Збірник праць Інституту математики НАН України 2019, т. 16, № 2, 16–23

УДК 517.983.27

Узагальнені моментні зображення та апроксиманти типу Паде деяких базисних гіпергеометричних рядів двох змінних

А. П. Голуб, І. С. Тетерук

Інститут математики НАН України, Київ;
golub@imath.kiev.ua, moroz@imath.kiev.ua

The exact expressions of simultaneous Pade approximants for the basic hypergeometric series of two variables are derived.

Знайдено явний вигляд для сумісних апроксимант Паде базисних гіпергеометричних рядів двох змінних.

Метод узагальнених моментних зображень [1], який запропонував В.К. Дзядик у 1981 р., дав можливість з єдиних позицій будувати та досліджувати раціональні апроксиманти Паде і їхнє узагальнення для багатьох класів спеціальних функцій [2].

Означення 1 [1]. Для числової послідовності $\{s_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ діє узагальнене моментне зображення на декартовому добутку лінійних просторів $\mathcal{X}$ і $\mathcal{Y}$ за означеною на цьому добутку білінійною формою $\langle\cdot,\cdot\rangle$, якщо у просторі $\mathcal{X}$ вказано послідовність елементів $\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$, а у просторі $\mathcal{Y}$ — послідовність елементів $\{y_j\}_{j\in\mathbb{Z}_+}$, таких, що

$$s_{k+j} = \langle x_k, y_j\rangle, \qquad k,j\in\mathbb{Z}_+. \tag{1}$$

Якщо простори $\mathcal{X}$ і $\mathcal{Y}$ є нормованими, білінійна форма є нарізно неперервною й існує обмежений лінійний оператор $A:\mathcal{X}\to\mathcal{X}$, такий, що

$$Ax_k = x_{k+1}, \qquad k\in\mathbb{Z}_+,$$

а у просторі $\mathcal{Y}$ існує оператор A^*, спряжений до A відносно білінійної форми $\langle \cdot, \cdot \rangle$, в тому сенсі, що

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^* y\rangle \qquad \forall x \in \mathcal{X}, \quad y \in \mathcal{Y}$$

узагальнене моментне зображення (1) еквівалентне до зображення

$$s_k = \langle A^k x_0, y_0\rangle, k \in \mathbb{Z}_+. \tag{2}$$

Зокрема, в [3] були досліджені узагальнені моментні зображення з оператором дробово-лінійного перетворення незалежної змінної

$$(A\varphi)(t) = \varphi\left(\frac{t}{(1-q)t + q}\right). \tag{3}$$

Цей оператор при $q \in (0, +\infty)\backslash\{1\}$ відображає простір $\mathcal{X} = C[0,1]$ сам у себе. На цій основі в [4] були побудовані апроксиманти Паде базисних гіпергеометричних рядів типу

$$\tilde{f}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{1+\varepsilon q^k} = \frac{1}{1+\varepsilon} {}_2\phi_1 \left[\begin{matrix} q; -\varepsilon \\ -\varepsilon q \end{matrix} ; q; z \right], \qquad 0 < \varepsilon < \infty, \tag{4}$$

де

$${}_2\phi_1 \left[\begin{matrix} a; b \\ c \end{matrix} ; q; z \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a,q)_k (b,q)_k}{(c,q)_k (q,q)_k} z^k, \tag{5}$$

а q — символ Похгаммера $(a;q)_k, k \in \mathbb{Z}_+$, визначається співвідношенням

$$(a,q)_k = \begin{cases} 1, \ k = 0 \\ (1-a)(1-aq) \cdot \dots \cdot (1-aq^{k-1}), \ k \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{6}$$

Побудовані у [3] узагальнені мометні зображення для послідовності $\{\widetilde{s}_k\}_{k=0}^{\infty}$

$$\widetilde{s}_k = \frac{1}{1+\varepsilon q^k}, \ k \in \mathbb{Z}_+,$$

мають форму

$$\widetilde{s}_{k+j} = \langle \widetilde{x}_k, \widetilde{y}_j \rangle = \widetilde{y}_j \left(\widetilde{x}_k\right), \ k, j \in \mathbb{Z}_+,$$

де неперервні функції $\widetilde{x}_(t)$, $k \in \mathbb{Z}_+$ мають форму

$$\widetilde{x}_k(t) = \left(A^k x_0\right)(t) = \frac{t}{(1-\delta q^k)t + \delta q^k},\ k \in \mathbb{Z}_+,$$

а неперервні функціонали $\widetilde{y}_j$, $j \in \mathbb{Z}_+$ визначаються співвідношеннями

$$\widetilde{y}_j(x) = \left(A^{\star j}\widetilde{y}_0\right)(x) = x\left(t_j\right) = x\left(\frac{t_0}{(1-q^j)\,t_0 + q^j}\right),$$

де $t_0 \in (0,1)$, $\delta \in (0,+\infty)$, $\varepsilon = \dfrac{\delta\,(1-t_0)}{t_0}$.

