Збірник праць Інституту математики НАН України 2019, т. 16, № 2, 63–84

УДК 517.935;681.5

Оцінка впливу і гасіння обмежених збурень у дескрипторних системах керування *

О. Г. Мазко, Т. О. Котов

Інститут математики НАН України, Київ;
mazkoag@gmail.com, taras.kotov@gmail.com

The necessary and sufficient conditions for existence of dynamic regulators that provide a prescribed estimate of the weighted damping level of bounded disturbances and robust stability of linear descriptor systems are established. An algorithm for the generalized H_∞-optimization of descriptor systems with controlled and observed outputs as well as a method for finding the worst vectors of external and initial disturbances with respect to a weighted performance criterion are proposed. The main computational procedures of the algorithm reduce to solving the linear matrix inequalities with additional rank restrictions. The efficiency of the algorithm is demonstrated by the illustrative example of a descriptor stabilization system with bounded disturbances.

Встановлено необхідні й достатні умови існування динамічних регуляторів, що забезпечують задану оцінку зваженого рівня гасіння обмежених збурень і робастну стійкість лінійних дескрипторних систем. Запропоновано алгоритм узагальненої H_∞-оптимізації дескрипторних систем із керованими і спостережуваними виходами, а також методику знаходження найгірших векторів зовнішніх і початкових збурень стосовно зваженого критерію якості. Основні обчислювальні процедури алгоритму зводяться до розв'язування лінійних матричних нерівностей при додаткових рангових обмеженнях. Працездатність алгоритму продемонстрована на ілюстративному прикладі дескрипторної системи стабілізації з обмеженими збуреннями.

*Робота виконана за часткової підтримки НДР № 0117U004077.

1 Вступ

Один із важливих напрямків досліджень у сучасній теорії керування становлять методи H_∞-оптимізації систем, які забезпечують робастну стійкість станів рівноваги й мінімізують негативний вплив зовнішніх збурень на динаміку керованих об'єктів. Типовим критерієм якості у задачах H_∞-оптимізації неперервних і дискретних систем керування з нульовим початковим станом є рівень гасіння зовнішніх збурень, якому відповідає максимальне значення відношення L_2-норм векторів керованого виходу об'єкта і збурень (див., наприклад, [1–4]). Застосування зважених критеріїв якості у таких задачах дає змогу встановити пріоритети між компонентами виходу, зовнішніх і початкових збурень [5–8]. Відомі методи синтезу H_∞-керування базуються на використанні верхніх оцінок для відповідних критеріїв якості, встановлених у термінах матричних рівнянь і нерівностей (твердження на взірець "Bounded Real Lemmas" [9, 10, 12]). Аналогічні твердження встановлено у [13–16] для класу дескрипторних (диференціально-алгебраїчних) систем. Такі системи виникають при дослідженні динаміки складних об'єктів механіки, електротехніки, економіки тощо [17–20]).

Ця робота є продовженням досліджень [6, 21], присвячених задачам синтезу стабілізаційних регуляторів для лінійних систем із керованими і спостережуваними виходами, які забезпечують бажану оцінку рівня впливу обмежених збурень на якість перехідних процесів. Розглядаються зважені критерії якості дескрипторних систем щодо вектора керованого виходу і проводиться їхня оцінка методом квадратичних функцій Ляпунова. Пропонуються нові необхідні й достатні умови існування і відповідний алгоритм побудови зваженого H_∞-керування у формі динамічного зворотного зв'язку за спостережуваним виходом, а також методика знаходження найгірших векторів зовнішніх і початкових збурень стосовно зваженого критерію якості. Отримані умови виконання заданих верхніх оцінок для цих критеріїв якості подаються як лінійні матричні нерівності (ЛМН) при додаткових рангових обмеженнях.

Використовуватимемо такі позначення: I_n — одинична матриця порядку n; $0_{n\times m}$ — нульова матриця розмірів $n \times m$; $X = X^\top > 0$ (≥ 0) — додатно (невід'ємно) визначена матриця X; $\sigma(A)$ — спектр матриці A; $A^{-1}(A^+)$ — обернена (псевдообернена) матриця; $\operatorname{Ker} A$ — ядро матриці A; W_A — матриця, стовпці якої утворюють базис ядра матриці A; $\mathrm{Co}\{A_1, \dots, A_\nu\}$ — опуклий многогранник (політоп) із вершинами $A_1, \dots, A_\nu$ у просторі матриць. $\|x\|$ — евклідова норма вектора x; $\|w\|_P = \Big(\int\limits_0^\infty w^\top P w \, dt \Big)^{\frac{1}{2}}$ — зважена L_2-норма вектор-функції $w(t)$.

2 Зважений рівень гасіння обмежених збурень

Розглянемо лінійну дескрипторну систему зі збуреннями

$$E\dot{x} = Ax + Bw, \quad z = Cx + Dw, \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $w \in \mathbb{R}^s$ і $z \in \mathbb{R}^k$ — відповідно вектори стану, зовнішніх збурень і виходу. Усі матричні коефіцієнти в (1) сталі, причому в'язка матриць $F(\lambda) = A - \lambda E$ *регулярна*, тобто $\det F(\lambda) \not\equiv 0$ $(\lambda \in \mathbb{C})$.

Наведемо канонічну форму Веєрштрасса регулярної в'язки матриць [22]

$$LF(\lambda)R = \left[\begin{array}{c|c} A_1 - \lambda I_r & 0 \\ \hline 0 & I_{n-r} - \lambda N \end{array} \right], \tag{2}$$

де власні значення матриці A_1 утворюють спектр $\sigma(F)$, N — нільпотентна матриця індексу ν, а L і R — деякі невироджені матриці. В'язка матриць $F(\lambda)$ *стійка*, якщо $\sigma(F) \subset \mathbb{C}^- = \{\lambda : \mathrm{Re}\,\lambda < 0\}$.

У разі $\rho = \mathrm{rank}\, E < n$ систему (1) можна подати у формі

$$\dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 w, \quad N\dot{x}_2 = x_2 + B_2 w, \quad z = C_1 x_1 + C_2 x_2 + Dw, \tag{3}$$

де $x_1 \in \mathbb{R}^r$, $x_2 \in \mathbb{R}^{n-r}$,

$$x = R \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad x_0 = R \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{bmatrix}, \quad LB = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad CR = [C_1, C_2].$$

Ця система має r скінченних *динамічних мод*, $n - \rho$ *нединамічних мод* і $\rho - r$ *імпульсивних мод* [23]. Регулярна в'язка матриць $F(\lambda)$ при відсутності імпульсивних мод $(\rho = r)$ називається *неімпульсивною*. У цьому випадку $N = 0$ і динамічна підсистема у (3)

$$\dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 w, \quad z = C_1 x_1 + D_1 w, \quad x_1(0) = x_{01}, \tag{4}$$

де $D_1 = D - C_2 B_2$.

Означення 2.1. В'язка матриць $F(\lambda)$ називається *допустимою*, якщо вона регулярна, стійка і неімпульсивна. Дескрипторна система (1) з допустимою в'язкою матриць $F(\lambda)$ є *допустимою*.

Лема 2.1. [15] *В'язка матриць $F(\lambda)$ є допустимою тоді і лише тоді, коли сумісна система ЛМН*

$$A^\top X + X^\top A < 0, \quad E^\top X = X^\top E \geq 0.$$

Нехай вектор збурень $w(t)$ у системі (1) обмежений за зваженою L_2-нормою $\|w\|_P$. Введемо критерій якості цієї системи

$$J = \sup_{(w,x_0)\in\mathcal{W}} \frac{\|z\|_Q}{\sqrt{\|w\|_P^2 + x_0^\top X_0 x_0}}, \tag{5}$$

де $\mathcal{W}$ — множина пар (w, x_0), для яких система (1) має розв'язок і виконується нерівність $0 < \|w\|_P^2 + x_0^\top X_0 x_0 < \infty$, а $P = P^\top > 0$, $Q = Q^\top > 0$ і $X_0 = X_0^\top \geq 0$ — деякі вагові матриці. Значення J характеризує зважений рівень впливу зовнішніх і початкових збурень на вихід системи (1). Для такого критерію якості використовуємо позначення J_0 або J_1, якщо відповідно $x_0^\top X_0 x_0 = 0$ або $w \equiv 0$. Очевидно, що $J_0 \leq J$ і $J_1 \leq J$, причому J_1 є характеристикою підсистеми (4), оскільки при відсутності зовнішніх збурень $x_2 \equiv 0$.

