

УДК 517.983.27

Динаміка системи “резервуар – рідина з вільною поверхнею” під дією зовнішнього силового збудження руху

О. В. Константинов

*Інститут математики НАН України, Київ;
akonst.im@ukr.net*

The dynamics of the mechanical system “reservoir – liquid with a free surface” exposed to an external vertical force, which varies by a harmonic law, is considered. The dynamics is studied by employing a nonlinear multidimensional (up to 12 wave modes) discrete model, developed on the basis of the Hamilton-Ostrogradsky variational principle. It is shown that dynamic processes in the system develop as a combination of parametric resonance and forced oscillations.

В роботі досліджується динаміка механічної системи “резервуар – рідина з вільною поверхнею” під дією зовнішньої вертикальної сили, яка змінюється за гармонічним законом. Дослідження динаміки проводилося на основі нелінійної багатомодової (до 12 форм коливань) дискретної моделі, розробленої на основі варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського. Показано, що динамічні процеси в системі розвиваються як сукупність параметричного резонансу і вимушених коливань. Коректність дискретної моделі перевірено на основі зіставлення з експериментальними результатами інших авторів.

Вступ

Інженерні конструкції, які містять у своєму складі резервуари, частково заповнені рідиною, широко використовуються в різних галузях техніки [4–8, 17]. Баки з рідиною є невід’ємною частиною космічних апаратів із рідинним ракетним двигуном, літаків, гелікоптерів та інших транспортних засобів. Резервуари постійно використовуються для перевезень і зберігання рідинних вантажів на відповідних

етапах виробничих або технологічних процесів. У всіх наведених прикладах предметом теоретичного і експериментального дослідження є поведінка конструкцій із рідиною в умовах дії вібраційних, імпульсних, сейсмічних і керуючих навантажень з урахуванням наявності постійного збурення – коливань вільної поверхні рідини. Одним із важливих завдань при практичному використанні резервуарів є дослідження динаміки таких систем при наявності руху резервуару у вертикальній площині під дією параметричного або силового навантаження. Фундаментальний огляд робіт, присвячених явищу параметричного резонансу, виконаний у роботах R.A. Ibrahim [11, 12]. Нещодавно з’явилися роботи, в яких досліджуються умови виходу на усталений режим коливань вільної поверхні рідини при наявності параметричного навантаження [13–15]. В цій роботі досліджуються перехідні процеси в системі “резервуар – рідина з вільною поверхнею” при наявності зовнішнього вертикального силового навантаження, яке змінюється за гармонічним законом.

1 Формулювання математичної моделі та перевірка її коректності

Розглянемо циліндричний резервуар, частково заповнений рідиною. Резервуар вважаємо абсолютно твердим тілом, яке може рухатись поступально під дією активних зовнішніх сил. Рідину вважаємо ідеальною, нестисливою, однорідною, а її початковий рух безвихровим. Відповідно до методики роботи О.С. Лимарченко [1], математична модель механічної системи “резервуар – рідина з вільною поверхнею” будується на основі варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського

$$\delta I = 0, \quad \text{где} \quad I = \int_{t_1}^{t_2} L dt,$$

при цьому функція Лагранжа задається у класичній формі Гамільтона-Остроградського як різниця між кінетичною і потенціальною енергією системи

$$L = \frac{1}{2} \rho \int_{\tau} (\vec{\nabla} \varphi + \dot{\vec{\varepsilon}})^2 d\tau + \frac{1}{2} M_T (\dot{\vec{\varepsilon}})^2 - (M_T + M_F) g \varepsilon_z - \\ - \frac{1}{2} \rho g \int_S (\xi^2 - H^2) dS + \vec{F} \cdot \vec{\varepsilon},$$

де ρ – щільність рідини; τ – область, яку займає рідина; $d\tau = r dr d\theta dz$ – циліндричні координати, при цьому вісь Oz має напрямок, протилежний до напрямку вектора прискорення вільного падіння \vec{g} , а система координат пов'язана з нерухомим резервуаром; $\vec{\nabla} = \vec{i}_1 \frac{\partial}{\partial r} + \vec{i}_2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{i}_3 \frac{\partial}{\partial z}$; φ – потенціал швидкостей рідини; ξ – збурення вільної поверхні рідини; S – поперечний переріз циліндричного резервуару; M_T і M_F – маса резервуару і рідини відповідно; $\vec{\varepsilon} = (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z)$ – вектор переміщення резервуару в поступальному русі; \vec{F} – головний вектор зовнішніх сил, які діють на резервуар, щодо точки O .

