

# Синхронізація хаосу у моделях енергосистем зі двома запізненнями при імпульсних збуреннях

*І. Л. Іванов*

*Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ;  
center@inmech.kiev.ua*

The problem of the chaotic synchronization of two identical models of a single-machine-infinite-bus power system (SMIB) under impulse perturbations and with two delayed controllers is considered. One of them regulates the chaos anticontrol, and the another one is responsible for synchronization. For this pair of power systems, the synchronization conditions are obtained and an exponential estimate for the norm of the error vector is found. The obtained results are numerically demonstrated.

Розглянуто задачу синхронізації хаотичного руху двох ідентичних моделей одномашинної енергосистеми з шинами нескінченної потужності (SMIB) при імпульсних збуреннях і зі двома регуляторами, кожен із яких містить запізнення. Один із цих регуляторів відповідає за генерування хаосу, а другий — за синхронізацію. Для такої пари енергосистем отримано умови синхронізації і знайдено експоненціальну оцінку щодо норми вектора помилки. Отримані умови продемонстровані чисельно.

## Вступ

Детермінований хаос є добре вивченим явищем у нелінійній динаміці і характерний для ряду систем популяційної біології, фізики, фінансової математики, біомедичної інженерії, електротехніки, хімії тощо [1, 2]. Він може спостерігатись у таких математичних моделях, як каскади, звичайні диференціальні рівняння, диференціальні рівняння з частинними похідними, а також диференціальні рівняння з запізненням або імпульсною дією [3]. У таких системах може ставитись як задача керування хаосом, що зазвичай означає усунення

хаосу, коли він шкідливий, так і задача генерування хаосу (хаотизації, chaos anticontrol — “антикерування хаосом”), якщо він бажаний [4, 5]. Значну увагу дослідників привертає проблема хаотизації електро-енергетичних систем [6] і синхронізації хаосу [7].

Дослідження моделей енергосистем за наявності імпульсної дії розпочалось лише нещодавно [8–11]. Імпульсний характер дії може спостерігатися внаслідок механічних збоїв у роботі генераторів, коротких замикань, грозових перенапруг [12] тощо, природа яких може бути як електричною, так і механічною. Добре вивченою є теорія рівнянь із імпульсною дією, потрібна для дослідження руху таких систем [13, 14], що була узагальнена і для рівнянь із запізненням [15].

Стаття має таку структуру. У розділі 1 сформульовано відомий результат для широкого класу рівнянь із запізненням та імпульсною дією, що буде використаний як допоміжний. У розділі 2 наведена постановка задачі синхронізації двох ідентичних енергосистем. У розділі 3 сформульовано основний результат із доведенням, який встановлює умови синхронізації енергосистем. У розділі 4 представлені чисельні дослідження отриманих у розділі 3 умов. У розділі 5 «висновки» підбиті підсумки роботи.

## 1 Допоміжний результат

Для довільної зв’язної множини  $\Omega \subset \mathbb{R}$  і  $n \in \mathbb{N}$  визначимо клас функцій  $PC^n(\Omega)$ , таких  $x : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ , що:

- (1)  $x$  неперервні зліва всюди на  $\Omega$ ;
- (2)  $x$  мають не більш, ніж зчисленну множину точок розриву першого роду.

Для  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$  введемо норму  $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$ , а для  $\varphi \in PC^n(\Omega)$  нехай  $\|\varphi\|_\Omega = \max_{t \in \Omega} \sqrt{\sum_{k=1}^n \varphi_k^2(t)}$ .

Сформулюємо спершу допоміжну теорему, яка буде використана при встановленні основного результату.

Розглянемо систему

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x_t), \quad t \neq t_k, \quad x(t_k^+) = I_k(x), \quad k \in \mathbb{N} \quad (1)$$

із початковими умовами

$$x(t) = \varphi_0(t), \quad t \in [-\tau, 0], \quad (2)$$

де  $x \in PC^n[-\tau, \infty)$ ,  $f : [-\tau, \infty) \times PC^n[-\tau, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$  — неперервна за першим аргументом і ліпшицева за другим,  $f(t, 0) = 0$ ,  $I_k : [-\tau, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$  — неперервна,  $I_k(0) = 0$ ,  $t_k \rightarrow \infty$ , коли  $k \rightarrow \infty$ . Тоді задача Коші (1), (2) має єдиний розв'язок на  $[-\tau, \infty)$ .

Нехай  $T = [-\tau, \infty) \setminus \{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ .

**Означення 1.1.** [14] Функція  $v(t, x)$  належить класу  $V_0$ , якщо:

- (1)  $v(t, x)$  неперервно диференційовна на  $T \times \mathbb{R}^n$ ;
- (2) існують границі

$$\lim_{t \rightarrow t_k - 0} v(t, x) = v(t_k, x), \quad \lim_{t \rightarrow t_k + 0} v(t, x) = v(t_k + 0, x)$$

при всіх  $k = 1, 2, \dots$

**Припущення 1.1.** Для функції  $v(t, x)$  існує функція  $a$  класу Хана, така, що виконується оцінка  $a(\|x\|) \leq v(t, x)$  при всіх  $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ .

**Теорема 1.1.** *Нехай для системи (1) існує функція  $v(t, x)$  класу  $V_0$ , що задовольняє умови припущення 3.1 при  $a(r) = r^m$ , і константа  $\gamma \in \mathbb{R}$ , такі, що:*

*$\frac{d}{dt} v(t, x(t))|_{(1)} \leq m\gamma v(t, x(t))$ , якщо  $v(t, x(t + \zeta)) \leq e^{-m\gamma\zeta} v(t, x(t))$  для  $\zeta \in [-\tau', 0]$  (умова Разуміхіна);*

$$v(t_k, x(t_k^+)) \leq v(t_k, x(t_k)).$$

*Тоді всі розв'язки системи (1) в околі нуля задовольняють оцінку*

$$\|x(t)\| \leq M e^{\gamma t}, \quad (3)$$

*де  $M > 0$  залежить лише від початкових умов, а при  $\gamma \leq 0$  нульовий розв'язок системи (1) є стійким.*

Доведення цієї теореми безпосередньо випливає з результату, встановленого у [15].

## 2 Постановка задачі

Розглянемо модель одномашинної електро-енергетичної системи з шинами нескінченної потужності (SMIB) при імпульсних збуреннях у термінах кута відхилення  $\theta$  від синхронної осі обертання у формі

$$\begin{aligned} M\ddot{\theta} + D\dot{\theta} + P_{\max} \sin \theta &= P_m + P_\tau, \quad t \neq t_k, \quad k \in \mathbb{N}, \\ \dot{\theta}(t_k^+) &= I(\theta(t_k), \dot{\theta}(t_k)), \quad k \in \mathbb{N}, \end{aligned} \quad (4)$$

де  $M$  — момент інерції,  $D$  — стала демпфування,  $P_{\max}$  — максимальна потужність генератора,  $P_m = A \sin wt$  — механічна потужність,  $P_\tau = r \sin(Rx_1(t - \tau_1))$  — керування з постійним запізненням величиною  $\tau_1$  (chaos anticontrol, “антикерування хаосом”),  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < \dots$ , такі, що для  $\delta > 0$  множина  $\{k \in \mathbb{N} | t_k - t_{k-1} < \delta\}$  не більш, ніж скінченна,  $I$  — лінійна за своїми аргументами функція, що відповідає за імпульсні збурення,  $A, w, r, R$  — сталі.

Систему (4) можна навести у формі

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -cx_2 - \beta \sin x_1 + f \sin wt + \varepsilon \sin(Rx_1(t - \tau_1)), \quad t \neq t_k, \quad k \in \mathbb{N}, \\ x_2(t_k^+) &= c_{k0} + c_{k1}x_1(t_k) + c_{k2}x_2(t_k), \quad k \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

де  $x_1 = \theta$ ,  $x_2 = \dot{\theta}$ ,  $c = \frac{D}{M}$ ,  $\beta = \frac{P_{\max}}{M}$ ,  $f = \frac{A}{M}$ ,  $\varepsilon = \frac{r}{M}$ . Нехай  $x(t) = [x_1(t) \quad x_2(t)]^T \in \mathbb{R}^2$ , тоді, беручи до уваги вихід  $y$ , отримаємо систему у векторній формі

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + f(x) + f_\tau(x(t - \tau_1)), \quad t \neq t_k, \quad k \in \mathbb{N}, \\ x(t_k^+) &= C_{k0} + C_k x(t_k), \quad k \in \mathbb{N}, \\ y &= Cx, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -c \end{bmatrix}, \quad f(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\beta \sin(x_1) + f \sin wt \end{bmatrix}, \\ f_\tau(x(t - \tau_1)) &= \begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon \sin(Rx_1(t - \tau_1)) \end{bmatrix}, \quad C_{k0} = \begin{bmatrix} 0 \\ c_{k0} \end{bmatrix}, \\ C_k &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c_{k1} & c_{k2} \end{bmatrix}, \quad C \in \mathbb{R}^{1 \times 2}. \end{aligned}$$

Розв’язок цієї системи розглядатимемо у класі  $PC^2[-\tau_1, \infty)$ .