Означення 2.2. Вектор збурення $w(t)$ і початковий вектор x_0 називатимемо *найгіршими* стосовно критерію якості J, якщо на їхніх значеннях досягається sup у (5), тобто

$$\|z\|_Q^2 = J^2\big(\|w\|_P^2 + x_0^\top X_0 x_0\big).$$

Означення 2.3. Система (1) називається *неекспансивною*, якщо її вектор виходу при довільному $\tau > 0$ задовольняє нерівність

$$\int_0^\tau z^\top Q z dt \leq \int_0^\tau w^\top P w dt + x_0^\top X_0 x_0.$$

Неекспансивна система має критерій якості $J \leq 1$.

Лема 2.2. [16] *Якщо існують матриці X і $S = S^\top \geq 0$, що задовольняють систему ЛМН*

$$\begin{bmatrix} S & S - E^\top X \\ S - X^\top E & 0 \end{bmatrix} \geq 0, \tag{6}$$

$$\Psi(X) = \begin{bmatrix} A^\top X + X^\top A + C^\top QC & X^\top B + C^\top QD \\ B^\top X + D^\top QC & D^\top QD - \gamma^2 P \end{bmatrix} < 0, \qquad (7)$$

то в'язка матриць $F(\lambda)$ допустима і $J_0 < \gamma$. Зворотне твердження виконуєтьcя за умови

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} E \\ D^\top QC \end{bmatrix} = \operatorname{rank} E. \qquad (8)$$

Лема 2.3. [16] *Нехай вагова матриця X_0 задана у вигляді*

$$X_0 = E^\top HE, \quad H = H^\top > 0. \qquad (9)$$

Якщо сумісна система співвідношень (6), (7) *і*

$$S \leq \gamma^2 X_0, \qquad (10)$$

$$\operatorname{rank}(S - \gamma^2 X_0) = \operatorname{rank} E, \qquad (11)$$

то в'язка матриць $F(\lambda)$ допустима і $J < \gamma$. Зворотне твердження виконуєтьcя за умови (8).

Зауваження 2.1. Матрична нерівність (6) виконується тоді і лише тоді, коли $S = E^\top X = X^\top E \geq 0$.

Зауваження 2.2. При виконанні умов, що забезпечують строгі оцінки $J_0 < \gamma$ і $J < \gamma$ у лемах 2.2–2.3, нульовий стан системи (1) зі структурованою невизначеністю вектора збурень

$$w = \frac{1}{\gamma}\Theta z, \quad \Theta^\top P \Theta \leq Q \qquad (12)$$

робастно стійкий зі спільною функцією Ляпунова $v(x) = x^\top Sx$. Це твердження доводиться за допомогою узагальненої леми про матричну невизначеність [5, лема 3.3.1].

Із наведених тверджень випливають алгоритми обчислення критеріїв якості J_0 і J системи (1) на основі розв'язування відповідних оптимізаційних задач (див. також [21, лема 2.3]). Зокрема, при виконанні необхідних і достатніх умов лем 2.2 і 2.3 відповідно маємо:

$$\begin{gathered} J_0 = \inf\left\{\gamma : \ \Psi(X) < 0, \ \ E^\top X = X^\top E \geq 0\right\}, \\ J = \inf\left\{\gamma : \ \Psi(X) < 0, \ \ 0 \leq E^\top X = X^\top E \leq \gamma^2 X_0\right\}. \end{gathered} \qquad (13)$$

3 Найгірші зовнішні і початкові збурення стосовно зваженого критерію якості

У практичних задачах доцільно визначити найгірші зовнішні і початкові збурення у системі керування, а також дослідити поведінку замкненої системи при таких збуреннях.

Із доведення леми 2.3 випливає, що для виконання нестрогої оцінки $J \le \gamma$ достатньо існування матриць X і $S = S^\top \ge 0$, що задовольняють матричні нерівності (6), (10) і $\Psi(X) \le 0$. Якщо

$$R = \gamma^2 P - D^\top Q D > 0, \tag{14}$$

то за лемою Шура $\Psi(X) \le 0$ лише тоді, коли виконується матрична нерівність типу Ріккаті

$$A_1^\top X + X^\top A_1 + X^\top R_1 X + Q_1 \le 0, \tag{15}$$

де $A_1 = A + BR^{-1}D^\top QC$, $Q_1 = C^\top \big(Q + QDR^{-1}D^\top Q\big)C$, $R_1 = BR^{-1}B^\top$. При цьому виконується нерівність

$$\dot v(x) + z^\top Q z - \gamma^2 w^\top P w = [x^\top, w^\top]\Psi(X) \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} \le 0, \tag{16}$$

де $\dot v(x)$ — похідна функції $v(x) = x^\top S x$ в силу системи (1). Після інтегрування виразу (16) від 0 до τ за умов (6), (10) і $v(x(\tau)) \to 0$ при $\tau \to \infty$ маємо

$$\|z\|_Q^2 - \gamma^2 \|w\|_P^2 \le x_0^\top S x_0 \le \gamma^2 x_0^\top X_0 x_0, \tag{17}$$

тобто $J \le \gamma$. Причому, виконання рівностей у (17) означає, що $J = \gamma$, а відповідні вектор збурення $w(t)$ і початковий вектор x_0 є найгіршими стосовно критерію якості J. Перша рівність у (17) виконується, якщо

$$w = K_0 x, \quad K_0 = R^{-1}(B^\top X + D^\top QC), \tag{18}$$

де X — розв'язок матричного рівняння Ріккаті

$$A_1^\top X + X^\top A_1 + X^\top R_1 X + Q_1 = 0, \tag{19}$$

а $x(t)$ — розв'язок системи

$$E\dot x = (A + BK_0)x, \quad x(0) = x_0. \tag{20}$$

При цьому права частина співвідношення (16) дорівнює 0. Друга рівність у (17) виконується, якщо

$$x_0^\top (S - \gamma^2 X_0) x_0 = 0. \tag{21}$$

Останнє співвідношення за умови (10) еквівалентне рівності $(S - \gamma^2 X_0)x_0 = 0$. Зокрема, ненульовий вектор $x_0 \in \operatorname{Ker}(S - \gamma^2 X_0)$ є власним вектором матриці $S - \gamma^2 X_0$, що відповідає її нульовому власному значенню. Якщо $x_0 \in \operatorname{Ker} E$, то рівність (21) виконується незалежно від значення матриці-розв'язку X рівняння (19).

Отже, встановлено таке твердження.

Лема 3.1. *Нехай існують матриці X і $S = S^\top \geq 0$, що задовольняють співвідношення* (6), (10) *і* (19) *при $\gamma = J$. Тоді структурований вектор зовнішніх збурень* (18) *і довільний вектор $x_0 \in \operatorname{Ker}(S - J^2 X_0)$ є найгіршими стосовно критерію якості J для системи* (1).

