Збірник праць Інститугу математики НАН України 2019, т. 16, № 2, 7–15

УДК 519.6

Метод без насичення точності розв'язування нелокальної багатоточкової задачі для еволюційного рівняння першого порядку в банаховому просторі *

В. Б. Василик, Д. О. Ситник, Н. О. Комащенко

Інститут математики НАН України, Київ;
vasylyk@imath.kiev.ua, sytnik@imath.kiev.ua

A method without accuracy saturation is developed to solve a nonlocal multipoint problem for first-order evolutionary differential equation with an unbounded operator coefficient in Banach space. The method is based on the application of collocations at the Chebyshev nodes to the integral equation generated by this problem.

Розроблено метод без насичення точності для розв'язування нелокальної багатоточкової задачі для еволюційного диференціального рівняння першого порядку з необмеженим операторним коефіцієнтом у банаховому просторі. Метод базується на застосуванні колокацій за вузлами Чебишева до інтегрального рівняння, що породжується цією задачею.

1 Вступ

Розглянемо багатоточкову нелокальну задачу для еволюційного рівняння першого порядку

$$\begin{aligned} &\frac{du(t)}{dt} + A_1(t)u(t) = f_1(t), \\ &u(0) + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u(t_i) = \varphi, \end{aligned} \tag{1}$$

*Робота виконана за часткової підтримки НДР № 0117U004077.

де $A_1(t) = A_1 + V_1(t)$ – секторіальний оператор із областю визначення $D(A)$, що не залежить від t в банаховому просторі, X, $V_1(t)$ – обмежений оператор, φ – заданий вектор, а $f_1(t)$ – задана векторнозначна функція, $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_m = T$. Відзначимо, що оператори A_1 і $V_1(t)$ можуть бути некомутативними. Для A_1 існує невід'ємна стала M_R, незалежна від t, така, що на границі сектора $\Sigma_\varphi = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq arg(z) \leq \varphi, \varphi \in (0, \pi/2)\}$ і за його межами виконується оцінка:

$$\|(zI - A_1)^{-1}\| \leq \frac{M_R}{1 + |z|}. \tag{2}$$

З цього припущення випливає, що існує невід'ємна стала c_κ, така, що (див. [1], с.103)

$$\|A_1 e^{-sA_1}\| \leq c_\kappa s^{-\kappa}, \quad s > 0, \quad \kappa \geq 0. \tag{3}$$

Припустимо також, що $\exists\ \omega > 0$:

$$\|e^{-sA_1}\| \leq e^{-\omega s} \quad \forall s,\ t \in [0, T] \tag{4}$$

(див. [2], Corollary 3.8, с.12). Нехай для $V_1(t)$ виконується оцінка

$$\|V_1(t) - V_1(s)\| \leq L_1 |t - s| \quad \forall t,\ s \in [0, T], \tag{5}$$

векторно-значна функція $f_1(t)$ нерозривна:

$$f_1(t) \in C(0, 1; X). \tag{6}$$

Метою цієї роботи є побудова наближення без насичення точності розв'язку задачі (1).

2 Існування і єдиність розв'язку

Відомо, що для $\alpha_i = 0$, $i = \overline{1, n}$ задача (1) має єдиний розв'язок при виконанні умов (2)-(6) (див. напр. [2, 3]). Цей розв'язок можна записаний як:

$$u(t) = U(t, 0)u(0) + \int_0^t U(t, s) f_1(s) ds = U(t, 0)\varphi + \int_0^t U(t, s) f_1(s) ds, \tag{7}$$

де $U(t, s)$ – еволюційний оператор, що відповідає (1).

Вивчимо умови, при яких існує єдиний розв'язок задачі (1). З (7) маємо

$$u(t_i) = U(1,0)u(0) + \int_0^{t_i} U(t_i, s) f_1(s) ds.$$

Тоді, з нелокальної умови, отримаємо

$$u(0) = \varphi - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u(t_i) = \varphi - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i U(t_i, 0) u(0) - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \int_0^{t_i} U(t_i, s) f_1(s) ds$$

$$u(0) = \left[I + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i U(t_i, 0) \right]^{-1} \left[\varphi - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \int_0^{t_i} U(t_i, s) f_1(s) ds \right],$$

якщо існує $[I + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i U(t_i, 0)]^{-1}$. Тоді, підставляючи значення для $u(0)$ в зображення розв'язку, отримаємо

$$\begin{aligned} u(t) =& U(t,0) \left[I + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i U(t_i, 0) \right]^{-1} \left[\varphi - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \int_0^{t_i} U(t_i, s) f_1(s) ds \right] \\ &+ \int_0^{t} U(t, s) f_1(s) ds. \end{aligned}$$

