Збірник праць Інституту математики НАН України 2019, т. 16, № 2, 50–62

УДК 511.72+517.5

Двоосновна система числення з різнознаковими основами і пов'язані з нею функції

І. М. Лисенко[1] ***Ю. П. Маслова***[2] ***М. В. Працьовитий***[3]

[1] *НПУ імені М. П. Драгоманова, Київ; irуna.pratsiovyta@gmail.com,*
[2] *НПУ імені М. П. Драгоманова, Київ; julia0609mas@gmail.com,*
[3] *НПУ імені М. П. Драгоманова, Інститут математики НАН України, Київ; prats4444@gmail.com,*

We consider an analytic system of encoding of numbers (G_2-representative) from an interval $[0; g_0]$ by means of the two-symbol alphabet $A \equiv \{0; 1\}$ with two bases having different signs: $g_0 \in (0; 1)$ and $g_1 = g_0 - 1$. The system is based on expansion of the numerical series. Functions with non-homogeneous local properties of structural and differential kind are studied. Inversor of digits of the G_2-representation of the numbers and shift operator for the G_2-representation are among them. Properties of these functions are found out being rather surprising: the inversor is not a monotonic function and the shift operator is a continuous function. This implies the fundamental difference between the present and previously studied representations. We compare properties of the G_2- and two-base Q_2-representations (both are positive) using the projector of digits of between them.

Розглядається аналітична система кодування (G_2-зображення) чисел відрізка числової прямої $[0; g_0]$ засобами двосимвольного алфавіту $A \equiv \{0; 1\}$ із двома різнознаковими основами: $g_0 \in (0; 1)$ і $g_1 = g_0 - 1$, яка ґрунтується на розкладі числа в ряд. Вивчаються функції з неоднорідними локальними властивостями структурного й диференціального характеру, серед яких інверсор цифр G_2-зображення чисел та оператор лівостороннього зсуву цифр G_2–зображення. Несподіваними виявилися властивості цих функцій: інверсор не є функцією монотонною, а оператор зсуву цифр є функцією неперервною. Це принципово відрізняє це зображення від інших, раніше вивчених. Здійснено порівняльний аналіз властивостей G_2–зображення зі двоосновним Q_2–зображенням (обидві основи додатні) через проектор цифр одного зображення в інше.

1 Вступ

У математиці і її застосуваннях використовуються різні двосимвольні зображення дійсних чисел певного відрізка (класичне двійкове, нега–двійкове [5], Q_2–зображення [6,7], Q_2^*–зображення [4,8], медіантне [2] й марковське зображення [3], зображення чисел ланцюговими дробами Данжуа [13], A_2–дробами [1] тощо [12]). Деякі з них є поліосновними (використовують дві або нескінченну кількість основ). Серед них важливою для застосувань у фрактальній геометрії, теорії функцій, теорій ймовірностей виявилась система зі двома додатними основами: $q_0 \in (0;1)$ і $q_1 \equiv 1 - q_0$, яка використовує алфавіт $A_2 \equiv \{0;1\}$. Вона є самоподібним узагальненням класичної двійкової системи і збігається з нею при $q_0 = 0,5$. Моделлю дійсного числа у цій системі є додатний ряд. Якщо $L_2 = A_2 \times A_2 \times ... \times A_2 \times ...$ – простір послідовностей елементів алфавіту (простір послідовностей нулів і одиниць), то для будь–якого $x \in [0;1]$ існує така послідовність $(\alpha_n) \in L_2$, що

$$x = \alpha_1 q_{1-\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty}(\alpha_k q_{1-\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j}) \equiv \Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}.$$

Символічний запис $\Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$ називається Q_2–зображенням числа x. Теорія цього зображення добре вивчена, хоч і продовжує збагачуватися [10].

У роботі [11] введена нова двосимвольна система зображення чисел відрізка $[0;g_0] \subset [0;1]$, яка має дві основи: одну додатну, а другу — від'ємну. Кодування чисел у цій системі називається G_2–зображенням. Частково його геометрія уже вивчена у вказаній статті [11]. У цій роботі ми продовжуємо розпочате дослідження, розглядаючи спеціальні функції, які викривають специфіку цієї системи й інтерес до неї.

2 Двоосновна система кодування дійсних чисел із різнознаковими основами

Нехай $A_2 = \{0;1\}$ – алфавіт; $L_2 = A_2 \times A_2 \times ... \times A_2 \times ...$ – простір послідовностей елементів алфавіту; $\overline{g} = (g_0; g_1)$ — фіксований набір чисел, причому $0 < g_0 < 1$, $g_1 \equiv g_0 - 1$, $g_0 > -g_1$; $\delta_0 \equiv 0$, $\delta_1 \equiv g_0$. Зауважимо, що $\delta_j = j g_{1-j}$, $j = 0, 1$, і з означення g_1 маємо $|g_1| < 1$.