4 Лінійна дескрипторна система з керованими і спостережуваними виходами

Розглянемо систему керування

$$\begin{aligned} &E\dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u, \quad x(0) = x_0, \\ &z = C_1 x + D_{11} w + D_{12} u, \\ &y = C_2 x + D_{21} w + D_{22} u, \end{aligned} \tag{22}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $w \in \mathbb{R}^s$, $z \in \mathbb{R}^k$ і $y \in \mathbb{R}^l$ — вектори відповідно стану, керування, зовнішніх збурень, керованого і спостережуваного виходів, а всі матричні коефіцієнти відповідних розмірів сталі, причому $\operatorname{rank} E = \rho \leq n$. Нас цікавлять закони керування, які понижують критерії якості типу (5) і, зокрема, забезпечують умови неекспансивності замкненої системи стосовно вектора керованого виходу z. Статичні й динамічні регулятори, які мінімізують критерій якості J, називатимемо *J-оптимальними.* J_0-оптимальне керування у разі одиничних вагових матриць P і Q є *H_∞-оптимальним.*

У загальному випадку керування (регулятор) будуємо як динамічний зворотний зв'язок за спостережуваним виходом

$$\dot{\xi} = Z\xi + Vy, \quad u = U\xi + Ky, \quad \xi(0) = 0, \tag{23}$$

де $\xi \in \mathbb{R}^p$, p — порядок регулятора, матриці Z, V, U і K підлягають визначенню. Побудова динамічного регулятора (23) формально зводиться до пошуку статичного регулятора $\widehat{u} = \widehat{K}_* \widehat{y}$ для системи керування у розширеному фазовому просторі:

$$\begin{array}{l} \widehat{E}\dot{\widehat{x}} = \widehat{A}\widehat{x} + \widehat{B}_1 w + \widehat{B}_2 \widehat{u}, \quad \widehat{x}(0) = \widehat{x}_0, \\ z = \widehat{C}_1 \widehat{x} + \widehat{D}_{11} w + \widehat{D}_{12} \widehat{u}, \\ \widehat{y} = \widehat{C}_2 \widehat{x} + \widehat{D}_{21} w, \end{array} \tag{24}$$

де

$$\widehat{x} = \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix}, \ \widehat{x}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \widehat{y} = \begin{bmatrix} y - D_{22} u \\ \xi \end{bmatrix}, \ \widehat{u} = \begin{bmatrix} u \\ \dot{\xi} \end{bmatrix}, \ \widehat{E} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix},$$

$$\widehat{A} = \begin{bmatrix} A & 0_{n\times p} \\ 0_{p\times n} & 0_{p\times p} \end{bmatrix}, \quad \widehat{B}_1 = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0_{p\times s} \end{bmatrix}, \quad \widehat{B}_2 = \begin{bmatrix} B_2 & 0_{n\times p} \\ 0_{p\times m} & I_p \end{bmatrix},$$

$$\widehat{C}_1 = \big[C_1, 0_{k\times p}\big], \quad \widehat{D}_{11} = D_{11}, \quad \widehat{D}_{12} = \big[D_{12}, 0_{k\times p}\big],$$

$$\widehat{C}_2 = \begin{bmatrix} C_2 & 0_{l\times p} \\ 0_{p\times n} & I_p \end{bmatrix}, \quad \widehat{D}_{21} = \begin{bmatrix} D_{21} \\ 0_{p\times s} \end{bmatrix}, \quad \widehat{D}_{22} = \begin{bmatrix} D_{22} & 0_{l\times p} \\ 0_{p\times m} & 0_{p\times p} \end{bmatrix},$$

$$\widehat{K}_* = \begin{bmatrix} K_* & U_* \\ V_* & Z_* \end{bmatrix}, \ \widehat{K} = \begin{bmatrix} K & U \\ V & Z \end{bmatrix} = (I_{m+p} + \widehat{K}_* \widehat{D}_{22})^{-1} \widehat{K}_*.$$

Наведемо замкнену систему

$$\widehat{E}\dot{\widehat{x}} = \widehat{A}_* \widehat{x} + \widehat{B}_* w, \quad z = \widehat{C}_* \widehat{x} + \widehat{D}_* w, \quad \widehat{x}(0) = \widehat{x}_0, \tag{25}$$

де

$$\widehat{A}_* = \widehat{A} + \widehat{B}_2 \widehat{K}_* \widehat{C}_2, \quad \widehat{B}_* = \widehat{B}_1 + \widehat{B}_2 \widehat{K}_* \widehat{D}_{21},$$

$$\widehat{C}_* = \widehat{C}_1 + \widehat{D}_{12} \widehat{K}_* \widehat{C}_2, \quad \widehat{D}_* = \widehat{D}_{11} + \widehat{D}_{12} \widehat{K}_* \widehat{D}_{21}.$$

Нехай вагова матриця X_0 у (5) задана у (9), а $\widehat{J}$ — критерій якості типу (5) для системи (25) із ваговою матрицею

$$\widehat{X}_0 = \widehat{E}^\top \widehat{H} \widehat{E}, \quad \widehat{H} = \begin{bmatrix} H & H_1^\top \\ H_1 & H_2 \end{bmatrix} > 0. \tag{26}$$

Оскільки $\xi_0 = 0$, то $\widehat{J} = J$, причому $X_0 = E^\top H E$ є першим діагональним блоком матриці $\widehat{X}_0$ і значення $\widehat{J}$ не залежить від H_1 і H_2.

Теорема 4.1. *Нехай існують матриці* X, Y, $S = S^\top \geq 0$ *і* $\Theta = \Theta^\top \geq 0$, *що задовольняють співвідношення* (6), (10), (11) *і*

$$EY = Y^\top E^\top \geq 0, \quad \operatorname{rank} \begin{bmatrix} X - \Theta E & \gamma I_n \\ \gamma I_n & Y \end{bmatrix} = n, \quad \operatorname{rank}\Theta \leq p, \tag{27}$$

$$W_R^\top \begin{bmatrix} A^\top X + X^\top A + C_1^\top Q C_1 & X^\top B_1 + C_1^\top Q D_{11} \\ B_1^\top X + D_{11}^\top Q C_1 & D_{11}^\top Q D_{11} - \gamma^2 P \end{bmatrix} W_R < 0, \tag{28}$$

$$W_L^\top \begin{bmatrix} AY + Y^\top A^\top + B_1 P^{-1} B_1^\top & Y^\top C_1^\top + B_1 P^{-1} D_{11}^\top \\ C_1 Y + D_{11} P^{-1} B_1^\top & D_{11} P^{-1} D_{11}^\top - \gamma^2 Q^{-1} \end{bmatrix} W_L < 0, \tag{29}$$

де $L = \left[B_2^\top, D_{12}^\top\right]$ *і* $R = \left[C_2, D_{21}\right]$. *Тоді існує динамічний регулятор* (23) *порядку* p, *при якому замкнена система* (25) *є допустимою і її критерій якості* $J < \gamma$. *Навпаки, якщо для деякого регулятора* (23) *замкнена система допустима, її критерій якості* $J < \gamma$ *і виконується рівність*

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} \widehat{E} \\ \widehat{D}_*^\top Q \widehat{C}_* \end{bmatrix} = \rho + p, \tag{30}$$

то система співвідношень (6), (10), (11), (27), (28) *і* (29) *сумісна.*

Доведення. На основі леми Шура [22] подамо умови леми 2.3 для системи (25) у формі

$$\widehat{\Omega}_* = \begin{bmatrix} \widehat{A}_*^\top \widehat{X} + \widehat{X}^\top \widehat{A}_* & \widehat{X}^\top \widehat{B}_* & \widehat{C}_*^\top \\ \widehat{B}_*^\top \widehat{X} & -\gamma^2 P & \widehat{D}_*^\top \\ \widehat{C}_* & \widehat{D}_* & -Q^{-1} \end{bmatrix} < 0, \quad \widehat{X} = \begin{bmatrix} X & X_3 \\ X_1 & X_2 \end{bmatrix}, \tag{31}$$

$$0 \leq \widehat{E}^\top \widehat{X} = \widehat{X}^\top \widehat{E} = \widehat{S} \leq \gamma^2 \widehat{X}_0, \quad \operatorname{rank}(\widehat{S} - \gamma^2 \widehat{X}_0) = \rho + p. \tag{32}$$

Очевидно, що блочна матриця $\widehat{X}$ у (31) повинна бути невиродженою. Застосовуючи розклад невід'ємно визначеної матриці $\widehat{S} = \widehat{L}^\top \widehat{L}$ у (32), маємо $\left[X_1, X_2\right] = L_2^\top \widehat{L}$, $\operatorname{rank}\left[X_1, X_2\right] = p \leq \operatorname{rank} L_2 = \operatorname{rank} X_2$, де $\widehat{L} = \left[L_1, L_2\right]$, $X_1 = X_3^\top E$ і $X_2 = X_2^\top = L_2^\top L_2 > 0$. Рангове обмеження у (32) за умов (6), (10) і (11) можна задовольнити шляхом вибору доповнювальних блоків H_1 і H_2 матриці $\widehat{H} > 0$ у (26), які не впливають на значення критерію якості $\widehat{J}$. Зокрема, якщо $H_1 = \gamma^{-2} X_3^\top$ і $H_2 > \gamma^{-2} X_2$, то співвідношення (32) зводяться до умов (6), (10) і (11).