Для ефективного застосування варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського поставлено задачу ввести у розгляд мінімальну кількість незалежних змінних, що описують рух резервуару з рідиною, тобто фактично будуються розклади шуканих змінних, які задовольняють наперед усі кінематичні граничні умови. Оскільки безвихровий рух ідеальної однорідної нестисливої рідини відповідно до теореми Лагранжа повністю визначається рухом її границь, то збурення вільної поверхні рідини ξ і радіус-вектор $\vec{\varepsilon}(t)$ повністю характеризують рух самої рідини, і тому потенціал швидкостей φ потрібно вважати залежною змінною.

Відповідно до методики роботи [1], розклади шуканих змінних наведемо у формі

$$\xi(r, \theta, t) = \sum_i a_i(t) \psi_i(r, \theta), \varphi = \sum_i b_i(t) \varphi_i(r, \theta, z),$$

де $a_i(t)$ – амплітуди форм коливань збуреної вільної поверхні рідини ξ . Системи функцій ψ_i і $\varphi_i = \psi_i \frac{\cosh \kappa_i(z+H)}{\kappa_i \sinh \kappa_i H}$ є розв'язком лінійної спектральної задачі [1] і мають вигляд

$$\psi_n(r, \theta) = J_n \left(\frac{\kappa_n^{(m)}}{R} r \right) \frac{\sin(n\theta)}{\cos(n\theta)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad m = 1, 2, \dots$$

У роботі [1] розроблено метод виключення кінематичних граничних умов на вільній поверхні рідини, який дає змогу отримати дискретну модель механічної системи “резервуар – рідина з вільною поверхнею” мінімальної розмірності. На основі розробленого методу, варіаційних методів математичної фізики і асимптотичних методів нелінійної механіки у роботі [1] побудована математична модель, яка дає змогу дослідити поступальні і кутові рухи механічної системи

“резервуар – рідина з вільною поверхнею” при різних видах кінематичного збурення і динамічного (силового і моментного) збудження. Ця модель є системою нелінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку стосовно незалежних параметрів a_i – коефіцієнтів розкладу в ряд збурення вільної поверхні рідини ξ за формами коливань вільної поверхні ψ_i і ε_i – компонент вектора переміщень центру незбуреної вільної поверхні рідини щодо деякої нерухомої системи відліку:

$$\begin{aligned}
 & \sum_i \ddot{a}_i \cdot \left\{ \beta_{ri}^q + \sum_j a_j \gamma_{ij}^q + \sum_{i,j} a_i a_j \delta_{rij}^q \right\} + \quad (1) \\
 & + \ddot{\varepsilon} \cdot \left\{ \vec{B}_r^1 + \sum_i a_i \vec{B}_{ri}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j \vec{B}_{rij}^3 + \sum_{i,j,k} a_i a_j a_k \vec{B}_{rijk}^4 \right\} = \\
 & = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j (\gamma_{ijr}^q - \gamma_{rij}^q) + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k (\delta_{ijk}^q - 2\delta_{rijk}^q) - \\
 & - \frac{1}{2} g \alpha_r^s - \alpha_r^p \dot{a}_r - g N_r a_r + \dot{\varepsilon} \cdot \left\{ \vec{B}_r^1 + \sum_i a_i (\vec{B}_{ir}^2 - \vec{B}_{ri}^2) + \right. \\
 & \left. + \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j 2(\vec{B}_{ijr}^3 - \vec{B}_{rij}^3) + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i a_j a_k 3(\vec{B}_{ijk}^4 - \vec{B}_{rijk}^4) \right\}, \\
 & \rho \left\{ \sum_i \ddot{a}_i [\vec{B}_i^1 + \sum_{i,j} a_j \vec{B}_{i,j}^2 + \sum_{i,j,k} a_j a_k \vec{B}_{ijk}^3] \right\} + (M_T + M_F) \ddot{\varepsilon} = \quad (2) \\
 & = \vec{F} - (M_T + M_F) g \vec{k} - \rho \left\{ \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j \vec{B}_{ij}^2 + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k \vec{B}_{ijk}^3 \right\}.
 \end{aligned}$$

