Збірник праць Інституту математики НАН України 2006, т.3, N 2, 159–169

УДК 517.912:512.816

Еволюційні рівняння та системи, інваріантні відносно конформної алгебри

Н.В. ІЧАНСЬКА

Полтавський нац. технічний університет ім. Юрія Кондратюка
E-mail: k26@pntu.poltava.ua

Для класів нелінійних еволюційних рівнянь та систем таких рівнянь, що є інваріантними відносно деяких реалізацій конформної алгебри, розв'язано низку обернених та прямих задач групової класифікації.

Inverse and direct group classification problems are solved for classes of nonlinear evolutionary equations and systems of such equations, which are invariant with respect to realizations of conformal algebras.

1. Вступ. Унаслідок широкого застосування нелінійні еволюційні рівняння є цікавим об'єктом дослідження. Найбільш відомими серед них є нелінійні рівняння теплопровідності (дифузії)

$$u_t = \partial_x(f(u)u_x). \tag{1}$$

Повний опис симетрій Лі рівнянь класу (1) зроблено Л. Овсянніковим у статті [1]. Ця робота стала класичною, оскільки в ній на прикладі класу рівнянь (1), вперше було розв'язано задачу групової класифікації для нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними. В [1] показано, що найбільш широку симетрію це рівняння має у випадку, коли $f(u) = \lambda u^{-\frac{4}{3}}$, $\lambda = \mathrm{const} \neq 0$, його максимальна алгебра інваріантності породжується базисними генераторами

$$\begin{gathered}\partial_t, \quad \partial_x, \quad D = 2t\partial_t + x\partial_x, \\ D_1 = 2x\partial_x - 3u\partial_u, \quad K = x^2\partial_x - 3xu\partial_u.\end{gathered} \tag{2}$$

Об'єктом наших досліджень є еволюційні рівняння та системи вигляду

$$u_t = F(t, x, u_{(n)}), \tag{3}$$

$$U_t = G(t, x, U_{(n)}), \tag{4}$$

Тут і скрізь нижче $u = u(t, x)$, $n \geq 2$. u_t та $u_{(n)}$ відповідно позначають похідну $\partial u/\partial t$ та сукупність всіх похідних функції u за змінною x до порядку n включно, причому u вважаємо похідною нульового порядку, $U = (u^1, \ldots, u^r)$, F – довільна достатньо гладка функція свої аргументів, $G = (g^1, \ldots, g^r)$ – набір таких функцій.

Рівняння вигляду (3) займають важливе місце серед диференціальних рівнянь з частинними похідними. До таких рівнянь приводять різні фізичні задачі, наприклад, задачі опису процесів тепло- та масообміну, механіки суцільного середовища, теорії фільтрації, росту популяцій, фізики моря для опису розподілу коливань температури та солоності моря в глибину тощо. До класу (3) належать відомі рівняння Гарі–Діма, Кортевега–де Фріза, Крішевера–Новікова та ін., дослідження яких проводилось в багатьох роботах [2–4] тощо. У статті [5] розглядаються методи інтегрування деяких рівнянь класу (3). Серед систем (4) є відомі системи, симетрійні властивості яких розглядалися у багатьох роботах ([6–9] тощо).

У цій статті описано функції F, при яких рівняння (3) інваріантне відносно алгебри

$$AC_1(1) = \langle \partial_t,\, \partial_x,\, D = 2x\partial_x + u\partial_u,\, K = x^2\partial_x + xu\partial_u \rangle. \tag{5}$$

Для декількох класів еволюційних рівнянь, пов'язаних з виокремленими, проведено повну групову класифікацію. Також побудовано одновимірні еволюційні системи двох рівнянь, що інваріантні відносно алгебри

$$\langle \partial_t,\, \partial_x,\, D = 2x\partial_x + u^a\partial_{u^a},\, K = x^2\partial_x + xu^a\partial_{u^a} \rangle. \tag{6}$$

Алгебра операторів (5) є реалізацією алгебри $sl(2,\mathbb{R}) \oplus A_1$. Оскільки оператори ∂_x, D і K задають реалізацію алгебри $sl(2,\mathbb{R})$ групи конформних перетворень одновимірного дійсного простору, то алгебру $sl(2,\mathbb{R}) \oplus A_1$ надалі будемо називати розширеною конформною алгеброю і позначати $AC_1(1)$. Ми розглядаємо конкретну реалізацію (5) алгебри $AC_1(1)$, тому під інваріантністю рівняння відносно алгебри $AC_1(1)$ будемо розуміти інваріантність відносно її реалізації (5).