Застосуємо таке перетворення шуканої матриці $\widehat{X} = \widehat{U}^\top \widetilde{X} \widehat{V}^{-1}$, де

$$\widehat{U} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ X_2^{-1} X_3^\top & I_p \end{bmatrix}, \quad \widehat{V} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -X_2^{-1} X_1 & X_2^{-1} \end{bmatrix}, \quad \widetilde{X} = \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix},$$

$G = X - X_3 X_2^{-1} X_1$. Тоді матричну нерівність (31) можна подати у формі

$$\widetilde{\Omega}_* = \begin{bmatrix} \widetilde{A}_*^\top \widetilde{X} + \widetilde{X}^\top \widetilde{A}_* & \widetilde{X}^\top \widetilde{B}_* & \widetilde{C}_*^\top \\ \widetilde{B}_*^\top \widetilde{X} & -\gamma^2 P & \widetilde{D}_*^\top \\ \widetilde{C}_* & \widetilde{D}_* & -Q^{-1} \end{bmatrix} = \widetilde{L}_*^\top \widehat{K}_* \widetilde{R}_* + \widetilde{R}_*^\top \widehat{K}_*^\top \widetilde{L}_* + \widetilde{\Omega} < 0,$$

де

$$\widetilde{A}_* = \widehat{U} \widehat{A}_* \widehat{V} = \widetilde{A} + \widetilde{B}_2 \widehat{K}_* \widetilde{C}_2, \quad \widetilde{B}_* = \widehat{U} \widehat{B}_* = \widetilde{B}_1 + \widetilde{B}_2 \widehat{K}_* \widehat{D}_{21},$$

$$\widetilde{C}_* = \widehat{C}_* \widehat{V} = \widehat{C}_1 + \widehat{D}_{12} \widehat{K}_* \widetilde{C}_2, \quad \widetilde{D}_* = D_{11} + \widehat{D}_{12} \widehat{K}_* \widehat{D}_{21},$$

$$\widetilde{A} = \widehat{U} \widehat{A} \widehat{V} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ X_2^{-1} X_3^\top & 0 \end{bmatrix}, \quad \widetilde{B}_2 = \widehat{U} \widehat{B}_2 = \begin{bmatrix} B_2 & 0 \\ X_2^{-1} X_3^\top B_2 & I_p \end{bmatrix},$$

$$\widetilde{C}_2 = \widehat{C}_2 \widehat{V} = \begin{bmatrix} C_2 & 0 \\ -X_2^{-1} X_1 & X_2^{-1} \end{bmatrix}, \quad \widetilde{B}_1 = \widehat{U} \widehat{B}_1 = \begin{bmatrix} B_1 \\ X_2^{-1} X_3^\top B_1 \end{bmatrix},$$

$$\widetilde{L}_* = \left[\widetilde{B}_2^\top \widetilde{X}, 0, \widehat{D}_{12}^\top\right] = \widetilde{L} \Delta_L^{-1}, \quad \widetilde{R}_* = \left[\widetilde{C}_2, \widehat{D}_{21}, 0\right] = \widetilde{R} \Delta_R^{-1},$$

$$\widetilde{L} = \begin{bmatrix} L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_p \end{bmatrix}, \quad \widetilde{R} = \begin{bmatrix} R & 0 & 0 \\ 0 & I_p & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Delta_L = \begin{bmatrix} G^{-1} & 0 & 0 & -G^{-1} X_3 X_2^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & I_p \\ 0 & 0 & I_s & 0 \\ 0 & I_k & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta_R = \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 & 0 \\ X_1 & 0 & X_2 & 0 \\ 0 & I_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_k \end{bmatrix},$$

$$\widetilde{\Omega} = \begin{bmatrix} A^\top G + G^\top A & A^\top X_3 X_2^{-1} & G^\top B_1 & C_1^\top \\ X_2^{-1} X_3^\top A & 0 & X_2^{-1} X_3^\top B_1 & 0 \\ B_1^\top G & B_1^\top X_3 X_2^{-1} & -\gamma^2 P & D_{11}^\top \\ C_1 & 0 & D_{11} & -Q^{-1} \end{bmatrix}.$$

Критерієм існування розв'язку $\widehat{K}_*$ наведеної нерівності є співвідношення [10, 11]

$$W_{\widetilde{R}_*}^\top \widetilde{\Omega} W_{\widetilde{R}_*} < 0, \quad W_{\widetilde{L}_*}^\top \widetilde{\Omega} W_{\widetilde{L}_*} < 0, \tag{33}$$

де

$$W_{\widetilde{L}_*} = \Delta_L \begin{bmatrix} W_L & 0 \\ 0 & I_s \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad W_{\widetilde{R}_*} = \Delta_R \begin{bmatrix} W_R & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I_k \end{bmatrix}.$$

Позначимо $\widetilde{G} = G^{-1} X_3 X_2^{-1}$ і знайдемо вирази

$$\Delta_L^\top \widetilde{\Omega} \Delta_L = \begin{bmatrix} AG^{-1} + G^{-1\top} A^\top & G^{-1\top} C_1^\top & B_1 & -A\widetilde{G} \\ C_1 G^{-1} & -Q^{-1} & D_{11} & -C_1 \widetilde{G} \\ B_1^\top & D_{11}^\top & -\gamma^2 P & 0 \\ -\widetilde{G}^\top A^\top & -\widetilde{G}^\top C_1^\top & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Delta_R^\top \widetilde{\Omega} \Delta_R = \begin{bmatrix} A^\top X + X^\top A & X^\top B_1 & A^\top X_3 & C_1^\top \\ B_1^\top X & -\gamma^2 P & B_1^\top X_3 & D_{11}^\top \\ X_3^\top A & X_3^\top B_1 & 0 & 0 \\ C_1 & D_{11} & 0 & -Q^{-1} \end{bmatrix}.$$

Тоді співвідношення (33) стають такими:

$$\begin{bmatrix} W_R^\top & 0 \\ 0 & I_k \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cc|c} A^\top X + X^\top A & X^\top B_1 & C_1^\top \\ B_1^\top X & -\gamma^2 P & D_{11}^\top \\ \hline C_1 & D_{11} & -Q^{-1} \end{array}\right] \begin{bmatrix} W_R & 0 \\ 0 & I_k \end{bmatrix} < 0,$$

$$\begin{bmatrix} W_L^\top & 0 \\ 0 & I_s \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cc|c} AG^{-1} + G^{-1\top} A^\top & G^{-1\top} C_1^\top & B_1 \\ C_1 G^{-1} & -Q^{-1} & D_{11} \\ \hline B_1^\top & D_{11}^\top & -\gamma^2 P \end{array}\right] \begin{bmatrix} W_L & 0 \\ 0 & I_s \end{bmatrix} < 0,$$

або, враховуючи лему Шура, відповідно (28) і (29), де $Y = \gamma^2 G^{-1}$.