Розглянемо дві енергосистеми з ідентичними параметрами. Потрібно отримати умови синхронізації для цих енергосистем при імпульсних збуреннях за допомогою регулятора зворотного зв’язку, що отримує дані з запізненням  $\tau_2 > 0$ . Для цього розглянемо дві системи: еталонну

$$\begin{aligned} \dot{x}_m &= Ax_m + f(x_m) + f_\tau(x_m(t - \tau_1)), \quad t \neq t_k, \quad k \in \mathbb{N}, \\ x_m(t_k^+) &= C_{k0} + C_k x_m(t_k), \quad k \in \mathbb{N}, \\ y_m(t) &= Cx_m(t - \tau_2) \end{aligned} \quad (5)$$

та керовану

$$\begin{aligned} \dot{x}_s &= Ax_s + f(x_s) + f_\tau(x_s(t - \tau_1)) + L(y_s - y_m), \quad t \neq t_k, \quad k \in \mathbb{N}, \\ x_s(t_k^+) &= C_{k0} + C_k x_s(t_k), \quad k \in \mathbb{N}, \\ y_s(t) &= C x_s(t - \tau_2), \end{aligned} \quad (6)$$

вектори стану в яких позначені як  $x_m$  і  $x_s$  відповідно. У цих системах  $C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$  — матриця підсилення виходу.  $L \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$  — вектор зв'язку, побудований для досягнення синхронізації між системами (5) і (6). Якщо визначити помилку синхронізації між системами (5) і (6) рівністю  $e = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} x_{s1} - x_{m1} & x_{s2} - x_{m2} \end{bmatrix}^T$ , то її динаміка задовольнятиме систему

$$\begin{aligned} \dot{e} &= Ae + f(x_s) - f(x_m) + \\ &+ f_\tau(x_s(t - \tau_1)) - f_\tau(x_m(t - \tau_1)) + LCe(t - \tau_2) = \\ &= (A + F(t))e(t) + F_\tau(t)e(t - \tau_1) + LCe(t - \tau_2), \quad t \neq t_k, \quad k \in \mathbb{N}, \\ e(t_k^+) &= C_k e(t_k), \quad k \in \mathbb{N}, \end{aligned} \quad (7)$$

де

$$\begin{aligned} F(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{-\beta(\sin x_{s1} - \sin x_{m1})}{x_{s1} - x_{m1}} & 0 \end{bmatrix}, \\ F_\tau(t) &= \varepsilon \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\sin(Rx_{s1}(t - \tau_1)) - \sin(Rx_{m1}(t - \tau_1))}{x_{s1}(t - \tau_1) - x_{m1}(t - \tau_1)} & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

За теоремою про середнє значення

$$\begin{aligned} \sin x_{s1} - \sin x_{m1} &= \cos \eta_1 \cdot (x_{s1} - x_{m1}), \\ \eta_1 &\in [x_{s1}, x_{m1}] \text{ або } [x_{m1}, x_{s1}] \end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned} \sin(Rx_{s1}(t - \tau_1)) - \sin(Rx_{m1}(t - \tau_1)) &= \\ &= R \cos \eta_2 \cdot (x_{s1}(t - \tau_1) - x_{m1}(t - \tau_1)), \\ \eta_2 &\in [x_{s1}(t - \tau_1), x_{m1}(t - \tau_1)] \text{ або } [x_{m1}(t - \tau_1), x_{s1}(t - \tau_1)]. \end{aligned}$$

Функції  $F(t)$  й  $F_\tau(t)$  тепер можна записати у формі

$$F(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\beta \cos \eta_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad F_\tau(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \varepsilon R \cos \eta_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Надалі покажемо, як вибором належного регулятора зворотного зв'язку можна досягнути синхронізації між системами (5) і (6), що

еквівалентно до виконання умови  $\|x_m(t) - x_s(t)\| \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$  за будь-яких початкових даних для цих систем.

Таким чином, досягнення синхронізації за допомогою регулятора зворотного зв'язку рівнозначне до вибору такої матриці зв'язку  $L$ , щоб тривіальний стан рівноваги системи (7) був асимптотично стійким.

### 3 Основний результат

Для формулювання основного результату введемо додаткові позначення.

Нехай  $a \in \mathbf{R}, b \in \mathbf{R}_+$ . Позначимо

$$\delta = \liminf_{k \rightarrow \infty} (t_{k+1} - t_k);$$

$$\begin{aligned} F_1 &= L_1 c_1 + a L_2 c_1; \\ F_2 &= L_1 c_2 + 1 + a(L_1 c_1 + L_2 c_2 - c) + b L_2 c_1; \\ F_3 &= a(L_1 c_2 + 1) + b(L_2 c_2 - c); \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \tilde{D} &= 4b^2(b - a^2)(\varepsilon R + \beta)^2 + \\ &+ 2|(b - a^2)(-2aF_3 + bF_2)|(\varepsilon R + \beta) + \\ &+ 4b^2F_1^2 + 4F_3^2 + 8(2a^2 - b)F_1F_3 + 4bF_2^2 - 8abF_1F_2 - 8aF_2F_3; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{bL_1^2c_1^2 + (L_1c_2 + 1)^2 - 2aL_1c_1(L_1c_2 + 1)}{b - a^2}; \\ \lambda_2 &= \frac{b(L_1 + aL_2)^2 + (aL_1 + bL_2)^2 - 2a(L_1 + aL_2)(aL_1 + bL_2)}{b - a^2}; \\ \lambda_3 &= \frac{b\beta^2c_2^2 + (c_1 - cc_2)^2 + 2a\beta c_2|c_1 - cc_2|}{b - a^2}; \\ \lambda_4 &= (L_1c_1 + L_2c_2)^2 \frac{bc_1^2 + c_2^2 - 2ac_1c_2}{b - a^2}; \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \lambda_5 &= \frac{2bF_1 + 2F_3 - 2aF_2 + \sqrt{\tilde{D}}}{2(b - a^2)}; \\ \lambda_{6k} &= c_2^2 \frac{bc_{k1}^2 + (c_{k2} - 1)^2 - 2ac_{k1}(c_{k2} - 1)}{b - a^2}, k \in \mathbf{N}; \\ \lambda_6 &= \sup_{k \in \mathbf{N}} \{\lambda_{6k}\}. \end{aligned} \quad (11)$$