Теорема 2.1. *Для будь-якої послідовності* $(\alpha_n) \in L_2$*, яка містить нескінченну кількість одиниць, ряд*

$$\delta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} (\delta_{\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j}) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \tag{1}$$

є абсолютно збіжним знакопочережним і його сума не перевищує першого відмінного від нуля доданка $v_1 = g_0^m$*, де* $\alpha_m = 1$*, але* $\alpha_j = 0$ *при* $j < m$*.*

Доведення. Якщо послідовність (α_n) містить нескінченну кількість одиниць, то ряд (1) містить нескінченну кількість як додатних, так і від'ємних членів. Після вилучення нульових членів ряду (1), а їхня кількість залежить від кількості нулів у послідовності (α_n), отримується знакозмінний (почережний) ряд:

$$v_1 - v_2 + v_3 - v_4 + \cdots ,$$

причому члени з непарними номерами додатні, а з парними – від'ємні.

За теоремою Лейбніца він є збіжним, оскільки $v_{k+1} < v_k$ і $v_k \to 0$ $(k \to \infty)$, і його сума не перевищує $v_1 = g_0^m$. □

Наслідок 2.1. *Сума ряду (1) належить відрізкові* $[0; g_0]$*.*

Теорема 2.2. *[11] Для будь-якого числа* $x \in [0; g_0]$ *існує послідовність* $(\alpha_n) \in L_2$*, така, що*

$$x = \delta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} (\delta_{\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j}) \equiv \Delta^{G_2}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k \ldots}. \tag{2}$$

Означення 2.1. Зображення $\Delta^{G_2}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots}$ числа $x \in [0; g_0]$, встановлене рівністю (2), називається *G_2–зображенням.* При цьому α_n називається n–ною цифрою цього зображення.

3 G_2–бінарні числа і раціональні G_2–зображення

Означення 3.1. Числа відрізка $[0, g_0]$, що мають два G_2–зображення, називаються G_2–бінарними.

Лема 3.1. *Множина B всіх G_2–бінарних чисел вичерпується числами з G_2–зображеннями типу:*

$$\Delta^{G_2}_{c_1 \ldots c_m 01(0)} = \Delta^{G_2}_{c_1 \ldots c_m 11(0)}. \tag{3}$$

Доведення. Спочатку доведемо рівність (3). Для цього розглянемо різницю

$$d \equiv \Delta^{G_2}_{c_1\ldots c_m 01(0)} - \Delta^{G_2}_{c_1\ldots c_m 11(0)} =$$
$$= g_0^2 \prod_{j=1}^{m} g_{cj} - \left(g_0 \prod_{j=1}^{m} g_{c_j} + g_0 g_1 \prod_{j=1}^{m} g_{c_j} \right) =$$
$$= g_0(g_0 - 1 - g_1) \prod_{j=1}^{m} g_{c_j} = 0.$$

Отже, рівність (3) виконується. Тепер покажемо, що інших чисел, що мають понад одне G_2–зображення, не існує. Для цього розглянемо два числа з зображеннями $x_1 = \Delta^{G_2}_{c_1\ldots c_m d_1 d_2\ldots}$, $x_2 = \Delta^{G_2}_{c_1\ldots c_m d'_1 d'_2\ldots}$ і модуль їхньої різниці

$$|x_1 - x_2| \equiv |\Delta^{G_2}_{c_1\ldots c_m d_1 d_2\ldots} - \Delta^{G_2}_{c_1\ldots c_m d'_1 d'_2\ldots}| =$$
$$= |\Delta^{G_2}_{d_1\ldots d_m\ldots} - \Delta^{G_2}_{d'_1\ldots d'_m\ldots}| \cdot |\prod_{j=1}^{m} g_{c_j}|.$$

Не порушуючи загальності, вважатимемо $d_1 = 1$, $d'_1 = 0$. Оскільки

$$|\Delta^{G_2}_{d_1\ldots d_n\ldots} - \Delta^{G_2}_{d'_1\ldots d'_n\ldots}| \geq \min \Delta^{G_2}_{d_1\ldots d_n\ldots} - \max \Delta^{G_2}_{d'_1\ldots d'_n\ldots} =$$
$$= \Delta^{G_2}_{11(0)} - \Delta^{G_2}_{01(0)} = 0,$$

то $x_1 = x_2$ тоді і тільки тоді, коли $\Delta^{G_2}_{11(0)} = \Delta^{G_2}_{01(0)}$. Лему доведено. □

Множина B всіх G_2–бінарних чисел є зліченною.

Означення 3.2. Якщо g_0 є раціональним числом, то відповідне до нього G_2–зображення називається раціональним.