Згідно зі (32) $E^\top G = G^\top E \geq 0$, тобто $EY = Y^\top E^\top \geq 0$, причому

$$X - \gamma^2 Y^{-1} = \Theta E, \quad \operatorname{rank} \Theta \leq p,$$

де $\Theta = X_3 X_2^{-1} X_3^\top \geq 0$. Останні співвідношення зводяться до рангових умов у (27).

Отже, якщо матриці X, Y, S і Θ знайдено зі співвідношень (6), (10), (11), (27), (28) і (29), то при побудові доповнювальних блоків матриці $\widehat{X}$, що задовольняє умови (31) і (32), можна використати спектральний розклад матриці Θ або її представлення $\Theta = \Theta_0^\top \Theta_0$, де $\Theta_0 \in \mathbb{R}^{q \times n}$, при цьому $X_2 = I_q$ і $X_3 = \Theta_0$. Зрештою на основі леми 2.3 можна стверджувати, що існує регулятор (23) порядку $p \geq q$, при якому критерій якості (5) замкненої системи (25) $J < \gamma$ і в'язка матриць $\widehat{F}_*(\lambda) = \widehat{A}_* - \lambda \widehat{E}$ допустима. Зворотне твердження виконується за додатковою умовою (30).

Теорему доведено. □

На основі теореми 4.1 наведемо алгоритм синтезу динамічного регулятора (23) для системи (22).

Алгоритм 4.1.
1) *Обчислення матриць* W_L *і* W_R, *де* $L = \left[B_2^\top, D_{12}^\top\right]$, $R = \left[C_2, D_{21}\right]$.
2) *Знаходження матриць* X, Y, $S = S^\top \geq 0$ *і* $\Theta = \Theta^\top \geq 0$, *що задовольняють систему співвідношень* (6), (10), (11), (27), (28) *і* (29).
3) *Знаходження спектрального розкладу невід'ємно визначеної матриці* $\Theta = T^\top \Lambda T$, *де* $\Lambda = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_q\}$, $T = \left[t_1, \ldots, t_q\right]$, λ_i *і* t_i — *ненульові власні значення і відповідні власні вектори матриці* Θ.
4) *Формування доповнювальних блоків матриці* $\widehat{X}$ *у формі* $X_1 = T^\top E$, $X_2 = \Lambda^{-1}$ *і* $X_3 = T$ *при* $p = q$.
5) *Розв'язування ЛМН*

$$\widehat{L}_*^\top \widehat{K}_* \widehat{R}_* + \widehat{R}_*^\top \widehat{K}_*^\top \widehat{L}_* + \widehat{\Omega} < 0, \tag{34}$$

стосовно $\widehat{K}_*$ *за умови* $\det(I_m - K D_{22}) \neq 0$, *де*

$$\widehat{R}_* = \left[\,\widehat{C}_2, \widehat{D}_{21}, 0_{(l+p)\times k}\,\right], \quad \widehat{L}_* = \left[\,\widehat{B}_2^\top \widehat{X}, 0_{(m+p)\times s}, \widehat{D}_{12}^\top,\,\right],$$

$$\widehat{\Omega} = \begin{bmatrix} \widehat{A}^\top \widehat{X} + \widehat{X}^\top \widehat{A} & \widehat{X}^\top \widehat{B}_1 & \widehat{C}_1^\top \\ \widehat{B}_1^\top \widehat{X} & -\gamma^2 P & \widehat{D}_{11}^\top \\ \widehat{C}_1 & \widehat{D}_{11} & -Q^{-1} \end{bmatrix},$$

6) *Обчислення матриць регулятора* (23) *за формулою*

$$\widehat{K} = \begin{bmatrix} K & U \\ V & Z \end{bmatrix} = (I_{n+p} + \widehat{K}_* \widehat{D}_{22})^{-1} \widehat{K}_*.$$

Реалізація цього алгоритму забезпечує оцінку критерію якості $J < \gamma$, а також регулярність, неімпульсивність і асимптотичну стійкість замкненої системи (25). Ранг матриці Θ, знайденої у п. 2 алгоритму, визначає порядок динамічного регулятора p. Якщо $\Theta = 0$, то є можливість побудувати статичний регулятор із потрібними властивостями. У разі $X_0 > 0$ замість рангової умови (11) доцільно використати ЛМН $S < \gamma^2 X_0$. Для досягнення оцінки $J_0 < \gamma$ можна використати спрощений варіант алгоритму 4.1, у якому не використовуються співвідношення з ваговою матрицею X_0.

Зазначимо, що алгоритм 4.1 при мінімально можливих значеннях параметра γ може бути застосований при побудові наближених J-оптимальних законів керування для класу систем типу (22).

Розглянемо дескрипторну систему керування (22) за умов невизначеності матричних коефіцієнтів

$$\begin{aligned} A &\in \mathrm{Co}\{A_1, \ldots, A_{\nu_1}\}, \quad B_1 \in \mathrm{Co}\{B_1^1, \ldots, B_1^{\nu_2}\}, \\ C_1 &\in \mathrm{Co}\{C_1^1, \ldots, C_1^{\nu_3}\}, \quad D_{11} \in \mathrm{Co}\{D_{11}^1, \ldots, D_{11}^{\nu_4}\} \end{aligned} \tag{35}$$

і критерій якості (5) із ваговою матрицею (9). Із теореми 4.1 випливає таке твердження.

Наслідок 4.1. *Якщо для деяких матриць X, Y, $S = S^\top \geq 0$ і $\Theta = \Theta^\top \geq 0$ виконуються співвідношення* (6), (10), (11), (27) *і*

$$W_R^\top \begin{bmatrix} A_{i_1}^\top X + X^\top A_{i_1} + C_1^{i_3\top} Q C_1^{i_3} & X^\top B_1^{i_2} + C_1^{i_3\top} Q D_{11}^{i_4} \\ B_1^{i_2\top} X + D_{11}^{i_4\top} Q C_1^{i_3} & D_{11}^{i_4\top} Q D_{11}^{i_4} - \gamma^2 P \end{bmatrix} W_R < 0, \tag{36}$$

$$W_L^\top \begin{bmatrix} A_{i_1} Y + Y^\top A_{i_1}^\top + B_1^{i_2} P^{-1} B_1^{i_2\top} & Y^\top C_1^{i_3\top} + B_1^{i_2} P^{-1} D_{11}^{i_4\top} \\ C_1^{i_3} Y + D_{11}^{i_4} P^{-1} B_1^{i_2\top} & D_{11}^{i_4} P^{-1} D_{11}^{i_4\top} - \gamma^2 Q^{-1} \end{bmatrix} W_L < 0, \tag{37}$$

$$i_1 = \overline{1, \nu_1}, \quad i_2 = \overline{1, \nu_2}, \quad i_3 = \overline{1, \nu_3}, \quad i_4 = \overline{1, \nu_4},$$

то існує динамічний регулятор (23) *порядку p, при якому довільна замкнена система* (25) *за умов невизначеності* (35) *є допустимою і виконується оцінка $J < \gamma$. Такий регулятор можна побудувати за допомогою модифікованого алгоритму* 4.1, *у п. 2 якого замість* (28) *і* (29) *використовується система ЛМН* (36) *і* (37), *а у п. 5 — система ЛМН типу* (34) *при всіх можливих наборах вершин політопів* (35).