Система (1) – (2) містить $N + 3$ рівнянь (N – кількість форм коливань рідини, що розглядаються) і описує динаміку сумісного руху резервуару і рідини при різних формах кінематичного збурення і динамічного (силового) збудження. Рівняння (1) описують динаміку амплітуд форм коливань вільної поверхні рідини, а рівняння (2) – динаміку резервуару, однак ці рівняння взаємозв’язані і містять сили взаємодії між компонентами механічної системи.

Сукупність коефіцієнтів, які входять до системи рівнянь (1) – (2), у рамках прийнятої моделі визначає властивості механічної системи, яка розглядається, і особливості прояву в ній внутрішніх лінійних і нелінійних механізмів взаємодії. Ці коефіцієнти визначаються через квадратури від розв'язку крайової задачі з визначення форм коливань вільної поверхні рідини. При цьому коефіцієнти $\beta_{ir}^q, \gamma_{ijr}^q, \delta_{ijk}^q, \alpha_r^s, N_r$ відповідають випадкові коливань рідини у нерухомому резервуарі, а коефіцієнти $\vec{B}_r^1, \vec{B}_{ri}^2, \vec{B}_{rij}^3, \vec{B}_{rijk}^4$ відображають взаємозв'язок коливань рідини та поступального руху резервуару.

Для перевірки коректності і точності значень коефіцієнтів, що обчислюються у рівняннях (1) – (2), виконаємо порівняння їхніх значень із результатами, опублікованими у роботах І.О. Луковського [2–4]. В [2–4] отримано систему диференціальних рівнянь коливань рідини в нерухомому циліндричному резервуарі при розкладанні рівняння вільної поверхні рідини за п'ятьма формами коливань

$$\begin{aligned}
& \mu_1(\ddot{a}_1 + \sigma_1^2 a_1) + d_1(a_1^2 \ddot{a}_1 + \dot{a}_1^2 \ddot{a}_1 + a_1 a_2 \ddot{a}_2 + a_1 \dot{a}_2^2) + \quad (3) \\
& + d_2(a_2^2 \ddot{a}_1 + 2a_2 \dot{a}_1 \dot{a}_2 - a_1 a_2 \ddot{a}_2 - 2a_1 \dot{a}_2^2) - d_3(a_5 \ddot{a}_1 - a_4 \ddot{a}_2 + \dot{a}_1 \dot{a}_5 - \dot{a}_2 \dot{a}_4) + \\
& + d_4(a_1 \ddot{a}_5 - a_2 \ddot{a}_4) + d_5(a_3 \ddot{a}_1 + \dot{a}_3 \dot{a}_1) + d_6 a_1 \ddot{a}_3 = 0, \\
& \mu_1(\ddot{a}_2 + \sigma_1^2 a_2) + d_1(a_2^2 \ddot{a}_2 + \dot{a}_2^2 \ddot{a}_2 + a_1 a_2 \ddot{a}_1 + a_2 \dot{a}_1^2) + \\
& + d_2(a_1^2 \ddot{a}_2 + 2a_1 \dot{a}_1 \dot{a}_2 - a_1 a_2 \ddot{a}_2 - 2a_2 \dot{a}_1^2) - d_3(a_5 \ddot{a}_2 - a_4 \ddot{a}_1 + \dot{a}_1 \dot{a}_4 - \dot{a}_2 \dot{a}_5) + \\
& + d_4(a_2 \ddot{a}_5 - a_1 \ddot{a}_4) + d_5(a_3 \ddot{a}_2 + \dot{a}_3 \dot{a}_2) + d_6 a_2 \ddot{a}_3 = 0, \\
& \mu_0(\ddot{a}_3 + \sigma_0^2 a_3) + d_6(a_1 \ddot{a}_1 + a_2 \ddot{a}_2) + d_8(\dot{a}_1^2 + \dot{a}_2^2) = 0, \\
& \mu_2(\ddot{a}_4 + \sigma_2^2 a_4) - d_4(a_2 \ddot{a}_1 + a_1 \ddot{a}_2) - 2d_7 \dot{a}_1 \dot{a}_2 = 0, \\
& \mu_2(\ddot{a}_5 + \sigma_2^2 a_5) - d_4(a_1 \ddot{a}_1 - a_2 \ddot{a}_2) + d_7(\dot{a}_1^2 - \dot{a}_2^2) = 0,
\end{aligned}$$