Якщо G_2–зображення є раціональним, то G_2–бінарне число є раціональним. Це випливає безпосередньо з леми 3.1, бо сума скінченного числа раціональних чисел є числом раціональним. Але не кожне раціональне число $x \in [0; g_0]$ є G_2–бінарним.

Справді, число

$$x = \Delta^{G_2}_{(10)} = g_0 + g_0^2 g_1 + g_0^3 g_1^2 + \ldots = \frac{g_0}{1 - g_0 g_1}$$

G_2–бінарним не є, але є раціональним.

Лема 3.2. *Якщо раціональне G_2–зображення числа $x = \Delta^{G_2}_{c_1\ldots c_m(c_{m+1}\ldots c_{m+p})}$ є періодичним, то число x є раціональним.*

Доведення. Справді, представлення числа x можна подати формулою

$$x = A_m + P_m \cdot \frac{S_m}{1 - Q_m},$$

де

$$A_m = \delta_{c_1} + \sum_{k=2}^{m} \left(\delta_{c_k} \prod_{j=1}^{k-1} g_{c_j} \right),$$

$$P_m = \prod_{j=1}^{m} g_{c_j},$$

$$S_m = \delta_{c_{m+1}} + \sum_{k=2}^{P} \left(\delta_{c_{m+k}} \prod_{j=1}^{k-1} g_{c_{m+j}} \right),$$

$$Q_m = \prod_{j=1}^{P} g_{c+j}.$$

Оскільки числа g_{c_j}, δ_{c_j} – раціональні, то раціональними є й числа A_m, P_m, S_m, Q_m, а отже, і число x. □

4 Порівняння чисел за їхніми G_2–зображеннями

Зрозуміло, що числа G_2–бінарне і G_2–унарне дорівнювати один одному не можуть. Умови рівності двох G_2–бінарних чисел знайдені в попередньому пункті, G_2–унарних є очевидним, а саме: якщо числа x_1 і x_2 не є G_2–бінарними, то очевидне таке твердження.

Лема 4.1. *Числа $x_1 = \Delta^{G_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ і $x_2 = \Delta^{G_2}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots}$ рівнозначні тоді і тільки тоді, коли $\alpha_k = \beta_k$ при всіх $k \in N$.*

Теорема 4.1. *Якщо $x_1 \neq x_2$ і $k(x_1, x_2) = m$, то*

$$\Delta^{G_2}_{c_1c_2\ldots c_m 1 d_1 d_2\ldots} = x_1 \quad i \quad x_2 = \Delta^{G_2}_{1c_2\ldots c_m 0 d'_1 d'_2\ldots}$$

перебувають у відношенні

$$x_1 \geq x_2, \quad якщо \quad \sigma_m \equiv c_1 + c_2 + \ldots + c_m = 2k,$$

$$x_1 \leq x_2, \quad якщо \quad \sigma_m \equiv c_1 + c_2 + \ldots + c_m = 2k - 1.$$

Доведення. Розглянемо різницю

$$x_1 - x_2 = P_m(x_1, x_2) \left(\omega^m(x_1) - \omega^m(x_2)\right),$$

де $P_m(x_1, x_2) = \prod\limits_{j=1}^{m} g_{c_j}$, $\omega^m(x_1) = \Delta^{G_2}_{1d_1d_2\ldots}$, $\omega^m(x_2) = \Delta^{G_2}_{0d'_1d'_2\ldots}$.

Враховуючи, що

$$\omega^m(x_1) - \omega^m(x_2) \geq \min \Delta^{G_2}_{1d_1d_2\ldots} - \max \Delta^{G_2}_{0d'_1d'_2\ldots} = (g_0 - g_0g_1) - g_0^2 = 0,$$
$$\omega^m(x_1) - \omega^m(x_2) \leq \max \Delta^{G_2}_{1d_1d_2\ldots} - \min \Delta^{G_2}_{0d'_1d'_2\ldots} = g_0 - 0 = g_0,$$

маємо $x_1 \geq x_2$, якщо σ_m–парне; $x_1 \leq x_2$, якщо σ_m–непарне, оскільки при парному σ_m число P_m додатне, при непарному σ_m – від'ємне. □

Зауваження 4.1. У порівнянні чисел за їхніми G_2–зображеннями беруть участь не лише перші незбіжні цифри зображень чисел, а й суми всіх попередніх цифр. Це відрізняє дану систему від класичної двійкової та інших систем, що ґрунтуються на розкладах чисел у додатні ряди.

5 Геометрія G_2–зображення

Означення 5.1. Нехай $(c_n) \in L_2$, G_2–циліндром рангу m із основою $c_1c_2...c_m$ називається множина $\Delta^{G_2}_{c_1c_2\ldots c_m}$ всіх чисел $x \in [0; g_0]$, які мають таке G_2–зображення: $x = \Delta^{G_2}_{c_1\ldots c_m\alpha_{m+1}\alpha_{m+2}\ldots}$, $\alpha_{m+j} \in A$, тобто $\Delta^{G_2}_{c_1c_2\ldots c_m} = \{x : \alpha_i(x) = c_i,\ i = \overline{1, m}\}$.