5 Існування і побудова статичних регуляторів за спостережуваним виходом

Розглянемо систему (22) зі критеріями якості J_0 і J типу (5) і керування у формі лінійного зворотного зв'язку за спостережуваним виходом

$$u = Ky, \quad \det(I - KD_{22}) \neq 0. \tag{38}$$

При цьому замкнена система

$$E\dot{x} = A_* x + B_* w, \quad z = C_* x + D_* w, \quad x(0) = x_0, \tag{39}$$

де

$$A_* = A + B_2 K_* C_2, \quad B_* = B_1 + B_2 K_* D_{21}, \quad C_* = C_1 + D_{12} K_* C_2,$$

$$D_* = D_{11} + D_{12} K_* D_{21}, \quad K_* = (I_m - K D_{22})^{-1} K.$$

Умови теореми 4.1 у випадку $\Theta = 0$ забезпечують існування статичного регулятора (38), при якому замкнена система (39) допустима і виконується оцінка $J < \gamma$ (див. [21, теорема 3.1]). Наведемо умови існування і метод побудови сім'ї таких регуляторів при додаткових обмеженнях на коефіцієнти системи. Для цього сформулюємо допоміжні твердження.

Розглянемо на множині матриць $\mathcal{K}_D = \{K : \det(I_m - KD) \neq 0\}$ нелінійний оператор $\mathbf{D}(K) = (I_m - KD)^{-1} K$ і матричну нерівність

$$\mathbf{F}(K) = W + U^\top \mathbf{D}(K) V + V^\top \mathbf{D}^\top(K) U + V^\top \mathbf{D}^\top(K)\, R\, \mathbf{D}(K) V < 0, \quad (40)$$

де $D \in \mathbb{R}^{l\times m}$, $U \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $V \in \mathbb{R}^{l\times n}$, $W \in \mathbb{R}^{n\times n}$ і $R \in \mathbb{R}^{m\times m}$ — задані матриці, причому $W = W^\top$ і $R = R^\top \geq 0$.

Лема 5.1. 1. *Якщо $R = 0$, $\operatorname{rank} U < n$ і $\operatorname{rank} V < n$, то матрична нерівність* (40) *має розв'язок $K \in \mathbb{R}^{m\times l}$ тоді і лише тоді, коли*

$$W_U^\top W W_U < 0, \quad W_V^\top W W_V < 0.$$

2. *Якщо $R = R^\top > 0$ і $\operatorname{rank} V < n$, то матрична нерівність* (40) *має розв'язок $K \in \mathbb{R}^{m\times l}$ тоді і лише тоді, коли*

$$W < U^\top R^{-1} U, \quad W_V^\top W W_V < 0.$$

3. *Якщо $R = R^\top \geq 0$, $1 \leq \operatorname{rank} R < m$ і $\operatorname{rank} U_0 < n$, де $U_0 = W_R^\top U$, то матрична нерівність* (40) *має розв'язок $K \in \mathbb{R}^{m\times l}$ тоді і лише тоді, коли*

$$W_{U_0}^\top \big(W - U^\top R^+ U\big) W_{U_0} < 0, \quad W_V^\top W W_V < 0.$$

Лема 5.2. (Узагальнена лема про матричну невизначеність [5]). *Нехай для деяких матриць $P_0 = P_0^\top > 0$ і $Q_0 = Q_0^\top > 0$ виконується матрична нерівність*

$$\Omega = \begin{bmatrix} W + V^\top Q_0 V & U^\top + V^\top Q_0 D \\ U + D^\top Q_0 V & R + D^\top Q_0 D - P_0 \end{bmatrix} < 0. \quad (41)$$

Тоді $\mathbf{F}(K) < 0$ і $K \in \mathcal{K}_D$ для кожної матриці K з еліпсоїда

$$\mathcal{K} = \{K : K^\top P_0 K \leq Q_0\}.$$

Теорема 5.1. *Нехай існують матриці* X, $S = S^\top \geq 0$, $P_0 = P_0^\top > 0$ *і* $Q_0 = Q_0^\top > 0$, *що задовольняють систему ЛМН* (6) *і*

$$\Omega(X, P_0, Q_0) = \begin{bmatrix} \Omega_1 & \Omega_2 & \Omega_3 \\ \Omega_2^\top & \Omega_4 & \Omega_5 \\ \Omega_3^\top & \Omega_5^\top & \Omega_6 \end{bmatrix} < 0, \tag{42}$$

де

$$\Omega_1 = A^\top X + X^\top A + C_2^\top Q_0 C_2, \quad \Omega_2 = X^\top B_1 + C_1^\top Q D_{11} + C_2^\top Q_0 D_{21},$$

$$\Omega_3 = X^\top B_2 + C_1^\top Q D_{12} + C_2^\top Q_0 D_{22}, \quad \Omega_4 = D_{11}^\top Q D_{11} + D_{21}^\top Q_0 D_{21} - \gamma^2 P,$$

$$\Omega_5 = D_{11}^\top Q D_{12} + D_{21}^\top Q_0 D_{22}, \quad \Omega_6 = D_{12}^\top Q D_{12} + D_{22}^\top Q_0 D_{22} - P_0.$$

Тоді для довільного керування (38) *при* $K \in \mathcal{K}$ *замкнена система* (39) *допустима і має критерій якості* $J_0 < \gamma$. *При цьому* $J < \gamma$, *якщо разом із* (6) *і* (42) *виконуються умови* (9) – (11) *або строгі нерівності*

$$X_0 = X_0^\top > 0, \quad S < \gamma^2 X_0. \tag{43}$$

Доведення теореми 5.1 безпосередньо випливає з лем 2.2, 2.3 і зображення виразу (7) у лемі 2.1 для системи (39) у формі (40), де $\mathbf{D}(K) = K_*$ і

$$W(X) = \begin{bmatrix} A^\top X + X^\top A + C_1^\top Q C_1 & X^\top B_1 + C_1^\top Q D_{11} \\ B_1^\top X + D_{11}^\top Q C_1 & D_{11}^\top Q D_{11} - \gamma^2 P \end{bmatrix},$$

$$U(X) = \left[B_2^\top X + D_{12}^\top Q C_1,\, D_{12}^\top Q D_{11}\right],\ V = \left[C_2,\, D_{21}\right],\ R = D_{12}^\top Q D_{12}. \tag{44}$$

При цьому умова (41) набуває вигляду (42).

При застосуванні теореми 5.1 необхідно, щоб у відсутності керування ($u = 0$) виконувалась оцінка $J_0 < \gamma$, а в'язка матриць $F(\lambda) = A - \lambda E$ була допустимою. Якщо це не так, то виникає задача знаходження умов існування керування (38), що забезпечує вказані властивості замкненої системи. Для її розв'язання можна скористатися лемою 5.1 для виразу (40) із матрицями (44) у випадках $D_{12} = 0$ і $\operatorname{rank} D_{12} = m$. Зокрема, виконується таке твердження.

Теорема 5.2. *Нехай виконуються умови*

$$R_0 = D_{12}^\top Q D_{12} > 0, \quad R_1 = \gamma^2 P - D_{11}^\top Q_1 D_{11} > 0 \tag{45}$$

і сумісна щодо X і S система співвідношень (6), (9) – (11), (28) *і*

$$A_2^\top X + X^\top A_2 + X^\top R_2 X + Q_2 < 0, \tag{46}$$

де

$$A_2 = A_1 + B_{11} R_1^{-1} D_{11}^\top Q_1 C_1, \quad A_1 = A - B_2 R_0^{-1} D_{12}^\top Q C_1,$$

$$R_2 = B_{11} R_1^{-1} B_{11}^\top - B_2 R_0^{-1} B_2^\top, \quad B_{11} = B_1 - B_2 R_0^{-1} D_{12}^\top Q D_{11},$$

$$Q_1 = Q - Q D_{12} R_0^{-1} D_{12}^\top Q, \quad Q_2 = C_1^\top (Q_1 + Q_1 D_{11} R_1^{-1} D_{11}^\top Q_1) C_1.$$

Тоді існує керування (38)*, при якому замкнена система* (39) *допустима і має критерій якості $J < \gamma$.*

Зауваження 5.1. За умов теореми 5.2 матрицю шуканого регулятора (38) можна побудувати у формі $K_0 = K_*(I_l + D_{22} K_*)^{-1}$, де K_* — розв'язок квадратичної матричної нерівності

$$W + U^\top K_* V + V^\top K_*^\top U + V^\top K_*^\top R K_* V < 0$$

із матричними коефіцієнтами (44). Далі, застосовуючи теорему 5.1 для замкненої системи з регулятором $u = K_0 y$, можемо побудувати еліпсоїдальну множину таких матриць

$$\mathcal{K}_0 = \left\{ K : (K - K_0)^\top P_0 (K - K_0) \le Q_0 \right\},$$

тобто визначити гарантовані межі робастності бажаного статичного регулятора. При цьому $K = K_0 + \widetilde{K}$, де $\widetilde{K} \in \mathcal{K}$.