У [4] були побудовані нетривіальні біортргональні поліноми $\widetilde{Y}_N$, $N \in \mathbb{Z}_+$ вигляду

$$\widetilde{Y}_N = \sum_{j=0}^{N} \widetilde{c}_j^{(N)} \widetilde{y}_j,$$

такі, що

$$\widetilde{Y}_N\left(\widetilde{x}_k\right) = 0,\ k = 0,1,\ldots,N-1,$$

а саме, для коефіцієнтів $\widetilde{c}_j^{(N)}$, $j = 0,1,\ldots,N$ з точністю до постійного множника знайдено вирази

$$\widetilde{c}_j^{(N)} = (-1)^{N-j}\frac{(-\varepsilon;q)_{N+j}}{(-\varepsilon;q)_j q^{(2N-j-1)j/2}(q;q)_j(q;q)_{N-j}},\ j = 0,1,\ldots,N.$$

У [6] метод узагальнених моментних зображень було поширено на випадок двовимірних послідовностей.

Означення 2. Для двовимірної числової послідовності $\{s_{k,m}\}_{(k,m)\in\mathbb{Z}_+^2}$ має місце двовимірне узагальнене моментне зображення на $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ за білінійною формою $\langle\cdot,\cdot\rangle$, якщо вказано двовимірні послідовності $\{x_{k,m}\}_{k,m\in\mathbb{Z}_+} \subset \mathcal{X}$ і $\{y_{j,n}\}_{j,n\in\mathbb{Z}_+} \subset \mathcal{Y}$ такі, що

$$s_{k+j,m+n} = \langle x_{k,m}, y_{j,n}\rangle, k,m,j,n \in \mathbb{Z}_+. \tag{7}$$

Знову ж таки, якщо простори $\mathcal{X}$ і $\mathcal{Y}$ нормовані, білінійна форма $\langle\cdot,\cdot\rangle$ нарізно неперервна і існують обмежені лінійні оператори $A, B\colon\ \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, що комутують між собою, і такі, що

$$Ax_{k,m} = x_{k+1,m}, (k,m) \in \mathbb{Z}_+,$$
$$Bx_{k,m} = x_{k,m+1}, (k,m) \in \mathbb{Z}_+,$$

а у просторі $\mathcal{Y}$ існують оператори A^* і B^*, спряжені до операторів A і B відповідно відносно білінійної форми $\langle\cdot,\cdot\rangle$, то зображення (7) еквівалентне до зображення

$$s_{k,m} = \langle A^k B^m x_{0,0}, y_{0,0}\rangle, (k,m) \in \mathbb{Z}_+. \tag{8}$$

Також у [6] було встановлено наступний результат.

Теорема 1. *Нехай формальний степеневий ряд має вигляд*

$$f(z,w) = \sum_{(k,m)\in\mathbb{Z}_+^2} s_{k,m} z^k w^m, \tag{9}$$

і для двовимірної числової послідовності $\{s_{k,m}\}_{(k,m)\in\mathbb{Z}_+^2}$ *має місце узагальнене моментне зображення вигляду (11). Якщо при цьому при деяких* $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ *існує узагальнений поліном*

$$Y_{N_1,N_2} = \sum_{j=0}^{N_1}\sum_{n=0}^{N_2} c_{j,n}^{(N_1,N_2)} y_{j,n},\ c_{N_1,N_2}^{(N_1,N_2)} \neq 0,$$

такий, що виконуються умови біортогональності

$$\langle x_{k,m}, Y_{N_1,N_2}\rangle = 0$$

при $(k,m) \in \mathcal{H} \subset \mathbb{Z}_+^2$, $|\mathcal{H}| = (N_1+1)(N_2+1)-1$, *і для множини* $\mathcal{H}$ *виконуєтся властивість включення (inclusion property):*

$$\forall (k,m) \in \mathcal{H}\ \forall k_1 \le k\ \forall m_1 \le m\ (k_1,m_1) \in \mathcal{H}$$

(див. [7]), то раціональна функція

$$[\mathcal{N}/\mathcal{D}]_f\,(z,w) = \frac{P_{\mathcal{N}}(z,w)}{Q_{\mathcal{D}}(z,w)},$$