Зауважимо, що для конкретних рівнянь можуть виникати реалізації подібні до (5), де у виразах для D, K при других доданках стоїть ненульовий коефіцієнт m. Але такі реалізації зводяться до (5) локальними перетвореннями $u \to u^m$. Аналогічно для конкретних систем рівнянь можуть виникати реалізації подібні до (6), коли оператори D, K мають вигляд

$$D = 2x\partial_x + m_{11}u^1\partial_{u^1} + m_{12}u^2\partial_{u^2},$$
$$K = x^2\partial_x + m_{11}xu^1\partial_{u^1} + m_{12}xu^2\partial_{u^2},$$

де m_{11}, m_{12} – довільні константи, одночасно нерівні нулю.

Якщо $m_{11} \neq 0$, $m_{12} \neq 0$, то такі реалізації зводяться до (6) локальними перетвореннями $u^1 \to (u^1)^{m_{11}}$, $u^2 \to (u^2)^{m_{12}}$.

Коли хоча б одна з сталих m_{11}, m_{12} дорівнює нулю, то такі реалізації локальними перетвореннями $u^1 \to u^1$, $u^2 \to (u^2)^{m_{12}}$ зводяться до

$$\langle \partial_t,\, \partial_x,\, D = 2x\partial_x + u^2\partial_{u^2},\, K = x^2\partial_x + xu^2\partial_{u^2} \rangle. \tag{7}$$

Інваріантність еволюційної системи рівнянь другого порядку відносно алгебри (7) розглянуто в [10].

2. Конформно-інваріантні еволюційні рівняння. Розглянемо спочатку задачу про виділення з загального класу еволюційних рівнянь вигляду

$$u_t = F(t, x, u_{(n)}) \tag{8}$$

тих, які є інваріантними відносно алгебри (5).

Теорема 1. *Рівняння з класу* (8) *інваріантне відносно алгебри* $AC_1(1)$ *тоді і тільки тоді, коли воно має вигляд*

$$u_t = uf(I^1, I^2, \ldots, I^{n-1}) \tag{9}$$

де $I^k = (u^2\partial_x)^{k-1}(u^3u_{xx})$, $k = \overline{1, n-1}$, f *– довільна гладка функція своїх аргументів.*

Доведення. З інфінітезимального критерію інваріантності [11] для рівняння (8) відносно алгебри $AC_1(1)$ випливає, що $F = uf$, де функція f залежить лише від диференціальних інваріантів алгебри $AC_1(1)$, які не містять змінної t і диференціювань по t. Тому можна скористатися класичними результатами С. Лі [12] (див. також сучасний виклад в [13,14]) щодо реалізацій алгебр Лі на площині та їх диференціальних інваріантів, вважаючи змінну t параметром.

В просторі змінних x і u реалізація $\langle \partial_x,\, D,\, K\rangle$ алгебри $sl(2,\mathbb{R})$ має фундаментальний диференціальний інваріант u^3u_{xx} і оператор інваріантного диференціювання $u^2\partial_x$, звідки очевидно випливає твердження теореми.

Оскільки задача повної групової класифікації рівнянь вигляду (9) є занадто громіздкою, обмежимося вивченням двох важливих підкласів рівнянь другого та третього порядків, які мають вигляд

$$u_t = uf(I^1), \quad I^1 = u^3u_{xx}, \tag{10}$$

$$u_t = uf(I^2), \quad I^2 = 3u^4u_xu_{xx} + u^5u_{xxx}. \tag{11}$$

Зауважимо, що заміною $u \to \sqrt{u}$ рівняння (11) зводиться до більш простого рівняння

$$u_t = ug(I), \quad I = u^2u_{xxx}, \tag{12}$$

де $g(I) = 2f(I/2)$. При $g = u^2u_{xxx}$ рівняння (12) є відомим рівнянням Гарі–Діма.