**Теорема 3.1.** *Припустимо, що в системі (7) виконується нерівність  $2\tau_2 < \delta$ , а вектор керування  $L$  обрано такий, що при деяких  $a, \gamma \in \mathbf{R}, b, \nu \in \mathbf{R}_+$  виконуються умови*

$$(1) \quad b > a^2;$$

$$(2) \quad \nu - 2\gamma + \lambda_5 + 2\varepsilon R\sqrt{\lambda_1 b} \frac{e^{(\frac{\nu}{2}-\gamma)\tau_1}-1}{\frac{\nu}{2}-\gamma} + \sqrt{\lambda_2 \lambda_6} + \\ + 2\sqrt{\lambda_2}(\sqrt{\lambda_3} + e^{(\frac{\nu}{2}-\gamma)\tau_2} \sqrt{\lambda_4}) \frac{e^{(\frac{\nu}{2}-\gamma)\tau_2}-1}{\frac{\nu}{2}-\gamma} < 0;$$

$$(3) \quad (b - a^2)e^{2\nu\delta} + (-b(c_{k_2}^2 + 1) + 2abc_{k_1}(c_{k_2} - 1) - b^2c_{k_1}^2 + 2a^2c_{k_2})e^{\nu\delta} + \\ + (b - a^2)c_{k_2}^2 \geq 0;$$

$$(4) \quad (1 + b)e^{\nu\delta} \geq 1 + 2ac_{k_1} + b^2c_{k_1}^2 + bc_{k_2}^2.$$

Тоді при всіх  $t > 0$  розв'язки системи (7) допускають експоненціальну оцінку

$$\|e(t)\| \leq Me^{\gamma t},$$

де  $\|\cdot\|$  — евклідова норма в  $\mathbb{R}^2$ , а  $M > 0$  залежить лише від початкових умов.

*Доведення.* Нехай  $\delta_\mu = \delta - \mu$ , де  $\mu > 0$  — деякий параметр. Розглянемо систему (7) і допоміжну функцію для неї  $v_0(e)$  у формі

$$v_0(e) = e_1^2 + 2ae_1e_2 + be_2^2.$$

При  $\nu \geq 0$  побудуємо частково-експоненціальну функцію  $v(e)$ , що грає роль функції Ляпунова:

$$v(t, e) = v_0(e)e^{\nu(t-t_k)}, \quad t \in [t_k, t_{k+1}), \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad (12)$$

де  $t_0 = 0$ .

За виконання умови (1) теореми 3.1 функція  $v$  належить класові  $V_0$  і для неї виконуються умови припущення 3.1. Вимагатимемо виконання для цієї функції умов теореми 1.1 при  $m = 2$ . Їх можна записати у формі:

$$\left. \frac{dv(t, e(t))}{dt} \right|_{(6)} \leq 2\gamma v(t, e(t)), \quad t \neq t_k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (13)$$

якщо

$$v(t, e(t)) > e^{-2\gamma\zeta} v(t + \zeta, e(t + \zeta)), \quad \zeta \in [-2\tau_2, 0), \quad (14)$$

та

$$v(t_k + 0, e(t_k + 0)) \leq v(t_k, e(t_k)), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (15)$$

Підставляючи у (14) і (15) вираз (12) для функції  $v$ , з (13) отримаємо умови для функції  $v_0$  при  $t \in (t_k, t_{k+1})$  у формі:

$$\left. \frac{dv_0(t, e(t))}{dt} \right|_{(6)} \leq (2\gamma - \nu)v_0(t, e(t)), \quad t \neq t_k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (16)$$

якщо

$$\begin{cases} v_0(e(t)) > e^{(\nu-2\gamma)\zeta} v_0(e(t+\zeta)), \zeta \in [-2\tau_2, 0), \\ \text{при } t_k - t \notin [-2\tau_2, 0), \\ v_0(e(t)) > e^{-2\gamma\zeta + \nu(\zeta + \chi(t_k - t - \zeta)\Delta t_{k-1})} v_0(e(t+\zeta)), \zeta \in [-2\tau_2, 0), \\ \text{при } t_k - t \in [-2\tau_2, 0), \end{cases} \quad (17)$$

