$ була допустимою. Якщо це не так, то виникає задача знаходження умов існування керування (29), що забезпечує вказані властивості замкненої системи. Для її розв'язання можна скористатись лемою 2.4 для виразу (2) з матрицями (33). Зокрема, виконується таке твердження.

Теорема 5.2. *Нехай існує матриця $X = X^\top$, що задовольняє співвідношення* (14), (16) *і*

$$R(X) > 0, \quad W(X) < U^\top(X)R^{-1}(X)U(X), \quad W_V^\top W(X)W_V < 0. \tag{34}$$

Тоді існує керування (29), *при якому замкнена система* (30) *є допустимою і має критерій якості $J < \gamma$.*

За умов теореми 5.2 матрицю шуканого регулятора (29) можна побудувати як $K_0 = K_*(I_l + D_{22}K_*)^{-1}$, де K_* — розв'язок квадратичної матричної нерівності

$$W(X) + U^\top(X)K_*V(X) + V^\top(X)K_*^\top U(X) + V^\top K_*^\top\, R(X)\, K_*V < 0 \tag{35}$$

із матричними коефіцієнтами (33).

Можна отримати аналог теорем 5.1 і 5.2 із застосуванням динамічних регуляторів на основі подання замкненої системи у розширеному фазовому просторі у формі (30).

6 Приклад

Розглянемо лінеаризовану дискретну модель гідравлічної системи зі трьома послідовно сполученими резервуарами [16], яка описується як дескрипторна система керування (28) із такими матрицями [17]:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0,9692 & 0 & 0 \\ 0,0095 & 0,9867 & 0 \\ 1 & 2,3328 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0,02 & 0 \\ 0,01 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0,056 \\ 0,003 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0,3 \end{bmatrix}, \quad D_{12} = 0, \quad D_{21} = 0_{2\times 2}, \quad D_{22} = 0_{2\times 1}.$$

У даному прикладі $n = 3$, $m = 1$, $k = 1$, $s = 2$ і $l = 2$. Компоненти вектора стану $x_t = \left[x_t^1, x_t^2, x_t^3\right]^\top$ визначають рівні рідини у відповідних резервуарах, вектор $w_t = \left[\xi_t, \eta_t\right]^\top$ формують неконтрольовані збурення ξ_t й похибки η_t у вимірах $y_t = x_t^2 + 0,3\eta_t$, а керування u_t, що регулює рівні рідини у перших двох резервуарах — це дебіт (потік) рідини в насосі із третього резервуара в перший (рис. 1).

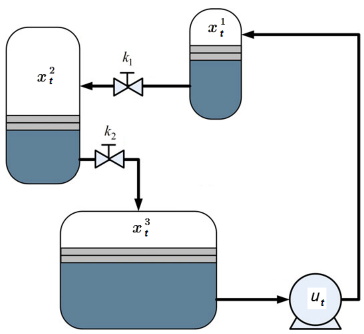

Рис 1. Гідравлічна система з трьома резервуарами.

Для проведення чисельного експерименту обрано вагові матриці критерію якості (7): $P = \mathrm{diag}\left\{0,5;\, 1\right\}$, $Q = 1$ і $X_0 = E^\top E$. Для системи без керування маємо такі значення $J_0 = 1,74522$ і $J = 6,35064$, знайдені згідно з (19) на основі LMI Toolbox комп'ютерної системи Matlab. За допомогою комп'ютерної системи PTC Mathcad Prime при $\gamma = 3$ знайдено матрицю

$$X = \begin{bmatrix} 0,00004 & -0,00040 & 0,00003 \\ -0,00040 & 1,02571 & 0,00248 \\ 0,00003 & 0,00248 & -0,07692 \end{bmatrix},$$

що задовольняє систему співвідношень (14), (16) і (34). Розв'язуючи квадратичну матричну нерівність (35), побудовано статичний регулятор (29) з вектором коефіцієнтів

$$K = \begin{bmatrix} -1,98623 & -311,56414 \end{bmatrix},$$

при якому замкнена система (30) має критерії якості $J_0 = 0,30041$ і $J = 1,05131 < \gamma$, а відповідна в'язка матриць $F_*(\lambda) = A_* - \lambda E$ зі скінченим спектром $\sigma(F_*) = \{0,77218,\ 0,13780\}$ допустима.

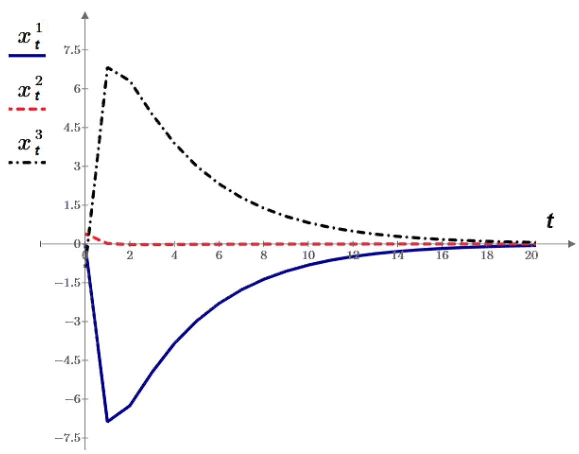

Рис 2. Поведінка замкненої системи при найгіршому збуренні.