Відомо, що груповий аналіз одного рівняння виявляється груповим аналізом цілого класу рівнянь, які отримуються з даного рівняння локальною заміною змінних і мають ізоморфні групи симетрії [11,15]. Тому спочатку знайдемо точкові перетворення еквівалентності рівнянь (10) та (12). Для зручності перепишемо ці рівняння наступним чином

$$u^3u_{xx} = \varphi\left(\frac{u_t}{u}\right), \tag{13}$$

$$u^2u_{xxx} = \psi\left(\frac{u_t}{u}\right), \tag{14}$$

де φ, ψ – довільні гладкі функції. Після заміни

$$u = e^w, \tag{15}$$

де $w = w(t,x)$ – нова невідома функція, одержимо

$$e^{4w}(w_{xx} + w_x^2) = \varphi(w_t), \tag{16}$$

$$e^{3w}(w_{xxx} + 3w_xw_{xx} + w_x^3) = \psi(w_t). \tag{17}$$

Теорема 2. *Алгебра Лі групи еквівалентності $G_1^{\sim}$ класу рівнянь* (16) *породжується інфінітезимальними операторами вигляду*

$$(\varkappa_1 t + d_0)\partial_t + (ax^2 + 2\varkappa_2 x + d_1)\partial_x + (ax + \varkappa_2 + \varkappa_3)\partial_w + 4\varkappa_3\varphi\partial_\varphi.$$

Алгебра Лі групи еквівалентності $G_2^{\sim}$ класу рівнянь (17) *породжується інфінітезимальними операторами вигляду*

$$(\varkappa_1 t + d_0)\partial_t + (ax^2 + 2\varkappa_2 x + d_1)\partial_x + (ax + \varkappa_2 + \varkappa_3)\partial_w + 3\varkappa_3\psi\partial_\psi.$$

Тут $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$, a, d_0, d_1 – довільні сталі.

Зауваження. Крім перетворень з групи еквівалентності $G_1^{\sim}$ у класі рівнянь (16) існують також додаткові точкові перетворення еквівалентності, які описано групою науковців, очолюваною М.І. Сєровим. Додаткові точкові перетворення еквівалентності є і між випадками розширення симетрії у класі рівнянь (12).

Теорема 3. *Алгеброю Лі ядра основних груп рівнянь вигляду* (10) *є алгебра* $A^{\ker} = \langle \partial_t,\, \partial_x,\, D = 2x\partial_x + u\partial_u,\, K_x = x^2\partial_x + xu\partial_u\rangle$.

Теорема 4. *З точністю до точкових перетворень для класу рівнянь* (10) *існує лише чотири випадки розширення максимальної в сенсі Лі алгебри інваріантності (нижче $\omega = u^3 u_{xx}$ та наведено лише базисні оператори з доповнення до $A^{\ker}$):*

1. $f = \ln(\omega)$: $\quad Y_1 = e^{4t}u\partial_u$;
2. $f = \omega^m$: $\quad D_1 = 4mt\partial_t - u\partial_u,\ m \neq 0, \pm\frac{1}{3}$ – довільна стала;
3. $f = \omega^{-\frac{1}{3}}$: $\quad D_2 = 4t\partial_t + 3u\partial_u,\ Q_1 = \partial_u,\ Q_2 = x\partial_u$;
4. $f = \omega^{\frac{1}{3}}$: $\quad D_3 = 4t\partial_t - 3u\partial_u,\ G = u\partial_x,\ K_2 = xu\partial_x + u^2\partial_u$.

Теорема 5. *Алгеброю Лі ядра основних груп рівнянь вигляду* (12) *є алгебра* $A^{\ker} = \langle \partial_t,\, \partial_x,\, D = x\partial_x + u\partial_u,\, K = x^2\partial_x + 2xu\partial_u\rangle$.