де  $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$ . Оскільки при будь-якому  $\mu > 0$  множина

$$\{\Delta t_k | \Delta t_k < \delta_\mu, k \in \mathbb{N}\}$$

скінченна, то при дослідженні стійкості умову (17) за довільного малого  $\mu > 0$  можна замінити на умову

$$\begin{cases} v_0(e(t)) > e^{(\nu-2\gamma)\zeta} v_0(e(t+\zeta)), \zeta \in [-2\tau_2, 0), \\ \text{при } t_k - t \notin [-2\tau_w, 0), \\ v_0(e(t)) > e^{-2\gamma\zeta + \nu(\zeta + \chi(t_k - t - \zeta)\delta_\mu)} v_0(e(t+\zeta)), \zeta \in [-2\tau_2, 0), \\ \text{при } t_k - t \in [-2\tau_2, 0), \end{cases} \quad (18)$$

з огляду на те, що на обмеженій множині

$$\{(t_{k-1}, t_k) | \Delta t_k < \delta_\mu, k \in \mathbb{N}\}$$

функція  $v_0(e(t))$  допускає експоненціальну оцінку за  $t$ .

Надалі для визначеності будемо вважати, що  $t_k \in [t - \tau_2, t)$ .

Позначимо

$$a_{11} = L_1 c_1; a_{12} = L_1 c_2 + 1; a_{21} = L_2 c_1; a_{22} = L_2 c_2 - c,$$

так, щоб  $A + LC = [a_{ij}]_{i,j=1,2}$ .

Тоді похідну функції  $v_0$  вздовж системи (7) можна записати у формі

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} v_0(t, e(t))|_{(6)} &= 2(a_{11} + a(a_{21} - \beta \cos \eta_1 + \varepsilon R \cos \eta_2))e_1^2 + 2(a_{12} + \\ &+ a(a_{11} + a_{22}) + b(a_{21} - \beta \cos \eta_1 + \varepsilon R \cos \eta_2))e_1 e_2 + 2(aa_{12} + ba_{22})e_2^2 - \\ &- 2\varepsilon R \cos \eta_2 (ae_1 + be_2)(e_1(t) - e_1(t - \tau_1)) + \\ &+ 2(c_1(e_1(t - \tau_2) - e_1(t)) + c_2(e_2(t - \tau_2) - e_2(t))) \times \\ &\times (e_1(L_1 + aL_2) + e_2(aL_1 + bL_2)). \end{aligned}$$



Згідно з теоремою Ньютона-Лейбніца для  $i = 1, 2$  отримаємо

$$\begin{aligned} e_1(t) &= e_1(t - \tau_i) + \int_{t-\tau_i}^t (e_2(s) + L_1 c_1 e_1(s - \tau_i) + L_1 c_2 e_2(s - \tau_i)) ds, \\ e_2(t) &= e_2(t - \tau_i) + \int_{t-\tau_i}^t (-\beta \cos \eta_1 e_1(s) - c e_2(s) + L_2 c_1 e_1(s - \tau_i) + \\ &+ L_2 c_2 e_2(s - \tau_i)) ds + \sum_{k=1}^{\infty} I_{[t-\tau_i, t)}(t_k) (c_{k1} e_1(t_k) + (c_{k2} - 1) e_2(t_k)), \end{aligned}$$

де  $I_{\Omega}(s)$  — індикатор.

Тому при  $t_k \in [t - \tau_2, t)$  похідну функції  $v_0$  вздовж системи (7) можна записати у формі

$$\frac{d}{dt} v_0(t, e(t))|_{(6)} = I - I_{c1} - I_{c2} - I_{\delta}$$

де

$$\begin{aligned} I &= 2(a_{11} + a(a_{21} - \beta \cos \eta_1 + \varepsilon R \cos \eta_2)) e_1^2 + 2(a_{12} + a(a_{11} + a_{22}) + \\ &+ b(a_{21} - \beta \cos \eta_1 + \varepsilon R \cos \eta_2)) e_1 e_2 + 2(a a_{12} + b a_{22}) e_2^2; \\ I_{c1} &= 2\varepsilon R \cos \eta_2 (a e_1 + b e_2) \int_{t-\tau_1}^t (a_{11} e_1(s) + a_{12} e_2(s)) ds; \\ I_{c2} &= 2(e_1(L_1 + a L_2) + e_2(a L_1 + b L_2)) \times \\ &\times \int_{t-\tau_2}^t (-\beta c_2 \cos \eta_1 e_1(s) + (c_1 - c c_2) e_2(s) + \\ &+ (L_1 c_1 + L_2 c_2)(c_1 e_1(s - \tau_2) + c_2 e_2(s - \tau_2))) ds; \\ I_{\delta} &= 2c_2(e_1(L_1 + a L_2) + e_2(a L_1 + b L_2))(c_{k1} e_1(t_k) + (c_{k2} - 1) e_2(t_k)). \end{aligned}$$

Відзначимо, що у випадку  $t_k \notin [t - \tau_2, t)$  у виразі для похідної від функції  $v_0$  не буде доданку  $I_{\delta}$ .