де

$$Q_{\mathcal{D}}(z,w) = \sum_{j=0}^{N_1}\sum_{n=0}^{N_2} c_{N_1-j,N_2-n}^{(N_1,N_2)} z^j w^n,$$

$$P_{\mathcal{N}}(z,w) = \sum_{k=0}^{N_1-1}\sum_{m=0}^{N_2-1} z^k w^m \sum_{j=0}^{k}\sum_{n=0}^{m} c_{N_1-j,N_2-n}^{(N_1,N_2)} s_{k-j,m-n} +$$

$$+z^{N_1}\sum_{m=0}^{N_2-1}\sum_{k=0}^{\varphi(m)} z^k w^m \sum_{j=0}^{N_1}\sum_{n=0}^{m} c_{j,N_2-n}^{(N_1,N_2)} s_{k+j,m-n}+$$

$$+w^{N_2}\sum_{k=0}^{N_1-1}\sum_{m=0}^{\psi(k)} z^k w^m \sum_{j=0}^{k}\sum_{n=0}^{N_2} c_{N_1-j,n}^{(N_1,N_2)} s_{k-j,m+n},$$

де $\varphi : [0, N_2 - 1] \to \mathbb{Z}_+$, $\psi : [0, N_1 - 1] \to \mathbb{Z}_+$, *матиме розклад у степеневий ряд, коефіцієнти якого збігатимуться з коефіцієнтами ряду (13) для всіх*

$$\begin{aligned}(j,n) \in \mathcal{E} = \{(j,n) :\ & j \in [0, N_1 - 1],\ n \in [0, N_2 + \psi(j)]\} \\ \bigcup \{(j,n) :\ & n \in [0, N_2 - 1],\ j \in [0, N_1 + \varphi(n)]\} \\ \bigcup \{(j,n) :\ & (j - N_1, n - N_2) \in \mathcal{H}\}\,.\end{aligned}$$

У випадку, коли для послідовності $\{s_{k,m}\}_{(k,m)\in\mathbb{Z}_+^2}$ має місце зображення вигляду (9) зі співпадаючими операторами $A = B : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, функція зображувана рядом (9), матиме вигляд

$$f(z,w) = \frac{w\widetilde{f}(w) - z\widetilde{f}(z)}{w - z}. \tag{10}$$

Функції такого вигляду називають псевдодвовимірними (див. [7]). Припустимо, що для послідовності

$$\{\tilde{s}_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}, \qquad \tilde{s}_k = \langle A^k x_{0,0}, y_{0,0}\rangle, k \in \mathbb{Z}_+$$

виконується умова:

$$\forall N \in \mathbb{N} \qquad \exists \qquad \tilde{Y}_N = \sum_{j=0}^{N} \tilde{c}_j^{(N)} \tilde{y}_j = \sum_{j=0}^{N} \tilde{c}_j^{(N)} A^{*j} y_{0,0}, \qquad \tilde{c}_N^{(N)} \neq 0, \tag{11}$$

і

$$\langle \tilde{x}_k, \tilde{Y}_N\rangle = \langle A^k x_{0,0}, Y_N\rangle = 0 \qquad \forall k = 0, 1, ..., N-1. \tag{12}$$

Ця умова, як відомо з [1], дає можливість будувати апроксиманти Паде порядків $[N-1/N]$ функції $\tilde{f}$. У такому разі має місце наступний результат, що є певним узагальненням теореми 2 з [6].

Теорема 2. *Для аналітичної функції двох змінних f, що має зображення (10) за виконання умови (11), раціональні функції*

$$[\mathcal{N}/\mathcal{D}]_f(z,w) = \frac{P_{\mathcal{N}}(z,w)}{Q_{\mathcal{D}}(z,w)} \tag{13}$$

такі, що

$$Q_{\mathcal{D}}(z,w) = \sum_{j=0}^{N}\sum_{n=0}^{N} c_{N-j,N-n}^{(N,N)} z^j w^n, \tag{14}$$

$$P_{\mathcal{N}}(z,w) = \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} z^k w^m \sum_{j=0}^{k}\sum_{n=0}^{m} c_{N-j,N-n}^{(N,N)} s_{k-j,m-n} +$$

$$+ z^N \sum_{m=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{3N-1-m} z^k w^m \sum_{j=0}^{N}\sum_{n=0}^{m} c_{j,N-n}^{(N,N)} s_{k+j,m-n} +$$

$$+ w^N \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{3N-1-k} z^k w^m \sum_{j=0}^{k}\sum_{n=0}^{N} c_{N-j,n}^{(N,N)} s_{k-j,m+n} \tag{15}$$

а коефіцієнти $c_{k,m}^{(N,N)}, k,m = \overline{0,N}$ задовольняють рівності

$$\sum_{k=0}^{N}\sum_{m=0}^{N} c_{k,m}^{(N,N)} y_{k,m} = \sum_{j=0}^{2N} \tilde{c}_j^{(2N)} \tilde{y}_j = \tilde{Y}_N \tag{16}$$

і матимуть розклади в степеневі ряди, коефіцієнти яких збігатимуться з коефіцієнтами ряду (10) для функції f для всіх

$$(j,n) \in \mathcal{E} = \{(j,n) \in \mathbb{Z}_+^2, j+n \leq 4N-1\}.$$

Рівності (16) не дають змоги визначити коефіцієнти $c_{k,m}^{(N,N)}, k,m = \overline{0,N}$ однозначно. Тому, як і в [6], розглянемо окремі варіанти визначення цих коефіцієнтів.