Теорема 6. *З точністю до точкових перетворень для класу рівнянь* (12) *існує лише три випадки розширення максимальної в сенсі Лі алгебри інваріантності (нижче $\omega = u^2 u_{xxx}$ та наведено лише базисні оператори з доповнення до $A^{\ker}$):*

1. $g = \ln(\omega)$: $\quad Y_1 = e^{3t}u\partial_u$;
2. $g = \omega^m$: $\quad D_1 = 3mt\partial_t - u\partial_u,\ m \neq 0, -\frac{1}{2}$ – довільна стала;
3. $g = \omega^{-\frac{1}{2}}$: $\quad D_2 = 3t\partial_t + 2u\partial_u,\ Q_1 = x^2\partial_u,\ Q_2 = x\partial_u,\ Q_3 = \partial_u$.

Як випливає з наведених тверджень, найширшу симетрію у класі (10) має рівняння

$$u_t = u^2 (u_{xx})^{\frac{1}{3}}, \tag{18}$$

$$u_t = (u_{xx})^{-\frac{1}{3}}, \tag{19}$$

а в класі рівнянь (12) –

$$u_t = (u_{xxx})^{-\frac{1}{2}}. \tag{20}$$

В [17] для рівняння (18) побудовано анзаци та проведено редукцію. Слід зазначити, що рівняння (18) заміною

$$t \to t, \quad x \to \frac{x}{u}, \quad u \to \frac{1}{u}$$

зводиться до рівняння

$$u_t = (u_{xx})^{\frac{1}{3}}. \tag{21}$$

Крім того, в [19] доведено, що рівняння (21) неточковою заміною

$$t \to t, \quad x \to u_x, \quad u \to xu_x - u$$

зводиться до рівняння (19).

Алгебри інваріантності рівнянь (21), (19) та (20) складаються з семи та восьми базових операторів, що узгоджується з твердженням [23] про те, що алгебра інваріантності еволюційного рівняння порядку n складається не більше ніж з $n+5$ операторів.

Рівняння (19) та (21) виділено і в [20, 21] при груповій класифікації рівнянь вигляду $u_t = F(u_{xx})$ як ті, що володіють найширшою симетрією. Рівняння (20) виділено як особливе також у [5].

4. Групова класифікація рівнянь n-го порядку. В цьому підрозділі результати одержані для рівнянь (19)–(21) узагальнено на випадок рівняння довільного порядку. Розглянемо клас еволюційних рівнянь вигляду:

$$u_t = f(u_n), \tag{22}$$

де $u_n = \frac{\partial^n u}{\partial x^n}$, f – довільна гладка функція змінної u_n, тобто функція f залежить лише від старшої похідної u_n, причому $f_{u_n} \neq 0$. Класифікацію таких рівнянь, коли $n=2$ проведено в роботах [20, 21], тому надалі вважаємо, що $n > 2$.

Будь-яке рівняння вигляду (22) можна привести до вигляду

$$u_n = F(u_t), \tag{23}$$

де F – гладка функція, яка є оберненою до функції f. Тому всі твердження сформулюємо для рівняння (23).

Результати групової класифікації для рівнянь класу (23) наведемо в вигляді наступних трьох теорем.

Теорема 7. *Алгеброю Лі ядра основних груп рівнянь вигляду* (23) *є алгебра* $A^{\rm ker} = \langle \partial_t,\, \partial_x,\, nt\partial_t + x\partial_x + nu\partial_u,\, \partial_u,\, x\partial_u,\, x^2\partial_u,\, \ldots,\, x^{n-1}\partial_u \rangle$.

Теорема 8. *Алгебра Лі $A^\sim$ групи еквівалентності $G^\sim$ класу рівнянь* (23) *породжується операторами з $A^{\rm ker}$ (продовженими на довільний елемент F) та операторами $t\partial_u$, $u\partial_u + nF\partial_F$, $x\partial_x - nF\partial_F$.*

Теорема 9. *З точністю до перетворень з $G^\sim$ для класу рівнянь* (23) *при $n > 2$ існує лише чотири випадки розширення максимальної в сенсі Лі алгебри інваріантності (нижче наведено лише базисні оператори з доповнення до $A^{\rm ker}$):*

1. $F = e^{u_t}$: $\quad Q = x\partial_x - nt\partial_u$;
2. $F = \ln u_t$: $\quad Q = n!\, t\partial_t - x^n\partial_u$;
3. $F = (u_t)^m$: $\quad D_1 = (1-m)x\partial_x + nu\partial_u$, $\; m \neq -\frac{n+1}{n-1}$ – довільна стала;
4. $F = (u_t)^{-\frac{n+1}{n-1}}$: $\quad D = 2x\partial_x + (n-1)u\partial_u$, $K = x^2\partial_x + (n-1)xu\partial_u$.