Лема 5.1. *Циліндр* $\Delta^{G_2}_{c_1c_2\ldots c_m}$ *є відрізком, причому*

$[a; b]$, *якщо* $N_1 \equiv c_1 + c_2 + ...c_m$ *— парне,*

$[b; a]$, *якщо* N_1 *— непарне, де* $a = \delta_{c_1} + \sum\limits_{k=2}^{m} (\delta_{c_k} \prod_{j=1}^{k-1} g_{c_j})$,

$b = a + g_0 \prod_{j=1}^{m} g_{c_j}$.

Наслідок 5.1. *Довжина циліндра* $\Delta^{G_2}_{c_1c_2\ldots c_m}$ *обчислюється за формулою*

$$|\Delta^{G_2}_{c_1c_2\ldots c_m}| = g_0 \prod_{j=1}^{m} |g_{c_j}| = (-g_1)^{N_1} g_0^{m-N_1+1},$$

Наслідок 5.2. *Основне метричне відношення для* G_2*–зображення дійсних чисел із відрізка* $[0; g_0]$ *виглядає* $|\Delta^{G_2}_{c_1c_2\ldots c_m i}| = |g_i||\Delta^{G_2}_{c_1c_2\ldots c_m}|$.

Циліндри мають властивості:

1. $\Delta^{G_2}_{c_1c_2\ldots c_m} = \Delta^{G_2}_{c_1c_2\ldots c_m0} \cup \Delta^{G_2}_{c_1c_2\ldots c_m1}$, причому
   $\max \Delta^{G_2}_{c_1c_2\ldots c_m0} = \min \Delta^{G_2}_{c_1c_2\ldots c_m1}$, якщо N_1 — парне;
   $\max \Delta^{G_2}_{c_1c_2\ldots c_m1} = \min \Delta^{G_2}_{c_1c_2\ldots c_m0}$, якщо N_1 — непарне.
2. $\Delta^{G_2}_{a_1a_2\ldots a_m} = \Delta^{G_2}_{b_1b_2\ldots b_m} \Leftrightarrow a_i = b_i, \;\; i = \overline{1,m}.$
3. $\Delta^{G_2}_{a_1\ldots a_m a_{m+1}\ldots a_{m+k}} \cap \Delta^{G_2}_{b_1b_2\ldots b_m} = \begin{cases} \varnothing, & \text{якщо } \exists\, a_i \neq b_i, i \leq \overline{1,m}. \\ \Delta^{G_2}_{b_1\ldots b_m}, & \text{якщо } a_i = b_i, i = \overline{1,m}. \end{cases}$
4. $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \Delta^{G_2}_{c_1c_2\ldots c_m} = x \in [0; g_0] \;\forall (c_m) \in L_2.$

Властивості циліндрів розкривають геометрію цифр G_2–зображення чисел і виправдовують вибір терміну *циліндричне G_2–зображення.*

6 Оператор лівостороннього зсуву

Теорема 6.1. *Оператор ω лівостороннього зсуву цифр G_2–зображення чисел відрізка $[0; g_0]$, який у просторі G_2-зображень означається рівністю*

$$\omega(\Delta^{G_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{G_2}_{\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots}, \tag{4}$$

аналітично задається

$$\omega(x) = \frac{1}{g_{\alpha_1(x)}} x - \frac{\delta_{\alpha_1(x)}}{g_{\alpha_1(x)}}, \tag{5}$$

є неперервною коректно означеною на $[0; g_0]$ функцією, що є лінійною на кожному з циліндрів першого рангу, причому зростаючою на Δ_0 і спадною на Δ_1.

Доведення. Оскільки

$$x = \Delta^{G_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots} = \delta_{\alpha_1} + g_{\alpha_1}\left(\delta_{\alpha_2} + \sum_{k=3}^{\infty} \delta_{\alpha_k} \prod_{j=2}^{k-1} g_{\alpha_j}\right) =$$
$$= \delta_{\alpha_1} + g_{\alpha_1}\omega(x),$$

то виконується рівність (5). Враховуючи, що

$$g_{\alpha_1} = \begin{cases} g_0 > 0 \quad \text{при} \quad \alpha_1 = 0 \ \Leftrightarrow \ x \in \Delta_0^{G_2}; \\ g_1 < 0 \quad \text{при} \quad \alpha_1 = 1 \ \Leftrightarrow \ x \in \Delta_1^{G_2}; \end{cases}$$