Варіант (a).

$$c_{k,m}^{(N,N)} = \begin{cases} \frac{1}{k+m+1}\tilde{c}_{k+m}^{(2N)}, & k+m \le N \\ \frac{1}{2N-k-m+1}\tilde{c}_{k+m}^{(2N)}, & k+m > N \end{cases} \tag{17}$$

Варіант (b).

$$c_{k,m}^{(N,N)} = \begin{cases} \tilde{c}_0^{(2N)}, & (k,m) = (0,0) \\ \tilde{c}_{2N}^{(2N)}, & (k,m) = (N,N) \\ 0, & k \ne 0, N \vee m \ne 0, N \\ \frac{1}{2}\tilde{c}_k^{(2N)}, & k = \overline{1, N-1}, m = 0 \\ \frac{1}{2}\tilde{c}_{N+m}^{(2N)}, & m = \overline{0, N-1}, k = N \\ \frac{1}{2}\tilde{c}_m^{(2N)}, & m = \overline{1, N-1}, k = 0 \\ \frac{1}{2}\tilde{c}_{N+k}^{(2N)}, & k = \overline{0, N-1}, m = N \end{cases} \tag{18}$$

Варіант (c).

$$c_{k,m}^{(N,N)} = \begin{cases} \frac{1}{2^{k+m}}\binom{k+m}{k}\tilde{c}_{k+m}^{(2N)}, & k+m \le N \\ \frac{1}{2^{2N-k-m}}\binom{2N-k-m}{N-k}\tilde{c}_{k+m}^{(2N)}, & k+m > N \end{cases} \tag{19}$$

Неважко помітити, що твердження теореми 2 буде правильним, зокрема, у випадку, коли оператор A має вигляд (3). Як наслідок отримаємо наступний результат.

Теорема 3. *Для аналітичної функції двох змінних, зображуваної у вигляді*

$$f(z,w) = \frac{w\tilde{f}(w) - z\tilde{f}(z)}{w-z},$$

де $\tilde{f}$ має вигляд (4), раціональна функція

$$[\mathcal{N}/\mathcal{D}]_f(z,w)$$

вигляду (13)–(15), де коефіцієнти $c_{k,m}^{(N,N)}$, $k,m = \overline{0,N}$ задовольняють рівності

$$\sum_{k=0}^{N}\sum_{m=0}^{N} c_{k,m}^{(N,N)}\tilde{y}_{k+m} = \sum_{j=0}^{2N}(-1)^j \frac{(-\varepsilon;q)_{2N+j}}{(-\varepsilon;q)_j q^{(4N-j-1)j/2}(q;q)_j(q;q)_{2N-j}}\tilde{y}_j,$$

а

$$s_{k,m} = \tilde{s}_{k+m} = \frac{1}{1+\varepsilon} \cdot \frac{1}{1 - \varepsilon q^{k+m}},$$

матиме розклад в степеневий ряд, коефіцієнти якого збігатимуться з коефіцієнтами розкладу функції f для всіх

$$(j,n) \in \mathcal{E} = \left\{(j,n) \in \mathbb{Z}_+^2 : \ j+n \leq 4N-1\right\}.$$

[1] *Дзядик В.К.* Про узагальнення проблеми моментів// Доп. АН УРСР. — 1981. — № 6. — С. 8–12.

[2] *Голуб А.П.* Узагальнені моментні зображення та апроксимації Паде. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2002. — 222 с.

[3] *Golub A.P.* Generalized moment representations and Pade' approximants associated with bilinear transformations // Укр. мат. журн. — 2002. — **54**, № 5. — С. 335 — 339.

[4] *Голуб А.П., Гаврилюк Н.М.* Апроксиманти Паде рядів, пов'язаних з дробово-лінійними перетвореннями // Теорія наближення функцій та суміжні питання. Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2014. — **11,** № 3. — С. 71–77.

[5] *Гаспер Дж., Рахман М.* Базисные гипергеометрические ряды. — М.: Мир. 1993. — 349 с.

[6] *Голуб А.П., Чернецька Л.О.* Двовимірні узагальнені моментні зображення та раціональні апроксимації функцій двох змінних // Укр. мат. журн. — 2013. — **65**, 8. — С. 1035 — 1058.

[7] *Cuyt A., Tan J., Zhou P.* General order multivariate Padé approximants for pseudo—multivariate functions // Mathematics of Computation. — 2006. — **75**, 254, P.727–747.