Доведення цих теорем проведемо одночасно. Скористаємося технікою, запропонованою в [22]. Оскільки (22) є еволюційним рівнянням, то в силу леми з [16] будь-який інфінітезимальний оператор його лівської симетрії має вигляд

$$X = \xi^0(t)\partial_t + \xi^1(t,x,u)\partial_x + \eta(t,x,u)\partial_u.$$

Після переходу на многовид, заданий рівнянням (23) в продовженому просторі, і розщеплення по похідним u_x, u_2, $\ldots$, u_{n-1} отримаємо систему визначальних рівнянь

$$\xi^1_u = \eta_{uu} = 0, \quad \eta_{k\,u} = \frac{n-k}{k+1}\xi^1_{k+1},\ k \in \mathbb{N}, \tag{24}$$

$$[\eta_t + (\eta_u - \xi^0_t)u_t - \xi^1_t u_x]\dot{F} = [\eta_u - n\xi^1_x]F + \eta_n. \tag{25}$$

Якщо F – довільна функція, то розщеплюючи (25) по F і $\dot{F}$, отримаємо рівняння $\eta_u = n\xi^1_x = \xi^0_t$, $\xi^1_t = \eta_t = \eta_n = 0$, розв'язком яких є функції $\xi^0 = c_1 t + c_2$, $\xi^1 = c_1 n^{-1}x + c_3$, $\eta = c_1 u + P_{n-1}(x)$, де c_1, c_2,

c_3 – довільні сталі, P_{n-1} – довільний поліном $n-1$ степеня відносно змінної x, що доводить теорему 7.

Максимальна група еквівалентності класу рівнянь (23) співпадає з групою, породженою сукупністю однопараметричних перетворень груп локальних симетрій системи

$$u_n = F(u_t), \quad F_t = F_x = 0, \quad F_{u_l} = 0, \ l = \overline{1, n-1}, \tag{26}$$

інфінітезимальні оператори яких мають вигляд

$$E = \xi^0(t,x,u)\partial_t + \xi^1(t,x,u)\partial_x + \eta(t,x,u)\partial_u + \zeta(t,x,u,F)\partial_F.$$

З умови інваріантності [2] системи (26) відносно оператора E, після розщеплення за незв'язанними змінними отримаємо систему визначальних рівнянь на коефіцієнти оператора E, розв'язки якої задають оператори, котрі породжують групу перетворень еквівалентності $G^{\sim}$. Теорема 8 доведена.

Опишемо всі можливі розширення МАІ в класі рівнянь (23). Розв'язавши перші три рівняння з (24), отримаємо

$$\eta = a(t,x)u + b(t,x), \quad \xi^1 = \xi^1(t,x), \tag{27}$$

де a, b – гладкі функції.

Структурне рівняння для (25) має вигляд

$$(k_1 u_t + k_2)\dot{F} = k_3 F + k_4, \tag{28}$$

де $k_1, \ldots, k_4$ – деякі сталі. В залежності від співвідношень між коефіцієнтами k_i з точністю до перетворень з $G^{\sim}$ отримуємо різні вигляди функції F. Зазначимо, що при $k_1 = k_2 = 0$ маємо $a_t = b_t = a - \xi^0_t = \xi^1_t = 0$, тобто розширення МАІ немає.