Оцінимо спершу вираз  $I_{c1}$ . Можна встановити, що правильними є співвідношення

$$(a_{11} e_1 + a_{12} e_2)^2 \leq \lambda_1 v_0, \quad (a e_1 + b e_2)^2 \leq b v_0,$$

де  $\lambda_1$  визначається виразом (10). Із урахуванням умови Разуміхіна отримуємо:

$$\begin{aligned} & \int_{t-\tau_1}^t (ae_1(s) + be_2(s)) ds \leq \int_{t-\tau_1}^t \sqrt{bv_0(s)} ds \leq \\ & \leq \int_{t-\tau_1}^t \sqrt{bv_0(t)} e^{-\gamma(t-s) + \frac{\nu}{2}(t-s - \delta_\mu \xi(t_k - s))} ds \leq \frac{e^{(\frac{\nu}{2} - \gamma)\tau_1} - 1}{\frac{\nu}{2} - \gamma} \sqrt{bv_0}. \end{aligned}$$

Відзначимо, що після означення при  $\nu - 2\gamma = 0$  значенням  $\tau_1$  функція  $\frac{e^{(\frac{\nu-2\gamma)\tau_1}-1}}{\nu-2\gamma}$  стає цілою функцією від всіх своїх аргументів, тому окремо розглядати випадок  $\nu - 2\gamma = 0$  потреби немає.

Отримуємо оцінку

$$|I_{c1}| \leq 2\varepsilon R \sqrt{\lambda_1 b} \frac{e^{(\frac{\nu}{2} - \gamma)\tau_1} - 1}{\frac{\nu}{2} - \gamma} v_0 \quad (19)$$

Оцінимо надалі доданок  $I_{c2}$ .

Для квадратичних форм можна довести такі співвідношення

$$\begin{aligned} & ((L_1 + aL_2)e_1 + (aL_1 + bL_2)e_2)^2 \leq \lambda_2 v_0, \\ & (-\beta c_2 \cos \eta_1 e_1 + (c_1 - cc_2)e_2)^2 \leq \lambda_3 v_0, \\ & (L_1 c_1 + L_2 c_2)^2 (c_1 e_1 + c_2 e_2)^2 \leq \lambda_4 v_0, \end{aligned}$$

де  $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  визначаються у (10).

Надалі з урахуванням умови Разуміхіна (18) отримуємо

$$\begin{aligned} & \int_{t-\tau_2}^t (-\beta c_2 \cos \eta_1 e_1(s) + (c_1 - cc_2)e_2(s)) ds \leq \frac{e^{(\frac{\nu}{2} - \gamma)\tau_2} - 1}{\frac{\nu}{2} - \gamma} \sqrt{\lambda_3 v_0}; \\ & \int_{t-\tau_2}^t (L_1 c_1 + L_2 c_2)(c_1 e_1(s - \tau_2) + c_2 e_2(s - \tau_2)) ds \leq \\ & \leq e^{(\frac{\nu}{2} - \gamma)\tau_2} \frac{e^{(\frac{\nu}{2} - \gamma)\tau_2} - 1}{\frac{\nu}{2} - \gamma} \sqrt{\lambda_4 v_0}. \end{aligned}$$

Отже, отримуємо оцінку

$$|I_{c2}| \leq 2\sqrt{\lambda_2}(\sqrt{\lambda_3} + e^{(\frac{\nu}{2} - \gamma)\tau_2} \sqrt{\lambda_4}) \frac{e^{(\frac{\nu}{2} - \gamma)\tau_2} - 1}{\frac{\nu}{2} - \gamma} v_0. \quad (20)$$

У випадку  $t_k \notin [t - \tau_2, t)$  отримуємо оцінку кращу, ніж нерівність (20), тому оцінка (20) виконується для загального випадку.

Оцінимо тепер вираз  $I$  через функцію  $v_0$ . Беручи до уваги константи, введені у (8), отримаємо характеристичне рівняння регулярної в'язки форм  $I - \lambda v_0$ :

$$\begin{vmatrix} 2F_1 - 2a\beta \cos \eta_1 + 2aR\varepsilon \cos \eta_2 - \lambda & F_2 - b\beta \cos \eta_1 + bR\varepsilon \cos \eta_2 - a\lambda \\ F_2 - b\beta \cos \eta_1 + bR\varepsilon \cos \eta_2 - a\lambda & 2F_3 - b\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Дискримінант цього квадратного рівняння визначається виразом (9). Верхня оцінка квадратичної форми визначається більшим коренем цього рівняння і має форму

$$I \leq \lambda_5 v_0, \quad (21)$$

де  $\lambda_5$  задано у (11).