лінійність і монотонність функції ω на циліндрах першого рангу стає очевидною. Коректність означення і неперервність ω є наслідком рівностей $\omega(g_0^2) = \omega(\Delta_{01(0)}) = \omega(\Delta_{11(0)}) = \Delta_{1(0)} = g_0$. □

Інваріантними точками оператора лівостороннього зсуву є числа:

$$0 = \Delta_{(0)}^{G_2} \quad \text{і} \quad \Delta_{(1)}^{G_2} = g_0 + g_0 g_1 + g_0 g_1^2 + ... = \frac{g_0}{2 + g_0}.$$

Зауваження 6.1. Остання теорема засвідчує суттєву відмінність G_2–зображення від інших відомих двосимвольних зображень, зокрема Q_2^*–зображення, $\tilde{Q}$–зображення і ланцюгового A_2–зображення.

Нехай n–натуральне число, більше від 1, сформулюємо це як

$$\omega^n(x) = \omega(\omega^{n-1}(x)) = \Delta^{G_2}_{\alpha_{n+1}(x)\alpha_{n+2}(x)...}.$$

Оскільки $x = \delta_{\alpha_1(x)} + \sum\limits_{k=2}^{n} \delta_{\alpha_k(x)} \prod\limits_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j(x)} + \left(\prod\limits_{j=1}^{n} g_{\alpha_j(x)}\right) \omega^n(x)$,

то $\omega^n(x) = \dfrac{x}{P_n(x)} - \dfrac{1}{P_n(x)} \left(\delta_{\alpha_1(x)} + \sum\limits_{k=2}^{n} \left(\delta_{\alpha_k(x)} \prod\limits_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j(x)}\right)\right)$.

Теорема 6.2. *Функція ω^n є коректно означеною рівністю*

$$\omega^n(x) = \omega^n(\Delta^{G_2}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)...\alpha_n(x)...}) \equiv \Delta^{G_2}_{\alpha_{n+1}(x)\alpha_{n+2}(x)...},$$

має аналітичний вираз

$$\omega^n(x) = \frac{1}{P_n} x - \frac{B_n}{P_n}, \tag{6}$$

де $P_n = \prod\limits_{j=1}^{n} g_{\alpha_j(x)}$, $B_n = \delta_{\alpha_1(x)} + \sum\limits_{k=2}^{n} \left(\delta_{\alpha_k(x)} \prod\limits_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j(x)}\right)$; *неперервною на відрізку* $[0; g_0]$, *лінійному на кожному циліндрі рангу* n.

Доведення. Справді, коректність означення функції в G_2–унарних точках є очевидною, а для G_2–бінарних — випливає з рівності

$$\omega^n(\Delta^{G_2}_{c_1\ldots c_m 01(0)}) = \omega^n(\Delta^{G_2}_{c_1\ldots c_m 11(0)}),$$

яка виконується для всіх натуральних m ($m < n$, $m = n$, $m > n$).

Оскільки

$$x = \delta_{\alpha_1(x)} + \sum_{k=2}^{n}\left(\delta_{\alpha_k(x)}\prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j(x)}\right) + \left(\prod_{j=1}^{n} g_{\alpha_j(x)}\right)\omega^n(x),$$

то дійсна рівність (6). З рівності (6) бачимо, що на циліндрі $\Delta^{G_2}_{c_1\ldots c_n}$ значення виразів P_n і B_n є константою, тому ω^n є лінійною функцією на цьому циліндрі, причому зростаючою, якщо $P_n > 0$, і спадною, якщо $P_n < 0$.

Неперервність функції у внутрішніх точках циліндрів n–рангу — це наслідок отриманого аналітичного виразу функції. Залишилось обґрунтувати її неперервність у G_2–бінарних точках n–го рангу (а саме: на кінцях циліндрів n–го рангу). Зауважимо, що неперервність функції ω^n у G_2–бінарній точці x_0 рівнозначна до коректності означення функції в цій точці (вираз значення функції від двох різних зображень числа дає той самий результат). А це встановлено вище. Для прикладу розглянемо циліндр $\Delta^{G_2}_{c_1\ldots c_{n-1}} = \Delta^{G_2}_{c_1\ldots c_{n-1}0} \cup \Delta^{G_2}_{c_1\ldots c_{n-1}1}$. Спільним кінцем циліндрів $\Delta^{G_2}_{c_1\ldots c_{n-1}0}$ і $\Delta^{G_2}_{c_1\ldots c_{n-1}1}$ є точка $x = \Delta^{G_2}_{c_1\ldots c_{n-1}01(0)} = \Delta^{G_2}_{c_1\ldots c_{n-1}11(0)}$, при цьому $f(x_*) = \Delta^{G_2}_{1(0)} = g_0$. $\square$

7 Інверсор Δ^{G_2}–зображення

Функція I, означена рівністю

$$I(\Delta^{G_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{G_2}_{1-\alpha_1,1-\alpha_2,\ldots,1-\alpha_n,\ldots},$$

називається *інверсором* цифр G_2–зображення.