причому індекс 3 відповідає першій осесиметричній формі, а інші індекси відповідних форм систем рівнянь (1) – (2) і (3) співпадають. Порівняння систем (1) – (2) і (3) дозволяє встановити взаємну еквівалентність наступних коефіцієнтів, яка відображена нижче:

$$\begin{aligned}
& \beta_{11}^q = \mu_1, \beta_{22}^q = \mu_1, \beta_{33}^q = \mu_0, \beta_{44}^q = \mu_2, \beta_{55}^q = \mu_2, \\
& \gamma_{131}^q = d_6, \gamma_{113}^q = d_5, \gamma_{142}^q = -d_4, \gamma_{151}^q = d_4, \gamma_{124}^q = d_3, \gamma_{115}^q = -d_3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{232}^q &= d_6, \gamma_{223}^q = d_5, \gamma_{241}^q = -d_4, \gamma_{252}^q = -d_4, \gamma_{214}^q = d_3, \gamma_{511}^q = d_4, \\ \gamma_{322}^q &= d_6, \gamma_{311}^q = d_6, \gamma_{421}^q = -d_4, \gamma_{412}^q = -d_4, \gamma_{522}^q = -d_6, \gamma_{511}^q = d_4, \\ \delta_{1111}^q &= d_1, \delta_{1122}^q = d_2, \delta_{1212}^q + \delta_{1221}^q = d_1 - d_2, \delta_{2112}^q + \delta_{2212}^q = d_1 - d_2. \end{aligned}$$

Значення коефіцієнтів, що обчислювалися для системи (1) – (2), порівнювалися із значеннями коефіцієнтів системи (3), які наведені у роботах [2–4], для різних радіусів резервуару. Оскільки в системі (1) – (2) використовується більша кількість форм коливань, ніж у системі (3), а коефіцієнти в (1) – (2) обчислювалися за єдиним алгоритмом, є підстави вважати, що значення коефіцієнтів з номером індексу більше 5 також обчислюються коректно. Результати цих обчислень наведені у таблиці 1. Різниця у четвертому знаку після коми двох еквівалентних коефіцієнтів пояснюється використанням у моделі (1) – (2) більшої кількості форм коливань; однак у цілому необхідна точність і стійкість обчислювальної моделі забезпечується.