Звідси видно, що розв'язок існуватиме, якщо існує

$$\left[I + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i U(t_i, 0) \right]^{-1}.$$

Використовуючи оцінку для $U(t,s)$ (див. [2, 4]), маємо

$$\begin{aligned} \left\| \left[I + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i U(t_i, 0) \right]^{-1} \right\| &\leq \left[1 - \sum_{i=1}^{m} |\alpha_i| \, \|U(t_i, 0)\| \right]^{-1} \\ &\leq \left[1 - \sum_{i=1}^{m} |\alpha_i| M \right]^{-1}. \end{aligned}$$

Отже, достатньою умовою існування розв'язку задачі (1) є

$$\sum_{i=1}^{m} |\alpha_i| \leq M^{-1}. \tag{8}$$

3 Чисельний метод

Для побудови чисельного наближення для (1) використаємо техніку, побудовану у [5] і [6]. Спочатку замінимо змінну в (1) за допомогою $t \to \frac{T}{2}(t+1)$ і для $v(t) = u\left(\frac{T}{2}(t+1)\right)$ маємо

$$\begin{aligned} &\frac{dv(t)}{dt} + A(t)v(t) = f(t), \\ &v(-1) + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v(s_i) = \varphi, \end{aligned} \tag{9}$$

де $A(t) = A + V(t) = \frac{T}{2}A_1\left(\frac{T}{2}(t+1)\right) = \frac{T}{2}A_1 + \frac{T}{2}V_1\left(\frac{T}{2}(t+1)\right)$, $f(t) = \frac{T}{2}f_1\left(\frac{T}{2}(t+1)\right)$, $s_i = \frac{T}{2}(t_i+1)$, $i = \overline{1,n}$.

Оберемо сітку $\omega_n = \{t_k,\ k = 0,...,n\}$ із $n+1$ точки на $[-1,1]$, що є вузлами Чебишева-Гауса-Лобато $t_k = -\cos\left(\frac{k}{n}\pi\right)$ і нехай $\tau_k = t_k - t_{k-1}$.

Перепишемо задачу (9) в еквівалентній формі

$$\begin{aligned} &\frac{dv}{dt} + Av = V(t)v(t) + f(t), \quad t \in (-1,1), \\ &v(-1) + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v(s_i) = \varphi. \end{aligned} \tag{10}$$

Відзначимо, що зараз оператор зліва в цьому рівнянні сталий. Ми можемо записати еквівалентну до (10) систему інтегральних рівнянь

$$\begin{aligned} v(t) =& e^{-A(t-t_{k-1})}v(t_{k-1}) + \int_{t_{k-1}}^{t} e^{-A(t-s)}V(s)v(s)ds + \\ &+ \int_{t_{k-1}}^{t} e^{-A(t-s)}f(s)ds, \quad t \in [t_{k-1}, t_k]. \end{aligned} \tag{11}$$

Нехай

$$P_n(t;v) = P_n v = \sum_{j=0}^{n} v(t_j)L_{j,n}(t)$$

це інтерполяційний поліном для $v(t)$ на сітці ω_n, $x = (x_0,...,x_n)$, $x_i \in X$ для заданого вектора

$$P_n(t;y) = P_n x = \sum_{j=0}^{n} x_j L_{j,n}(t)$$

є інтерполяційним поліномом, де $L_{j,n}(t)$ – фундаментальні поліноми Лагранжа. Підставляючи $P_n(s;x)$ замість $v(s)$, x_k замість $v(t_k)$ і далі підставивши $t = t_k$ в (11), ми отримаємо таку систему лінійних рівнянь щодо невідомих x_k :

$$\begin{aligned} &x_0 + \sum_{j=0}^{n} b_j x_j = \varphi, \\ &x_k = \mathrm{e}^{-A(t_k+1)} x_{k-1} + \sum_{j=0}^{n} \alpha_{kj} x_j + \phi_k, \quad k = \overline{1,n}, \end{aligned} \tag{12}$$

що подає наш алгоритм. Тут ми використали позначення

$$\alpha_{kj} = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathrm{e}^{-A(t_k-s)} V(s) L_{j,n}(s) ds,$$

$$\phi_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathrm{e}^{-A(t_k-s)} f(s) ds, \quad k = \overline{1,n}, \quad j = \overline{0,n},$$

$$b_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i L_{j,n}(s_i), \quad j = \overline{0,n}$$

і припускаємо, що маємо метод для обчислення цих коефіцієнтів.