Це означення є коректним у точках, що мають єдине зображення. Але оскільки $\dfrac{g_0(1+g_1^2)}{1-g_1} = I(\Delta^{G_2}_{01(0)}) \neq I(\Delta^{G_2}_{11(0)}) = \dfrac{g_0^3}{1-g_1}$, то воно не є коректним без домовленості використовувати лише одне зі двох наявних G_2–зображень G_2–бінарних точок. Тому домовимось не використовувати зображення $\Delta^{G_2}_{c_1\ldots c_m 11(0)}$.

Розглядатимемо функцію I, визначену на множині $U \in [0;1]$ G_2–унарних чисел, нехтуючи множиною B всіх G_2–бінарних чисел.

Теорема 7.1. *Інверсор* I *є ніде не монотонною неперервною на множині* G_2*–унарних точок відрізка* $[0;g_0]$.

Доведення. 1. Спочатку обгрунтуємо неперервність. Нехай $x_0 = \Delta^{G_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ – довільна G_2–унарна точка $x_0 \neq x \in B$. Тоді існує $m \in N$, таке, що $\alpha_m(x_0) \neq \alpha_m(x)$, але $\alpha_j(x_0) = \alpha_j(x)$ при $j < m$. Причому $x \to x_0$ рівнозначно до $m \to \infty$. Розглянемо

$$|I(x) - I(x_0)| = P_{m-1} \cdot |\omega^{m-1}(I(x)) - \omega^{m-1}(I(x_0))|,$$

де $P_{m-1} = \prod\limits_{j=1}^{m-1} |g_{1-\alpha_j(x_0)}|$.

Оскільки $P_{m-1} \to 0$ $(m \to \infty)$, а $|\omega^{m-1}(I(x)) - \omega^{m-1}(I(x_0))| \leq g_0$, то $|I(x) - I(x_0)| \to 0$ $(x \to x_0)$, що рівнозначно до неперервності функції I в точці x_0.

2. Тепер доведемо ніде не монотонність. Розглянемо два числа x_1, x_2, для яких $k(x_1, x_2) = m$, тобто

$$x_1 = \Delta^{G_2}_{c_1c_2\ldots c_m d_1 d_2\ldots} \quad \text{i} \quad x_2 = \Delta^{G_2}_{c_1c_2\ldots c_m d'_1 d'_2\ldots},\ d_1 \neq d'_1,$$

і відповідні для них значення $y_1 = I(x_1)$, $y_2 = I(x_2)$. Для них

$$y_1 - y_2 = [\omega^m(I(x_1)) - \omega^m(I(x_2))]\,\hat{P}_m, \quad \text{де} \quad \hat{P}_m = \prod_{j=1}^{m} g_{1-c_j}.$$

Нехай $x_1 \leq x_2$. Тоді можливі випадки:

1) число $\sigma_m = c_1 + \ldots + c_m$ є парним; 2) σ_m – непарне.

У першому випадку з $x_1 < x_2$ випливає $d_1 = 0$, а $d'_1 = 1$ і маємо

$$y_1 - y_2 = \left(\Delta^{G_2}_{1,1-d_1,1-d_2\ldots} - \Delta^{G_2}_{0,1-d'_1,1-d'_2\ldots}\right)\hat{P}_m.$$

У цьому разі знак різниці $y_1 - y_2$ збігається з знаком $\hat{P}_m$. Тому якщо m – число парне, то число $\bar{\sigma}_m \equiv m - \sigma_m = (1-c_1) + (1-c_2) + \ldots + (1-c_m)$ теж парне. Тоді $\hat{P}_m > 0$ і $I(x_1) > I(x_2)$.

Якщо m – непарне, то $\bar{\sigma}_m$–непарне і $\hat{P}_m < 0$, а отже, $I(x_1) < I(x_2)$.

У другому разі з $x_1 < x_2$ випливає, що $d_1 = 1$, а $d'_1 = 0$ і маємо

$$y_1 - y_2 = (\Delta^{G_2}_{0,1-d_1,1-d_2,\ldots} - \Delta^{G_2}_{1,1-d'_1,1-d'_2,\ldots})\hat{P}_m.$$

У цьому випадку знак різниці $y_1 - y_2$ є протилежним до знаку $\hat{P}_m$, оскільки вираз у дужках від'ємний. Якщо m–парне, то $\bar{\sigma}_m = m - \sigma_m$ – непарне (кількість одиниць серед $1 - c_1, 1 - c_2, \dots, 1 - c_m$), а отже, $\hat{P}_m < 0$ і $I(x_1) > I(x_2)$.