Якщо $k_1 \neq 0$, $k_3 \neq 0$, то $k_2 = 0$ і без обмеження загальності можна вважати $k_1 = 1$, а розв'язком рівняння (28) з точністю до перетворень з групи $G^{\sim}$ є функція $F = (u_t)^m$. Підставивши F в рівняння (25) та розщепивши по похідній u_t, отримуємо:

$$(m-1)a = m\xi^0_t - n\xi^1_x, \quad a_t = b_t = \xi^1_t = 0, \quad b_n = 0.$$

В залежності від значення m, з врахуванням рівнянь (24), маємо або третій, або четвертий випадки теореми 9.

Якщо $k_1 \neq 0$, $k_3 = 0$, то $k_2 = 0$, $k_1 = 1$, а розв'язком рівняння (28) з точністю до перетворень з групи $G^{\sim}$ є функція $F = \ln u_t$. Підставивши F у (26), аналогічно попередньому випадку маємо

$$a - \xi^0_t = b_n, \quad a_t = b_t = \xi^1_t = 0, \quad a - n\xi^1_x = 0.$$

В результаті отримуємо другий випадок теореми 9.

У випадку $k_1 = 0$, $k_2 = 1$ розв'язком рівняння (28) з точністю до перетворень з групи $G^{\sim}$ є функція $F = e^{u_t}$, а рівняння (26) розпадається на систему рівнянь:

$$a - \xi^0_t = 0, \quad a_t = \xi^1_t = 0, \quad b_t = a - n\xi^1_x, \quad b_n = 0,$$

які разом з (27) задають перший випадок теореми 9. Теорему 9 доведено.

Твердження теореми 9 щодо рівняння $u_t = (u_n)^{\frac{n+1}{n-1}}$ узгоджуються з результатами, одержаними Магадеєвим [18, 23].

5. Системи еволюційних рівнянь n-го порядку. Розглянемо систему еволюційних рівнянь, що узагальнює рівняння (8) на випадок двох функцій відносно двох невідомих t, x:

$$U_t = F(t, x, U_{(n)}), \tag{29}$$

де $F = (f^1, f^2)$ – довільні гладкі функції, $U = (u^1, u^2)$, $U_t = (u^1_t, u^2_t)$, $U_{(n)} = (u^1_{(n)}, u^2_{(n)})$.

Розв'яжемо задачу: виділити з класу систем (29) ті, які є інваріантними відносно розширеної конформної алгебри (6). Аналогічно теоремі 1 можна довести наступне твердження.

Теорема 10. *Система* (29) *інваріантна відносно алгебри* (6) *тоді і тільки тоді, коли вона має вигляд:*

$$U_t = u^1 g, \tag{30}$$

де $g = (g^1, g^2)$ *– довільні гладкі функції змінних* $\omega^{01} = u^1/u^2$, $\omega^{02} = u^2 u^1_x - u^1 u^2_x$, $\omega^{ak} = ((u^a)^2 \partial_x)^{k-1}((u^a)^3 u^a_{xx})$ *(суми по індексу a немає),* $k = \overline{1, n-1}$, $a = 1, 2$.

6. Висновки. У цій статті розв'язано низку прямих і обернених задач групової класифікації, внаслідок чого побудовано нелінійні еволюційні рівняння і системи, інваріантні відносно розширеної конформної алгебри. Перерахуємо отримані результати:

1. Показано, що у класі еволюційних рівнянь вигляду (8) тільки рівняння (9) є інваріантними відносно розширеної конформої алгебри.
2. Встановлено, що найширшу алгебру симетрій у класі рівнянь (10) мають рівняння (18) та (19), а в класі рівнянь (11) – рівняння (20).
3. Показано, що найширшу алгебру симетрій у класі рівнянь довільного порядку (22) має рівняння $u_t = (u_n)^{\frac{n+1}{n-1}}$.
4. Встановлено, що у класі систем еволюційних рівнянь вигляду (29) тільки система (30) є інваріантною відносно розширеної конформної алгебри (6).

Виражаю щиру подяку М.І. Сєрову та Р.О. Поповичу за постановку задач і цінні рекомендації під час обговорення результатів досліджень.

[1] Овсянников Л.В. Групповые свойства уравнений нелинейной теплопроводности // ДАН СССР. – 1959. – **125**. – С. 492–495.