Таблиця 1

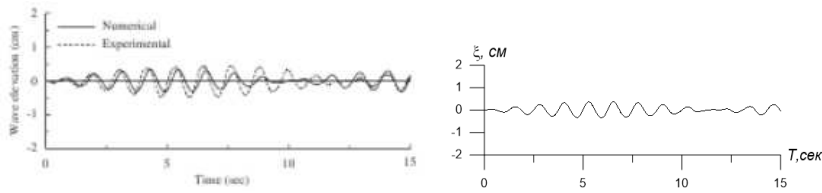
Коефіцієнт	R = 1 м		R = 0,3 м	
	Модель (3)	Модель (1) – (2)	Модель (3)	Модель (1) – (2)
$\beta_{11}^q = \beta_{22}^q = \mu_1$	0,6325	0,632528	0,0171	0,017078
$\beta_{33}^q = \mu_0$	0,8206	0,820665	0,0222	0,022158
$\beta_{44}^q = \beta_{55}^q = \mu_2$	0,2950	0,295078	0,0080	0,007967
β_{66}^q		0,447803		0,012091
$\beta_{77}^q = \beta_{88}^q$		0,183322		0,004950
$\beta_{99}^q = \beta_{10,10}^q$		0,284277		0,007675
$\beta_{11,11}^q = \beta_{12,12}^q$		0,181488		0,004900
$\gamma_{131}^q = d_6$	-0,0433	-0,043269	-0,0039	-0,003894
$\gamma_{113}^q = d_5$	1,039	1,03928	0,0935	0,093529
$\gamma_{142}^q = -d_4$	0,0560	0,056024	0,0050	0,005042
$\gamma_{124}^q = d_3$	0,6403	0,640291	0,0576	0,057626
γ_{161}^q		-0,007188		-0,000647
γ_{184}^q		-0,079145		-0,007123
$\gamma_{1,11,3}^q$		0,073751		0,006638
$\gamma_{1,12,4}^q$		-0,027277		-0,002455
$\delta_{1111}^q = d_1$	0,3920	0,392414	0,1184	0,117874
$\delta_{1122}^q = d_2$	-0,2416	-0,241630	-0,0721	-0,072339
δ_{1133}^q		-0,040095		-0,012029

Цей висновок також підтверджується результатами роботи [16], де експериментально і за допомогою програмного забезпечення кінцево-елементного аналізу ANSYS обчислювалась перша частота коливань вільної поверхні рідини для циліндричного резервуару діаметру 170

мм при різних глибинах його заповнення водою. Результати обчислення, отримані в роботі [16] та на основі моделі (1) – (2) наведені в таблиці 2.

Таблиця 2

Глибина рідини, мм	Частота коливань першої форми, Гц			
	Експеримент	Housner [10]	ANSYS	Модель (1) – (2)
50	2,07	2,066	1,99	2,067
100	2,30	2,289	2,18	2,289
150	2,33	2,316	2,22	2,316
200	2,33	2,319	2,22	2,319



а) результати експерименту

б) результати моделювання

Рис. 1. Порівняння з результатами експерименту роботи [9] при збудженні руху резервуару в горизонтальній площині в дорезонансній області

Коректність моделі (1) – (2) також підтверджується на основі порівняння з результатами експериментального дослідження, отриманими в роботі [9]. Циліндричний резервуар радіусу $R = 30$ см, заповнений водою до глибини $H = 10$ см, здійснює горизонтальні рухи за законом $y = A_f \cos(\omega_f t)$ під дією зовнішньої сили. Власна частота системи дорівнює $\omega_1 = 5,74$ Гц. Амплітуда горизонтального переміщення резервуару дорівнює $A_f = 0,05$ см, а значення частоти дорівнює $\omega_f = 5,16$ Гц для дорезонансної області і $\omega_f = 5,74$ Гц для резонансної області. Результати порівняння – графіки коливань вільної поверхні рідини на стінці резервуару – наведені на Рис. 1 і Рис. 2. В обох випадках досягається прийнятна для практики збіжність результатів. Для обох режимів характерна наявність амплітудної модуляції (оскільки зовнішня частота та власна частота системи досить близькі), однак в резонансній області амплітуди коливань вільної поверхні, як можна було очікувати, практично в 4 рази перевищують амплітуди коливань в дорезонансній області.

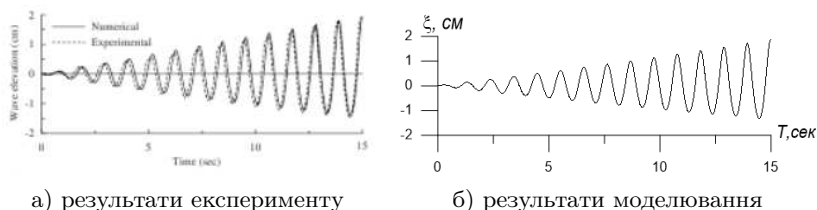


Рис. 2. Порівняння з результатами експерименту роботи [9] при збудженні руху резервуару горизонтальній площині в резонансній області.