Для похибки $z = (z_0, ..., z_n)$, де $z_k = v(t_k) - x_k$, маємо співвідношення

$$\begin{aligned} &z_0 + \sum_{j=0}^{n} b_j z_j = \Psi_0, \\ &z_k = \mathrm{e}^{-A\tau_k} z_{k-1} + \sum_{j=0}^{n} \alpha_{kj} z_j + \psi_k, \quad k = \overline{1,n}, \end{aligned} \tag{13}$$

де

$$\Psi_0 = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \left[P_n(s_i, v) - v(s_i) \right],$$

$$\psi_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathrm{e}^{-A(t_k-s)} [V_k - V(s)][v(s) - P_n(s;v)] ds, \quad k = \overline{1,n}.$$

Для запису (12) у блочно-матричній формі, введемо матрицю

$$S = \begin{pmatrix} I(1+b_0) & Ib_1 & Ib_2 & \cdot & \cdot & \cdot & Ib_{n-1} & Ib_n \\ -\sigma_1 & I & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_2 & I & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & -\sigma_n & I \end{pmatrix}, \tag{14}$$

де $\sigma_k = \mathrm{e}^{-A\tau_k}$, $k = \overline{1,n}$, матрицю $B = \{\alpha_{k,j}\}_{k,j=0}^{n}$, $k = \overline{1,n}$, $j = \overline{0,n}$, і вектори $x = (x_0, \dots, x_n)^T$, $\phi = (\varphi, \phi_1, \dots, \phi_n)^T$, $\psi = (\Psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n)^T$, $z = (z_0, \dots, z_n)^T$.

З використанням запропонованих позначень системи (12), (13) можна записати в матричній формі як

$$\begin{aligned} Sx &= Bx + \phi, \\ Sz &= Bz + \psi. \end{aligned} \tag{15}$$

Далі, для вектора $v = (v_1, v_2, ..., v_n)^T$ і блочно-операторної матриці $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ введемо норму

$$|||v||| \equiv |||v|||_1 = \max_{1\le k\le n} \|v_k\|,$$

і породжену матричну норму

$$|||A||| \equiv |||A|||_1 = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} \|a_{i,j}\|.$$

Матрицю S можна подати як $S = S_1 + \mathbf{1}\mathbf{a}^T$, де $\mathbf{1} = (1, 0, \dots, 0)^T$, $\mathbf{a} = (b_0, \dots, b_N)^T$ – два вектори однакової розмірності, а матроиця S_1 є такою самою матрицею, як S_1, із відмінністю в першому рядку, де перший елемент – це одиничний оператор, а всі решта – нулі. З використанням леми Шермана-Морісона в [7] було показано, що матрицю S можна обернути, якщо існує обернена матриця $B_n^{-1} = [I - \sum_{j=0}^{n} b_j \mathrm{e}^{-A(t_j+1)}]^{-1}$. У цьому випадку, для оберненої матриці є справедливе зображення

$$S^{-1} = S_1^{-1}\left(I - \mathbf{1}\mathbf{a}^T S_1^{-1} B_N^{-1}\right),$$

де матриця S_1 є частинним випадком матриці S (див. [5] формулу

(3.165) с. 55) і має обернену, що записується як

$$S_1^{-1} = \begin{pmatrix} I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ e^{-A(t_1+1)} & I & \cdots & 0 & 0 \\ e^{-A(t_2+1)} & e^{-A(t_2-t_1)} & \cdots & 0 & 0 \\ . & . & \cdots & . & . \\ e^{-A(t_N+1)} & e^{-A(t_N-t_1)} & \cdots & e^{-A(t_N-t_{N-1})} & I \end{pmatrix}. \qquad (16)$$

Зауваження 3.1. *Використовуючи результати [5], можна побудувати паралельний метод наближення з експоненціальною швидкістю збіжності для експонент ув* $S_1{}^{-1}$ *і, як наслідок, паралельний метод для матриці* $S_1{}^{-1}$.