Якщо m–непарне, то $\bar{\sigma}_m$ – парне, $\hat{P}_m > 0$ і $I(x_1) < I(x_2)$.

Таким чином, при $x_1 < x_2$ можливі як $y_1 < y_2$, так і $y_1 > y_2$ залежно від парності–непарності чисел m і σ_m.

Для доведення ніде не монотонності функції I досить вказати у довільно вибраному циліндрі $\Delta^{G_2}_{c_1 c_2 \dots c_m}$ трьох чисел x_1, x_0, x_2, таких, що $x_1 < x_0 < x_2$, для яких $[I(x_0) - I(x_1)]\,[I(x_2) - I(x_0)] < 0$. Не порушуючи загальності, вважатимемо, що $\sigma_m = c_1 + \ldots + c_m$ є числом парним (якщо це не так, досить розглянути півциліндр $\Delta^{G_2}_{c_1 \dots c_m 1}$). Розглянемо точки $x_0 = \Delta^{G_2}_{c_1 \dots c_m (01)}$, $x_0 = \Delta^{G_2}_{c_1 \dots c_m (001)}$, σ_m–парне, m–непарне $y_1 < y_0$, $x_0 = \Delta^{G_2}_{c_1 \dots c_m (110)}$, σ_m–парне, m–парне $y_0 > y_2$.

Для пари (x_1, x_0) маємо $x_1 < x_0$, σ_m–парне, m–непарне, а отже, за попереднім $y_1 = I(x_1) < I(x_2) = y_0$.

Для пари (x_0, x_2) маємо $x_0 < x_2$, σ_m–парне, m–парне, а отже, $y_0 > y_2 = I(x_2)$. Тому $(y_0 - y_1)(y_2 - y_0) < 0$, що й вимагалось довести. □

8 Двоїсті системи

Означення 8.1. G_2–зображення і Q_2–зображення чисел із основами (g_0, g_1) і (q_0, q_1) відповідно називаються *двоїстими*, якщо $g_0 = q_0$.

Вважаємо Q_2– і G_2–зображення заданими.

Функція p, яка числу $x = \Delta^{Q_2}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}$ ставить у відповідність число $y = \Delta^{G_2}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}$, називається проектором Q_2 в G_2–зображення.

Проектор Q_2–зображення в G_2–зображення Q_2–циліндр $\Delta^{Q_2}_{c_1 c_2 \dots c_m}$ переводить у G_2–циліндр $\Delta^{G_2}_{c_1 c_2 \dots c_m}$, причому $|\Delta^{G_2}_{c_1 \dots c_m}| = g_0 |\Delta^{Q_2}_{c_1 \dots c_m}|$.

Теорема 8.1. *Функція, означена рівністю $p\left(\Delta^{Q_2}_{\alpha_1 \dots \alpha_n \dots}\right) = \Delta^{G_2}_{\alpha_1 \dots \alpha_n \dots}$, є ніде не монотонною неперервною в кожній Q_2–унарній точці. В Q_2–бінарній точці $x_0 = \Delta^{Q_2}_{c_1 \dots c_{m-1} 1(0)}$ функція p має скінченний стрибок* $\dfrac{2g_0(1 - g_0)}{2 - g_0} \prod\limits_{j=1}^{m-1} |g_{c_j}|$.

Доведення. Нехай x_0 — Q_2–унарна точка, $x \neq x_0$. Тоді існує натуральне число m, таке, що $\alpha_{m+1}(x) \neq \alpha_{m+1}(x_0)$, але $\alpha_i(x) = \alpha_i(x_0)$ при $i \leq m$. Розглянемо

$d = |p(x) - p(x_0)| = |\Delta^{G_2}_{\alpha_{m+1}(x)\alpha_{m+2}(x)\ldots} - \Delta^{G_2}_{\alpha_{m+1}(x_0)\alpha_{m+2}(x_0)\ldots}| \cdot \prod\limits_{j=1}^{m} |g_{\alpha_j}|.$

Оскільки $|\Delta^{G_2}_{\alpha_{m+1}(x)\alpha_{m+2}(x)\ldots} - \Delta^{G_2}_{\alpha_{m+1}(x_0)\alpha_{m+2}(x_0)\ldots}| \leq g_0$; а $x \to x_0$ рівнозначно $m \to \infty$, то при $m \to \infty$ маємо $d \to 0$, що рівно до неперервності функції p в точці x_0 за множиною G_2–унарних чисел.