Можна отримати аналоги теорем 5.1 і 5.2 із застосуванням динамічних регуляторів (23) на основі подання замкненої системи (22), (23) у розширеному фазовому просторі у формі (24).

6 Приклад

Розглянемо систему керування (22) з такими матрицями [25]:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; D_{12} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \; D_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \; D_{22} = 0,$$

У даному прикладі $n = 4$, $m = 1$, $k = 2$, $s = 2$, $l = 1$.

Нехай критерії якості J_0 і J в (5) визначені з ваговими матрицями

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \; Q = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \; X_0 = 5E^\top E = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Для системи без керування маємо такі значення $J_0 = 2,78270$ і $J = 2,78533$, що враховані згідно зі (13).

Алгоритм 4.1 реалізовано за допомогою комп'ютерної системи PTC Mathcad Prime. Спочатку наближено знайдено найменше значення параметра $\gamma = 1,5$, при якому сумісна система співвідношень (6), (10), (11), (27), (28) і (29), відповідні матриці

$$X = \begin{bmatrix} 4,55602 & 0 & -1,90889 & 0 \\ -1,90889 & 0 & 4,91959 & 0 \\ 5,01484 & 1,87960 & 3,22631 & -0,14856 \\ -3,72768 & -1,58627 & -0,76704 & -1,25203 \end{bmatrix},$$

$$Y = \begin{bmatrix} 4,02596 & -2,47210 & 0 & 0 \\ -2,65983 & -0,89927 & 1,08810 & -0,12911 \\ -2,47210 & 2,66911 & 0 & 0 \\ 0,67589 & 0,74616 & -1,37858 & -1,63351 \end{bmatrix},$$

$$S = \begin{bmatrix} 4,55602 & 0 & -1,90889 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1,90889 & 0 & 4,91959 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \geq 0,$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} 3,26019 & -3,10907 & 1,11697 & -1,52252 \\ -3,10907 & 2,96502 & -1,05864 & 1,45978 \\ 1,11697 & -1,05864 & 2,55609 & 0,11989 \\ -1,52252 & 1,45978 & 0,11989 & 1,58268 \end{bmatrix} \geq 0,$$

а також доповнювальні блоки матриці $\widehat{X}$:

$$X_1 = \begin{bmatrix} -0,65544 & 0 & 0,62515 & 0 \\ 0,08457 & 0 & -0,08450 & 0 \\ -0,29835 & 0 & 0,27625 & 0 \end{bmatrix}, X_2 = \begin{bmatrix} 0,13436 & 0 & 0 \\ 0 & 0,41521 & 0 \\ 0 & 0 & 1,94918 \end{bmatrix},$$

$$X_3 = \begin{bmatrix} -0,65544 & 0,08457 & -0,29835 \\ 0,62515 & -0,08450 & 0,27625 \\ -0,27740 & -0,89251 & 0,35564 \\ 0,32036 & -0,43490 & -0,84154 \end{bmatrix}.$$

Розв'язуючи ЛМН (34), знайдено матричні коефіцієнти шуканого динамічного регулятора (23) порядку $p = \operatorname{rank}\Theta = 3$:

$$Z = \begin{bmatrix} -2,08370 & -0,39169 & 1,02327 \\ -0,48944 & -7,90153 & -0,48605 \\ 0,06443 & -0,56449 & -7,14171 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} -13,07781 \\ -0,53548 \\ -0,69422 \end{bmatrix},$$

$$U = [\ -0,15375 \quad 0,02058 \quad -0,12741\ ], \quad K = -1,26024.$$

При цьому спектр замкненої системи

$$\sigma(\widehat{F}_*) = \big\{ -1,20482,\ -6,94203,\ -8,15689,\ -0,91160 \pm 1,12177i \big\},$$

відповідна в'язка матриць $\widehat{F}_*(\lambda) = \widehat{A}_* - \lambda\widehat{E}$ є регулярною, стійкою і неімпульсивною, а значення зваженого критерію якості $J = 1,45912$ замкненої системи (25) не перевищує γ.

Далі, застосовуючи лему 3.1 для замкненої системи (25), знайдено відповідні матриці $\widehat{X}$, $\widehat{S} = \widehat{S}^\top \geq 0$, найгірші вектор зовнішніх збурень $w = \widehat{K}_0\widehat{x}$ і початковий вектор $\widehat{x}_0$, де

$$\widehat{K}_0 = \begin{bmatrix} 2,17513 & 0,15889 \\ 0 & -0,12092 \\ -0,95335 & -0,10577 \\ 0 & -0,48533 \\ -0,32401 & -0,00201 \\ 0,03731 & -0,00977 \\ -0,13544 & 0,19112 \end{bmatrix}^\top, \quad \widehat{x}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ \xi_0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0,52717 \\ 0 \\ 0,84976 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right],$$

причому $(\widehat{S} - \gamma^2\widehat{X}_0)\widehat{x}_0 = 0$, $\|\widehat{x}_0\| = 1$, $0 \leq \widehat{S} \leq \gamma^2\widehat{X}_0$, $\gamma = J \approx 1,45912$, $\widehat{X}_0 = \operatorname{diag}\{X_0, I_p\}$.

На рис. 1 і 2 зображена поведінка компонент розв'язку $\widehat{x}$ об'єднаної дескрипторної системи "об'єкт + регулятор"

$$\widehat{E}\dot{\widehat{x}} = \widehat{A}_0\widehat{x}, \quad \widehat{A}_0 = \widehat{A}_* + \widehat{B}_*\widehat{K}_0, \quad \widehat{x}(0) = \widehat{x}_0$$

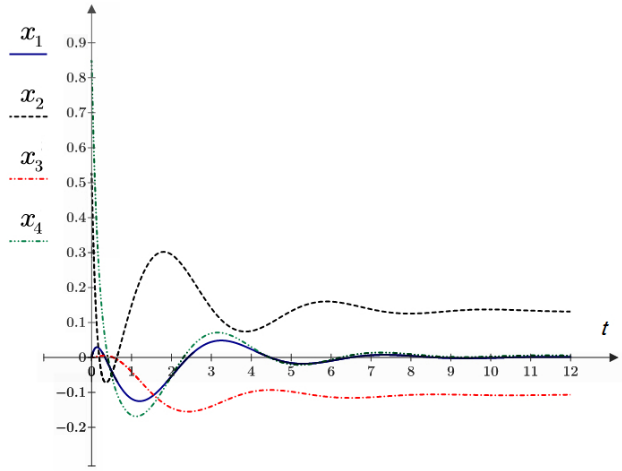

Рис 1. Поведінка замкненої керованої системи при найгіршому збуренні.

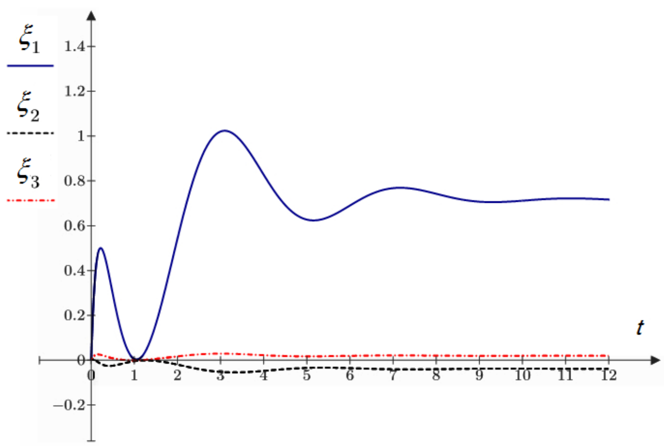

Рис 2. Поведінка динамічного регулятора при найгіршому збуренні.