Оцінимо, зрештою, вираз  $I_\delta$ . Можна показати, що діє оцінка

$$c_2^2 (c_{k1} e_1(t) + (c_{k2} - 1) e_2(t))^2 \leq \lambda_{6k} v_0,$$

де  $\lambda_{6k}$  визначається (11). У спосіб, аналогічний до випадку доданка  $I_c$ , з використанням нерівності Гьольдера і умови Разуміхіна, можна встановити, що

$$I_\delta \leq \sqrt{\lambda_2 \lambda_{6k}} e^{\frac{\nu}{2}(t-t_k-\delta_\varepsilon)} v_0(e(t)) \leq \sqrt{\lambda_2 \lambda_6} v_0(e(t)), \quad (22)$$

де  $\lambda_6$  задано в (11).

Із урахуванням отриманих оцінок (20)–(22) можна записати нерівність

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} v_0(t, e(t))|_{(6)} &\leq \left( \lambda_5 + 2\varepsilon R \sqrt{\lambda_1 b} \frac{e^{(\frac{\nu}{2}-\gamma)\tau_1} - 1}{\frac{\nu}{2} - \gamma} + \sqrt{\lambda_2 \lambda_6} + \right. \\ &\left. + 2\sqrt{\lambda_2} (\sqrt{\lambda_3} + e^{(\frac{\nu}{2}-\gamma)\tau_2} \sqrt{\lambda_4}) \frac{e^{(\frac{\nu}{2}-\gamma)\tau_2} - 1}{\frac{\nu}{2} - \gamma} \right) v_0(t). \end{aligned}$$

Умова (16) приводить до нерівності

$$\begin{aligned} &\lambda_5 + 2\varepsilon R \sqrt{\lambda_1 b} \frac{e^{(\frac{\nu}{2}-\gamma)\tau_1} - 1}{\frac{\nu}{2} - \gamma} + \sqrt{\lambda_2 \lambda_6} \\ &+ 2\sqrt{\lambda_2} (\sqrt{\lambda_3} + e^{(\frac{\nu}{2}-\gamma)\tau_2} \sqrt{\lambda_4}) \frac{e^{(\frac{\nu}{2}-\gamma)\tau_2} - 1}{\frac{\nu}{2} - \gamma} < -\nu + 2\gamma \end{aligned}$$

яка збігається з умовою (2) даної теореми.

Розглянемо умову (15). Виконання цієї умови при всіх  $k \in \mathbb{N}$ , окрім не більш ніж скінченного їхнього числа, буде досягнуте у випадку виконання умови

$$v_0(e(t_k + 0)) \leq e^{\nu\delta_\mu} v_0(e(t_k)), \quad k \in \mathbb{N},$$

що приводить до нерівності

$$\begin{aligned} e_1^2 + 2a(c_{ki1}e_1 + c_{ki2}e_2)e_1 + b(c_{k1}e_1 + c_{k2}e_2)^2 &\leq \\ &\leq e^{\nu\delta_\mu}(e_1^2 + 2ae_1e_2 + be_2^2). \end{aligned}$$

Об'єднуючи за  $\mu$  умови, що гарантують виконання даної нерівності між квадратичними формами, отримуємо умови (3) й (4) теореми.

Теорему доведено.  $\square$

## 4 Чисельні розрахунки

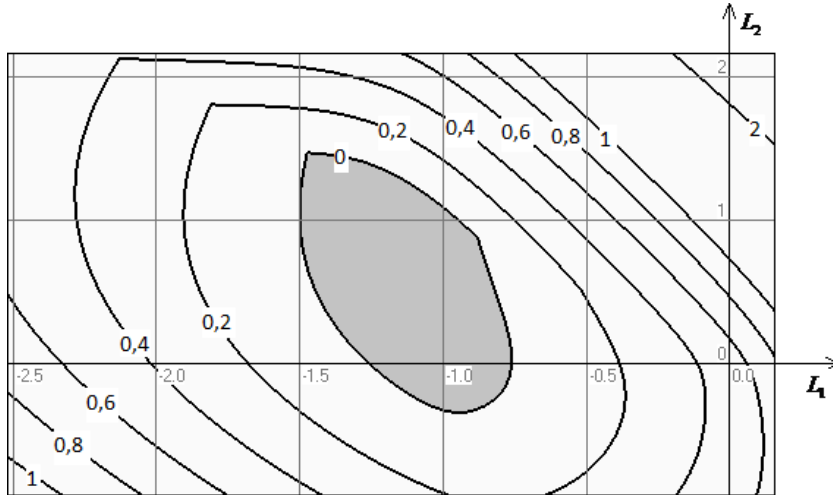
Пошук оцінки показника Ляпунова проведемо за допомогою методу Флетчера-Рівза за умови виконання рівності в умові (3) теореми 3.1. Оскільки цільова функція неявна, то процес оптимізації застосуємо до результату такого її монотонного перетворення, яке не порушує точки досягнення оптимуму.