[2] Олвер П. Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям. – Москва: Мир. – 1989. – 581 с.

[3] Serov N.I., Tulupova L.A. Symmetry properties of the generalized Korteweg–de Vries and Burgers equations // Dopovidi Akademii Nauk Ukrainy. – 1994. – № 12. – P. 42–44.

[4] Tychynin V.A. Non-local symmetry and generating solutions for Harry–Dym-type equations // J. Phys. A: Math. Gen. – 1994. – **27**. – P. 4549–4556.

[5] Heredero R.H., Sokolov V.V., Svinolupov S.I. Toward the classification of third-orderintegrable evolution equations // J. Phys. A: Math.Gen. – 1994. – **27**. – P. 4557–4568.

[6] Pava J.A. On the Cauchy problem for a Boussinesq-type system // Adv. Diff. Equations. – 1999. – **4**. – P. 457–492.

[7] Фущич В.И., Репета В.К., Серов Н.И. Нелиевская симметрия и точные решения одномерных уравнений газовой динамики // Доклады АН Украины. – 1991. – № 11. – С. 27–33.

[8] Фущич В.І., Черніга Р.М. Системи лінійних еволюційних рівнянь другого порядку, інваріантні відносно алгебри Галілея та її розширень // Доповіді АН України. – 1993. – № 8. – С. 44–51.

[9] Черніга Р.М. О точных решениях одной нелинейной системы диффузионного типа / Симметрийный анализ и решення уравнений матфизики. – Киев: Ин–т математики. – 1988. – С. 49–53.

[10] Андреєва Н.В. Симетрійні властивості нелінійної системи рівнянь параболічного типу // Праці Інституту математики НАН України. – 1998. – **19**. – С. 10–13.

[11] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – Москва: Наука. – 1978. – 400 с.

[12] Lie S. Klassifikation und Integration von gewöhnlichen differential Gleichungen zwischen x, y, die eine Gruppe von Transformationen gestatten // Math. Ann. – 1888. – **32**. – S. 213–281.

[13] Nesterenko M.O. Transformation groups on real plane and their differential invariants // Intern. J. Math. Math. Sci. – 2006. – **2006**, 17410. – 17 pp.

[14] Olver P. Differential invariants and invariant differential equations// Lie Groups Appl. – 1994. – **1**. – P. 177–192.

[15] Овсянников Л.В. Групповые свойства уравнений С.А. Чаплыгина // Журн. прикл. мех. и техн. физ. – 1960. – № 3. – С. 126–145.

[16] Бойко В.М., Попович В.О. Групова класифікація галілей-інваріантних рівнянь високого порядку // Праці Інституту математики НАН України. – 2001. – **36**. – С. 45–50.

[17] Serova M., Andreeva N. Evolution equations invariant under the conformal algebra // Proceedings of the Second International Conference “Symmetry in Nonlinear Mathematical Phisics”. – Kyiv: Institute of Mathematics. – 1997. – **1**. – P. 217–221.

[18] Магадеев Б.А. Структура симметрии эволюционных уравнений / Дис. ...канд. физ.-мат. наук. – Уфа. – 1990. – 103 с.

[19] Gazizov R.K. Contact transformations of equations of the type of nonlinear filtration / CRC handbook of Lie group analysis of differential equations, Vol. 1. – Boca Raton: Chemical Rubber Company, 1994. – P. 125–135.

[20] Ахатов Н.Ш., Газизов Р.К., Ибрагимов Н.Х. Нелокальные симметрии. Эвристический подход / Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения. – 1989. – **34**. – С. 3–83.

[21] Pukhnachov V.V. Nonlocal symmetries in nonlinear heat equations / Energy methods in continuum mechanics (Oviedo, 1994). – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1996. – P. 75–99.

[22] Нікітін А.Г., Попович Р.О. Групова класифікація нелінійних рівнянь Шредінгера // Укр. мат. журн. – 2001. – **51**. – С. 1053–1060.

[23] Магадеев Б.А. О групповой классификации нелинейных эволюционных уравнений // Алгебра и анализ. – 1993. – **5**, вып.2. – С. 141–156.