2 Результати чисельного моделювання

Розглянемо круговий циліндричний резервуар із вертикальною повздовжньою віссю Oz , який здійснює поступальні рухи у площині xOz під дією гармонічної сили $F = F_z \cos(pt)$. Резервуар має радіус $R = 1$ м і частково заповнений водою до глибини $H = R$. Отримані результати зіставляємо із класичною задачею Фарадея, коли резервуар здійснює вертикальні рухи за заданим законом. Амплітуда початкового збурення вільної поверхні рідини на стінці резервуару $\xi = 0,01R$, а співвідношення мас резервуару і рідини становить $M_T = 1000M_F$. У класичній задачі Фарадея резервуар здійснює вертикальні коливання за заданим гармонічним законом $\varepsilon_z = H_z \cos(pt)$ з амплітудою $H_z = 0,01R \div 0,015R$ і частотою $p = 2\omega_*$ (в резонансній області), де $\omega_* = 4.14$ Гц – власна частота коливань системи для заданих параметрів. Для створення необхідного прискорення, яке забезпечить переміщення резервуару за законом $\varepsilon_z = H_z \cos(pt)$, прикладаємо до резервуару силу $F_z = -(M_T + M_F)H_z p^2 \cos(pt)$.

Система рівнянь (1) – (2) лінійна щодо других похідних, що дає можливість при практичній реалізації на кожному кроці чисельного інтегрування спочатку перетворити систему за допомогою ЕОМ до нормальної форми Коші, а потім чисельно інтегрувати за часом за допомогою стандартного методу Рунге-Кутта. При цьому на етапі перетворення до нормальної форми Коші порядок похідних знижувався шляхом введення узагальнених швидкостей \dot{a}_i як рівноправних незалежних змінних (разом із a_i). При дослідженні динаміки системи “резервуар – рідина” в розкладах утримувалося $n_1 = 21$ координатних функцій за лінійною, $n_2 = 14$ за квадратичною та $n_3 = 7$ за кубічною

теорією. Координатні функції ψ_i розміщено в порядку зростання відповідних для них власних частот окрім ψ_3 – першої осесиметричної форми. Крок чисельного інтегрування обирався $\Delta t = 0,1\pi\omega_{21}$ с, де ω_{21} – найвища парціальна частота форми ψ_{21} у системі.

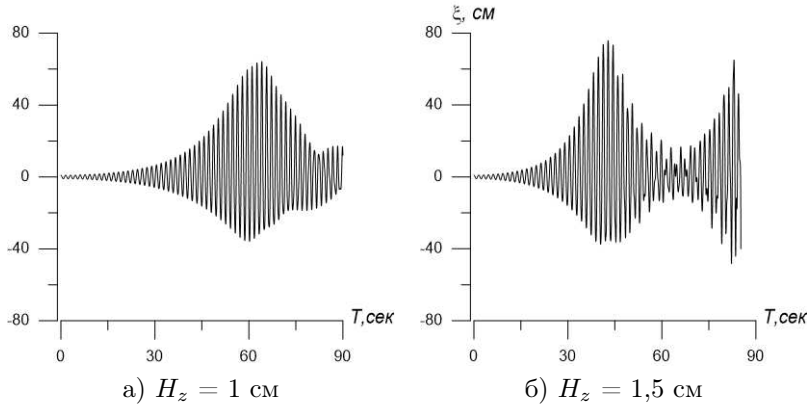


Рис. 3. Коливання вільної поверхні рідини в резонансній області при співвідношенні мас $M_T = 1000M_F$.