Із леми 2 [7] випливає, що при виконанні умови (5) виконуватимуться оцінки

$$|||B||| \le c_1(n+1)^{-1}, \qquad (17)$$

$$|||S^{-1}B||| \le c_2. \qquad (18)$$

Нехай Π_n – множина поліномів від t степеня, не вищого за n. Тоді, згідно з [8, 9], справедлива нерівність Лебега для векторно-значної функції

$$\|u(t) - P_n(t;u)\|_{C[-1,1]} \equiv \max_{t\in[-1,1]} \|u(t) - P_n(t;u)\| \le (1+\Lambda_n)E_n(u)$$

з похибкою найкращого наближення векторно-значної функції $u(t)$ поліномами степеня, не вищого за n:

$$E_n(u) = \inf_{p\in\Pi_n} \max_{t\in[-1,1]} \|u(t) - p(t)\|.$$

Сформулюємо і доведемо основний результат як теорему

Теорема 3.1. *Нехай виконуються умови* (2)–(6) *і* $c_2 < 1$ *в оцінці* (18), *тоді для достатньо великого n справедливі такі твердження:*

1. *Похибка* z *може бути оцінена як*

$$|||z||| \le c \ln{(n+1)} \cdot E_n(v),$$

де v *– розв'язок задачі* (9).

2. *Перше рівняння у* (15) *можна записати*

$$x = S^{-1}Bx + S^{-1}\phi,$$

яке можна розв'язувати методом послідовних наближень

$$x^{(k+1)} = S^{-1}Bx^{(k)} + S^{-1}\phi,\ k = 0, 1, ...;\ x^{(0)} - \textit{довільне},$$

зі швидкістю збіжності геометричної прогресії зі знаменником $q < 1$ *для достатньо великого* n.

Доведення. Для z із другого рівняння маємо

$$(I - S^{-1}B)z = \psi,$$

тому згідно з оцінкою (18) маємо

$$|||z||| \leq c|||\psi|||. \tag{19}$$

Для $|||\psi|||$ матимемо:

$$|||\psi||| = \max_{1\leq k\leq n} \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left\{ \mathrm{e}^{-A(t_k - s)}[V_k - V(s)](v(s) - P_n(s; v)) \right\} ds \right\| \leq$$

$$\leq c \max_{1\leq k\leq n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} |t_k - s| \, \|v(s) - P_n(s; v)\| ds \leq$$

$$\leq c\tau_{max}^2 \, \|v(s) - P_n(\cdot; v)\|_{C[-1,1]} \leq c\tau_{max}^2 (1 + \Lambda_n) E_n(v),$$

$$\|\Psi_0\| \leq \sum_{i=1}^{m} |\alpha_i| \, \| \, [P_n(s_i, v) - v(s_i)] \, \| \leq c_3 \ln{(n+1)} E_n(v).$$

Отже, маємо

$$|||\psi||| \leq c \cdot E_n(v). \tag{20}$$

Тепер перше твердження теореми випливає з (19), (20). Друге твердження випливає з (15) і (18). ■

[1] Fujita, H. Norikazu Saito, Takashi Suzuki. Operator theory and numerical methods / Hiroshi Fujita, — North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 2001. — **30**, of Studies in Mathematics and its Applications. — VIII+309 p.

[2] Pazy, A. Semigroups of linear operator and applications to partial differential equations. — New York, Berlin, Heidelberg: Springer Verlag, 1983. — VIII+279 p.

[3] Крейн, С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — Москва: Наука, 1967. — 464 с.

[4] Kreĭn, S. G. Linear differential equations in Banach space. — Providence, R.I.: American Mathematical Society. — V+390 p. — Translated from the Russian by J. M. Danskin, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 29, 1971.

[5] Gavrilyuk I., Makarov V., Vasylyk V. Exponentially convergent algorithms for abstract differential equations. Frontiers in Mathematics. — Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2011. — VIII+180 p.

[6] Exponentially convergent Duhamel-like algorithms for differential equations with an operator coefficient possessing a variable domain in a Banach space / T. J. Bohonova, I. P. Gavrilyuk, V. L. Makarov, V. B. Vasylyk // SIAM J. Numer. Anal. — 2007/08. — **46**, 5. — P. 365–396.

[7] Sytnyk, D. Parallel numerical method for nonlocal-in-time Schrödinger equation// Journal of Coupled Systems and Multiscale Dynamics. — 2017. — **5**, 2. — P. 204–211.

[8] Babenko, K. Foundations of the numerical analysis (in Russian). — Moscow: Nauka, 1986. — 848 p.

[9] Szegö, G. Orthogonal Polynomials (with an Introduction and a Complement by J.L.Geronimus) (in Russian). — Moscow: State Publishing House of Physical and Mathematical Literature, 1962. — 500 p.