Стрибок d функції p в G_2–бінарній точці $x_0 = \Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{m-1}1(0)}$:

$$d(\Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_{m-1}1(0)}) = |\Delta^{G_2}_{c_1\ldots c_{m-1}1(0)} - \Delta^{G_2}_{c_1\ldots c_{m-1}0(1)}| =$$
$$= |\Delta^{G_2}_{1(0)} - \Delta^{G_2}_{0(1)}| \prod_{j=1}^{m-1} |g_{c_j}| = \frac{2g_0(1-g_0)}{2-g_0} \prod_{j=1}^{m-1} |g_{c_j}|.$$

Для доведення ніде не монотонності проектора досить у будь–якому циліндрі (нехай $\Delta^{G_2}_{c_1\ldots c_n}$) вказати такі три точки x_1, x_2, x_3, що $x_1 < x_2 < x_3$, але для відповідних значень проектора p виконується нерівність $[p(x_2) - p(x_1)] \cdot [p(x_3) - p(x_2)] < 0$. Задля цього розглянемо точки $x_1 = \Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_m i1(0)}$, $x_2 = \Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_m i11(0)}$, $x_3 = \Delta^{Q_2}_{c_1\ldots c_m i111(0)}$. Якщо $i = 0$ і $c_1 + c_2 + \ldots + c_m$ — число парне, то для їм відповідних значень: $y_1 = p(x_1) = \Delta^{G_2}_{c_1\ldots c_m i1(0)}$, $y_2 = p(x_2) = \Delta^{G_2}_{c_1\ldots c_m i11(0)}$,

$$y_3 = p(x_3) = \Delta^{G_2}_{c_1\ldots c_m i111(0)},$$

враховуючи ознаку порівняння (теорема 4.1), маємо $y_1 > y_2 < y_3$. Отже, $(y_2 - y_1)(y_3 - y_2) < 0$.

Якщо $c_1 + c_2 + \ldots + c_m$ — число непарне, то, взявши $i = 1$, матимемо $x_1 > x_2 > x_3$ й ідентичний висновок. $\square$

[1] *Дмитренко С.О., Кюрчев Д.В., Працьовитий М.В.* Ланцюгове A_2-зображення дійсних чисел та його геометрія // Український математичний журнал. — 2009. — **61**, 9. — С. 452-463.

[2] *Дмитренко С.О.* Метричні задачі медіантного представлення чисел // Наук. записки НПУ ім. М.П. Драгоманова. Фіз.-мат. науки. — 2002. — В. 3 — С. 403–411.

[3] *Луцак В. В.* Циліндричне марковське зображення чисел і його застосування // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — К.: Вид-во НПУ імені М.П.Драгоманова. — 2009. — № 10. — С. 141–149.

[4] *Працьовитий М.В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — К.: Вид-во НПУ ім. М.П. Драгоманова. — 1998. — 296 с.

[5] *Працьовитий М. В.* Нега–канторівські зображення дійсних чисел як тривіальні перекодування канторівських (нега s-кові – перекодування s-кових) // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — К.: Інститут математики НАН України. — 2017. — **14**, 4. — С. 167–177.

[6] *Працевитый Н.В.* Случайные величины с независимыми Q_2-символами // Асимптотические методы в исследовании стохастических моделей. — Киев: ИМ АН УССР. — 1987. — С. 92–102.

[7] *Працевитий М.В.* Фрактальні властивості розподілів випадкових величин, Q_2-знаки яких утворюють однорідний ланцюг Маркова // Асимптотичний аналіз випадкових еволюцій. — Київ: Ін-т математики АН України. — 1994. — С. 249–254.

[8] *Працевитый Н.В.* Поліосновне $\tilde{Q}$-представлення і фрактальні математичні об'єкти з ним пов'язані // Фрактальний аналіз та суміжні питання. — Київ: ІМ НАН України – НПУ імені М.П. Драгоманова. — 1998. — № 2. — С. 14–35.

[9] *Працьовитий М. В.* Геометрія дійсних чисел у їх кодуваннях засобами нескінченного алфавіту як основа топологічних, метричних, фрактальних і ймовірнісних теорій // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — Київ: Вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2013. — № 14. — С. 189–216.

[10] Працьовитий М.В., Маслова Ю.П. Про одне узагальнення системи функцій Радемахера та Уолша // Збірник праць ІМ НАН України.— К.: ІМ НАН України. — 2016. — **13**, 3. — С. 146–157.

[11] *Працьовитий М.В., Лисенко І.М., Маслова Ю.П.* Геометрія числових рядів: ряд як модель дійсного числа в новій двосимвольній системі кодування чисел // Збірник праць ІМ НАН України.— К.: ІМ НАН України. — 2018. — **15**, 1. — С. 132–146.

[12] *Schweiger F.* Ergodic theory of fibred system and metric number theory // Oxford Sci.Publ., (E. D. Itor, ed.).— Oxford Univ. Press. New York, 1995. — 295 p.

[13] *Iosifescu M., Kraaikamp C.* On Denjoy's canonical continued fraction expansion // Osaka J. Math.— **40**, 1.— 2003. — P. 235–244.