Графіки збурення вільної поверхні рідини на стінці резервуару під дією шуканої сили наведено на Рис. 3. Збурення вільної поверхні рідини виходять на режим параметричного резонансу (амплітуда коливань зростає приблизно в 40 разів), хоч і викликані динамічним, а не кінематичним зовнішнім впливом. Близькість значень частоти коливань вільної поверхні рідини і частоти параметричного збурення пояснюють наявність в коливаннях вільної поверхні рідини ефекту сильної амплітудної модуляції. Коливання резервуару у вертикальній площині практично не відрізняються від гармонічних, які здійснюються за законом $\varepsilon_z = H_z \cos(pt)$. Таким чином, у випадку важкого резервуару динаміка системи у класичній задачі Фарадея та при вертикальному силовому збудженні руху практично повністю якісно збігаються. Причиною такого збігу є мала відносна маса рідини, силовий відгук якої в обох випадках не впливає на коливання резервуара, і тому двостороння взаємодія між резервуаром і рідиною практично відсутня. Збільшення амплітуди зовнішнього збудження приводить до підвищення впливу вищих форм коливань вільної поверхні рідини – на графіку на Рис. 3б (у порівнянні з Рис. 3а) з'являються зрізи і зломи, що характерно якраз для прояву вищих гармонік спектру.

Подальше підвищення амплітуди зовнішньої сили приводить до суттєвого збільшення частоти коливань вільної поверхні рідини з ярко вираженим ефектом амплітудної модуляції. В роботі [13] наведено результати експерименту при вертикальному збудженні руху резервуару у випадку, коли частота зовнішньої сили має значення $p \approx 2\omega_*$ (резервуар радіусу $R = 6$ см, частково заповнений водою до глибини $H = 7,2$ см, з власною частотою $\omega_* = 17.14$ Гц). На Рис. 4 верхній графік відображає амплітуду вертикальних коливань резервуару, другий – амплітуду коливань вільної поверхні рідини у точці $R = 5$ см, $\theta = 90^\circ$, третій – амплітуду коливань вільної поверхні рідини у точці $R = 5$ см, $\theta = 180^\circ$ (для кожного з експериментів відповідно). Як можна бачити з графіків, і коливання резервуару, і коливання вільної поверхні рідини характеризуються сильною амплітудною модуляцією.

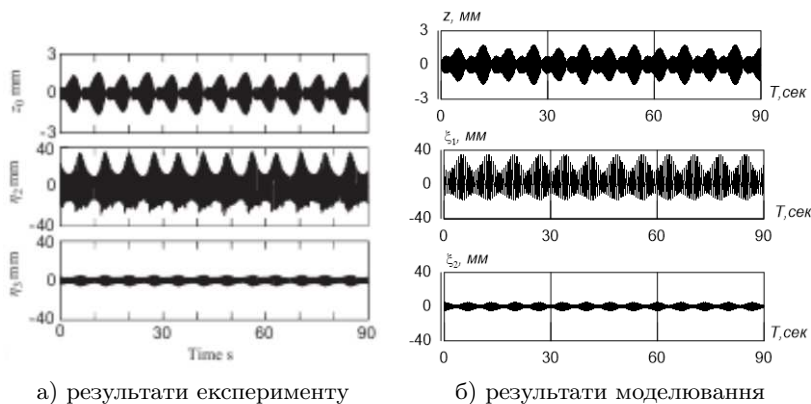


Рис. 4. Порівняння з результатами експерименту роботи [13] при збудженні руху резервуару в резонансній області.

В зарезонансній і дорезонансній областях частот при малих амплітудах зовнішньої сили коливання вільної поверхні взагалі не входять на режим вимушеного резонансу або хоча б на нелінійний режим (амплітуда коливань сягає $0,2R$ або вище). Тільки поступове збільшення амплітуди зовнішнього збудження спочатку приводить до підвищення частоти коливань вільної поверхні рідини (збільшення глибини амплітудної модуляції), а потім і до виходу системи в режим нелінійних коливань із суттєвим впливом вищих гармонік.