Далі, розв'язуючи систему співвідношень (20), (21) і (25) стосовно X при $\gamma = J$, знайдено найгірші структурований вектор зовнішніх збурень

$$w_t = K_0 x_t, \quad K_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0,01999 & 0 \\ 0 & 0,29549 & 0 \end{bmatrix},$$

і початковий вектор $x_0 = \begin{bmatrix} -0,00015 & 0,39405 & -0,91909 \end{bmatrix}^\top$ стосовно критерію якості J для замкненої системи (див лему 4.1).

На рис. 2 зображена поведінка розв'язку замкненої системи

$$Ex_{t+1} = A_0 x_t, \quad A_0 = A_* + B_* K_0,$$

при найгіршому збуренні. Даний розв'язок знайдено у формі $x_t = TU^t z_0$, $t = 0, 1, \ldots$, де $T \in R^{n\times r}$ і $U \in R^{r\times r}$ — матриці, що задоволь-

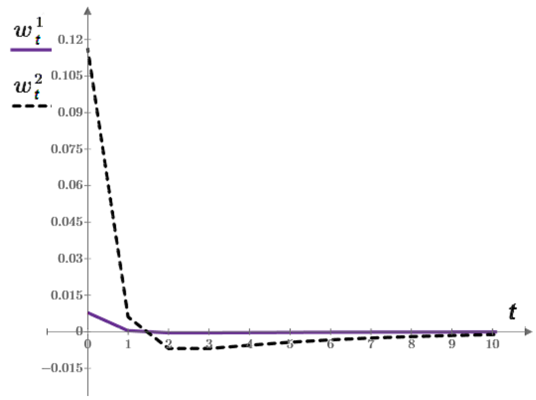

Рис 3. Найгірше збурення.

няють співвідношення

$$A_0T = ETU, \quad \operatorname{rank} T = r = 2.$$

Рис. 3 демонструє поведінку цього збурення під дією побудованого статичного регулятора.

[1] *Поляк Б. Т., Щербаков П. С.* Робастная устойчивость и управление. — М.: Наука, 2002. — 303 с.

[2] *Кунцевич В. М.* Управление в условиях неопределенности: гарантированные результаты в задачах управления и идентификации. — К.: Наук. думка, 2006. — 264 с.

[3] *Баландин Д. В., Коган М. М.* Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. — М.: Физматлит, 2007. — 280 с.

[4] *Белов А. А., Курдюков А. П.* Дескрипторные системы и задачи управления. — М.: Физматлит, 2015. — 272 с.

[5] *Dullerud G. E., Paganini F. G.* A Course in Robust Control Theory. A Convex Approach. — Berlin: Springer-Verlag, 2000. — 419 p.

[6] *Мазко А. Г.* Робастная устойчивость и стабилизация динамических систем. Методы матричных и конусных неравенств // Праці Інституту математики НАН України, 2016. — **102**. — 332 с.

[7] *Мазко А.Г., Кусий С.Н.* Стабилизация по выходу и взвешенное подавление возмущений в дискретных системах управления // Проблемы управления и информатики. — 2017. — № 6. — С. 78–93.

[8] *Баландин Д. В., Коган М. М.* Обобщенное H_∞-оптимальное управление как компромисс между H_∞-оптимальным и γ-оптимальным управлениями // Автоматика и телемеханика. — 2010. — №6. — С. 20–38.

[9] *Баландин Д. В., Коган М. М, Кривдина Л. Н., Федюков А. А.* Синтез обобщенного H_∞-оптимального управления в дискретном времени на конечном и бесконечном интервалах // Автоматика и телемеханика. — 2014. — № 1. — С. 3–22.

[10] *Gahinet P., Nemirovski A., Laub A. J., Chilali M.* The LMI Control Toolbox. For Use with Matlab. User's Guide. — Natick, MA: The MathWorks, Inc., 1995. — 138 p.

[11] *Воскобойников Ю. Е., Задорожный А. Ф.* Основы вычислений и программирования в пакете MathCAD PRIME: Учебное пособие. — СПб.: Изд-во "Лань", 2016. — 224 с.

[12] *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1988. — 552 с.

[13] *Gahinet P., Apkarian P.* A Linear Matrix Inequality Approach to H_∞ Control // Intern. J. of Robust and Nonlinear Control. — 1994. — **4**. — P. 421 – 448.

[14] *Hsiung K.-L., Lee L.* Lyapunov inequality and bounded real lemma for discrete-time descriptor systems // IEE Proc.– Control Theory Appl. — 1999. — **146**, 4. — P. 327–331.

[15] *Xu S., Yang C.* H_∞ state feedback control for discrete singular systems // *IEEE Transactions on Automatic Control*. — 2000. — **45**, 7. — P. 1405–1409.

[16] *Araujo J.M., Barros P.R., Dorea C.E.T.* Design of Observers With Error Limitation in Discrete-Time Descriptor Systems: A Case Study of a Hydraulic Tank System // *IEEE Trans. Control Syst. Technol.* — 2012. — **20**, 4. — P. 1041–1047.

[17] *Belov A.A., Andrianova O.G., Kurdyukov A.P.* Control of Discrete-Time Descriptor Systems. An Anisotropy-Based Approach. *Studies in Systems, Decision and Control*, vol. 157 (ed. J. Kacprzyk). — Gewerbestrasse: Springer International Publishing AG, 2018. — 169 p.