Труднощі, пов'язані з вибором точки ініціації ітераційного процесу, в ряді випадків можна ефективно подолати шляхом повторення ітераційного процесу кількадесят разів для різних початкових точок.

На рис. 1 сірим кольором наведена оцінка області синхронізації систем (5) і (6) у просторі параметрів керування  $L_1, L_2$  при заданих параметрах вихідної системи  $c_1 = 1, c_2 = 1, c = 3, \delta = 1, \tau_1 = 0, 1, \tau_2 = 0, 2, \varepsilon R = 1, c_{k1} = 0, 2, c_{k2} = 1, k \in \mathbb{N}, \beta = 1$ . Також вказано показники експоненційної оцінки для вектора помилки.

Отримана оцінка області синхронізації менша, ніж у [9], де розглянуто аналогічну систему, але без запізнення у керуванні. При  $\tau_1 \rightarrow 0$  отримані результати неперервно переходять у результати, що були отримані у згаданій роботі.

У роботах [6] і [7] наведено приклади параметрів, за яких у системі (5) спостерігається хаос.



**Рис 1.** Оцінка області синхронізації деяких двох ідентичних енергосистем (див. у тексті) у просторі параметрів керування.

## 5 Висновки

Отримані результати узагальнюють результати, отримані у роботах [9] і [10], і є особливо ефективними у випадку невеликих величин запізнення в керуванні, типовому для енергосистем. Варто також зазначити, що хоча зі зростанням  $\tau_1$  оцінка області синхронізації зменшується, теорема 3.1 не обмежує  $\tau_1$  величиною  $\delta$ , на відміну від умови  $2\tau_2 < \delta$  на  $\tau_2$ .

Ці результати стосуються такого важливого класу енергосистем, як одномашинна енергосистема з шинами нескінченної потужності, який використовується при моделюванні енергосистем у випадку її великої потужності, порівняно з потужністю розглядуваної машини. Вони ілюструють вплив величини запізнення у керуванні на можливості синхронізації частин енергосистеми в умовах деяких постійних збурень і можуть бути враховані при проектуванні відповідних регуляторів.

- [1] *Chen G., Dong X.* From chaos to order. Methodologies, perspectives and applications. — Singapore : World Scientific, 1998. — 776 p.

- [2] *Кроновер Р. М.* Фракталы и хаос в динамических системах. — Москва : Постмаркет, 2000. — 352 с.
- [3] *Sprott J. C.* Chaos and time-series analysis. — Oxford : Oxford University Press, 2003. — 507 p.
- [4] *Kapitaniak T.* Controlling chaotic oscillations without feedback // Chaos, Solitons & Fractals. — 1992. — Vol. 2. — P. 519–530.
- [5] *Wang T. F., Chen G., Yu X.* Anticontrol of chaos in continuous-time systems via time-delay feedback // Chaos. — 2000. — Vol. 10. — P. 771–779.
- [6] *Chen H.-K., Lin T.-N., Chen J.-H.* Dynamic analysis, controlling chaos and chaotification of a SMIB power system // Chaos, Solitons & Fractals. — 2005. — **24**, 5. — P. 1307–1315.
- [7] *Shahverdiev E. M., Hashimova L. H., Hashimova N. T.* Chaos synchronization in some power systems // Chaos, Solitons & Fractals. — 2008. — **37**, 3. — P. 829–834.
- [8] *Иванов И. Л.* Устойчивость одной модели энергосистемы с запаздыванием и импульсным воздействием // Аналітична механіка та її застосування: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2012. — **9**, 1. — P. 114–127.
- [9] *Иванов И. Л., Мартынюк А. А.* Синхронизация хаоса в модели энергосистемы при импульсных возмущениях с помощью регулятора с запаздыванием // Электронное моделирование. — 2017. — **39**, 6. — P. 15–32.
- [10] *Ivanov I. L.* Chaotic Synchronization in Models of Impulsive Power Systems with Delay // International Applied Mechanics. — 2018. — **54**, 1. — P. 94–103.
- [11] *Zhu L., Qiu J., Chadli M.* Modelling and stability analysis of switching impulsive power systems with multiple equilibria // International Journal of Systems Science. — 2017. — **48**, 16. — P. 3470–3490.
- [12] *Berger K., Anderson R. B., Kroninger H.* Parameters of lightning flashes // Electra — 1975. — Vol. 41. — P. 23–37.
- [13] *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. — К. : Вища шк., 1987. — 288 с.
- [14] *Bainov D. D., Lakshmikanthan V., Simenov P. S.* Theory of impulsive differential equations. — Singapore : World Scientific, 1989. — 273 p.
- [15] *Stamova I.* Stability analysis of impulsive functional differential equations. Vol. 52. — Walter de Gruyter, 2009. — 230 p.