Висновки

Розглянуто динаміку механічної системи “резервуар – рідина з вільною поверхнею” під дією зовнішнього вертикального силового навантаження, яке змінюється за гармонічним законом. Дослідження перехідних процесів у системі проводилося на основі нелінійної багатомодової (до 21 форми коливань) дискретної моделі, яка побудована на основі варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського. На основі проведених досліджень показано, що при наявності додаткового ступеня вільності – можливості руху резервуару у вертикальному напрямку – динамічні процеси в системі розвиваються як сукупність параметричного резонансу і вимушених коливань.

- [1] *Лимарченко О.С., Ясинский В.В.* Нелинейная динамика конструкций с жидкостью. — Киев: НТТУ КПИ, 1997. — 338 с.
- [2] *Луковский И.А., Пилькевич А.М.* Нелинейные уравнения пространственных движений твердого тела с цилиндрической полостью, содержащей жидкость // Препринт, Институт математики АН УССР, 84.18. — Киев, 1984. — 40 с.
- [3] *Луковский И.А., Пилькевич А.М.* Таблицы гидродинамических коэффициентов нелинейных уравнений пространственных движений твердого тела с цилиндрической полостью, содержащей жидкость // Препринт, Институт математики АН УССР, 84.39. — Киев, 1984. — 45 с.
- [4] *Луковский И.А.* Введение в нелинейную динамику твердого тела с полостями, содержащими жидкость. — К.: Наукова думка, 1990. — 295 с.
- [5] *Луковский И.А.* Математические модели нелинейной динамики твердых тел с жидкостью. — К.: Наукова думка, 2010. — 408 с.
- [6] *Микишев Г.Н., Рабинович Б.И.* Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. — М.: Машиностроение, 1968. — 532 с.
- [7] *Микишев Г.Н.* Экспериментальные методы в динамике космических аппаратов. — М.: Машиностроение, 1978. — 247 с.
- [8] *Нариманов Г.С., Докучаев Л.В., Луковский И.А.* Нелинейная динамика летательного аппарата с жидкостью. — М.: Машиностроение, 1977. — 208 с.
- [9] *Chen Y., Hwang W., Ko Ch.* Sloshing behaviours of rectangular and cylindrical liquid tanks subjected to harmonic and seismic excitations // Earthquake Engineering and Structural Dynamics. — 2007. — Vol. 36. — P. 1701–1717.

- [10] *Housner G.W.* Dynamic analysis of fluids in containers subjected to acceleration. Nuclear Reactors and Earthquakes. — Report No. TID 7024, U.S. Atomic Energy Commission. Washington D.C., 1963.
- [11] *Ibrahim R.A.* Liquid Sloshing Dynamics. — UK: Cambridge University Press, 2005.— 970 p.
- [12] *Ibrahim R.A.* Recent advances in physics of fluid parametric sloshing and related problems // Journal of Fluid Engineering. — 2015. — Vol. 135. — P. 090801-1-090801-52.
- [13] *Ikeda T.* Autoparametric Resonances in Elastic Structures Carrying Two Rectangular Tanks Partially Filled with Liquid // Journal of Sound and Vibration. — 2007. — Vol. 302, no. 4-5. — P. 657–682.
- [14] *Ikeda T., Murakami Sh.* Nonlinear Vibrations of Elastic Structures Containing a Cylindrical Liquid Tank under Vertical Excitation // Journal of System Design and Dynamics. — 2008. — **2**, 3. — P. 822–836.
- [15] *Ikeda T., Murakami Sh., Ushio Sh.* Nonlinear Parametric Vibrations of Elastic Structures Containing Two Cylindrical Liquid-Filled Tanks // Journal of System Design and Dynamics. — 2009. — **3**, 1. — P. 120–134.
- [16] *Jaiswal O.R., Kulkarni Sh., Pathak P.* A study on sloshing frequencies of fluid-tank system // *The 14th World Conference on Earthquake Engineering*, Beijing, China, October 12-17, 2008. — P. 120–128.
- [17] *Lukovsky I.A.* Nonlinear Dynamics. Mathematical Models for Rigid Bodies with a Liquid. — De Gruyter, 2015. — 410 p.