при наведених значеннях початкового вектора і зовнішніх збурень (див. також рис. 3). Даний розв'язок побудований у термінах пари матриць T і Δ, що задовольняють матричне рівняння $\widehat{A}_0 T = \widehat{E} T \Delta$,

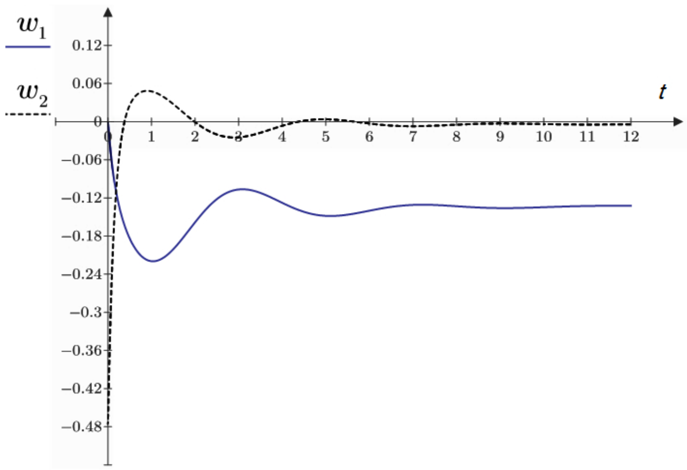

Рис 3. Найгірше збурення.

а саме:

$$\widehat{x} = Tz, \quad \dot{z} = \Delta z, \quad z(0) = z_0.$$

При цьому $\widehat{x}_0 = Tz_0$, матриця T має повний ранг за стовпцями, а власні числа матриці Δ утворюють скінченний спектр

$$\sigma(\widehat{F}_0) = \{ -0,00393, \ -6,7716, \ -8,50199, \ -0,46769 \pm 1,53525i \}$$

в'язки матриць $\widehat{F}_0(\lambda) = \widehat{A}_0 - \lambda \widehat{E}$.

Для цієї системи виконуються умови (45), що дає змогу будувати статичні регулятори з бажаними властивостями на основі теореми 5.2. При $\gamma = 2,5$ знайдено матрицю

$$X = \begin{bmatrix} 4,28441 & 0 & 1,16184 & 0 \\ 1,16184 & 0 & 4,70812 & 0 \\ 4,28300 & 0,42666 & 1,77609 & 0,37196 \\ -3,72698 & -0,58943 & -0,58261 & -1,14690 \end{bmatrix},$$

що задовольняє систему співвідношень (6), (9) – (11), (28) і (46). Знайдено також коефіцієнт підсилення $K_0 = -0,40868$ статичного регулятора (38) (див. зауваження 5.1), при якому замкнена система має критерії якості $J_0 = 2.40672$ і $J = 2.40970 < \gamma$. При цьому відповідна в'язка матриць $F_*(\lambda) = A_* - \lambda E$ допустима і має скінченний спектр $\sigma(\widehat{F}_*) = \{ -0,5 \pm 1,07642i \}$.

[1] *Dullerud G. E., Paganini F. G.* A Course in Robust Control Theory. A Convex Approach. — Berlin: Springer-Verlag, 2000. — 419 p.

[2] *Поляк Б. Т., Щербаков П. С.* Робастная устойчивость и управление. — М.: Наука, 2002. — 303 с.

[3] *Баландин Д. В., Коган М. М.* Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. — М.: Физматлит, 2007. — 280 с.

[4] *Баландин Д. В., Коган М. М.* Обобщенное H_∞-оптимальное управление как компромисс между H_∞-оптимальным и γ-оптимальным управлениями // Автоматика и телемеханика. — 2010. — №6. — С. 20–38.

[5] *Мазко А. Г.* Робастная устойчивость и стабилизация динамических систем. Методы матричных и конусных неравенств // Праці Інституту математики НАН України, 2016. — **102**. — 332 с.

[6] *Мазко О. Г., Кусій С. М.* Робастна стабілізація та гасіння зовнішніх збурень у системах з керованими і спостережуваними виходами // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2016. — **13**, 3. — С. 129–145.

[7] *Мазко А.Г., Кусий С.Н.* Стабилизация по выходу и взвешенное подавление возмущений в дискретных системах управления // Проблемы управления и информатики. — 2017. — № 6. — С. 78–93.

[8] *Мазко О.Г., Кусій С.М.* Зважене гасіння обмежених збурень у системі керування літака в режимі посадки // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2018. — **15**, 1. — С. 88–99.

[9] *Boyd S., Ghaoui L. El, Feron E., Balakrishman V.* Linear matrix inequalities in system and control theory. SIAM Studies in Applied Mathematics, 15. — Philadelphia: PA, 1994. — 193 p.

[10] *Gahinet P., Apkarian P.* A Linear Matrix Inequality Approach to H_∞ Control // Intern. J. of Robust and Nonlinear Control. — 1994. — **4**. — P. 421 – 448.

[11] *Iwasaki T., Skelton R.E.* All Controllers for the General H_∞ Control Problem: LMI Existence Conditions and State Space Formulas // Automatica. — 1994. — **30**, 8. — P. 1307 – 1317.

[12] *Xu S., Lam J., Zou Y.* New Versions of Bounded Real Lemmas for Continuous and Discrete Uncertain Systems // Circuits, Systems and Signal Process. — 2007. — **26**. — P. 829–838.

[13] *Chadli M., Shi P., Feng Z., Lam J.* New bounded real lemma formulation and H_∞ control for continuous-time descriptor systems // Asian Journal of Control. — 2018. — **20**, 1. — P. 1–7.

[14] *Gao F., Liu W. Q., Sreeram V., Teo K. L.* Bounded real lemma for descriptor systems and its application. *IFAC 14th Triennial World Congress*, Beijing, P. R., China, 1999. — P. 1631–1636.

[15] *Masubushi I., Kamitane Y., Ohara A., Suda N.* H_∞ Control for Descriptor Systems: A Matrix Inequalities Approach // Automatica. — 1997. — **33**, 4. — P. 669 – 673.

[16] *Мазко О.Г.* Оцінка зваженого рівня гасіння обмежених збурень у дескрипторних системах // Укр. мат. журн. — 2018. — № 11. — С. 1541 – 1552.

[17] *Dai L.* Singular Control Systems. Lecture Notes in Control and Information Sciences. — New York: Springer-Verlag, 1989. — 340 p.

[18] *Riaza R.* Differential-Algebraic Systems. Analytical Aspects and Circuit Applications. — Singapore: World Scientific, 2008. — 330 p.

[19] *Бояринцев Ю. Е.* Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. — Новосибирск: Наука, 1980. — 222 с.

[20] *Самойленко А. М., Шкіль М. І., Яковець В. П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. — Київ: Вища школа, 2000. — 294 с.

[21] *Мазко О.Г., Котов Т.О.* Стабілізація і гасіння обмежених збурень у дескрипторних системах керування // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2018. — **15**, 1. — С. 65–87.

[22] *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1988. — 552 с.

[23] *Bender D. J., Laub A. J.* The Linear-Quadratic Optimal Regulator for Descriptor Systems // IEEE Trans. Autom. Control. — 1987. —AC-**32**, 8. — P. 672 – 688.

[24] *Najmurrokhman A.* On solvability of output feedback nonlinear H_∞-control problem using nonlinear matrix inequalities approach // Journal of Electrical Engineering and Information Technology. — 2003. — **1**, 1. — P. 33 – 39.

[25] *Losse P.* The H_∞ Optimal Control Problem for Descriptor Systems // Dissertation Dr. Rer. Nat. Technische Universität Chemnitz (Germany). — 2011, 104 p.