

Применение метода Ритца к расчету колебаний упругих оболочек вращения, частично заполненных жидкостью

Ю. В. Троценко

*Институт математики НАН Украины, Киев;
trots@imath.kiev.ua*

An algorithm for calculating the eigen frequencies and modes of arbitrary shells of revolution which are partially filled with an ideal fluid is proposed. The solution method of this hydroelastic problem is based on the domain decomposition method applied to the shell equations that is combined with the variational method constructing an inverse operator for the hydrodynamic part of the problem. A comparison of the obtained numerical results with existing exact solutions of the problem for the shell of the circular cylindrical shape is given.

Запропоновано алгоритм розрахунку частот та форм власних коливань довільних оболонок обертання, частково заповнених ідеальною рідиною з врахуванням хвильових рухів на її вільній поверхні. Розв'язок вихідної задачі гідропружності базується на застосуванні методу декомпозиції області інтегрування рівнянь теорії оболонок у поєднанні з варіаційним методом та наближеній побудові оберненого оператора для гідродинамічної частини задачі. Наведено порівняння отриманих чисельних результатів з існуючими точними розв'язками розглядуваної задачі для оболонки у формі кругового циліндра.

1. Введение

Многие важные задачи динамики механических систем, включающих в себя жидкие массы с изменяющимися во времени границами,

* Работа выполнена при частичной поддержке НИР № 0112U001015

приводят к необходимости решения проблемы о взаимодействии жидкости с абсолютно твердыми или упругими телами. Эта проблема стала особенно актуальной в связи с развитием и совершенствованием авиационной, ракетной и космической техники. Упругие конструкции, несущие большие массы жидкости, широко представлены также в кораблестроении (танкеры для перевозки сжиженных газов) и в промышленном строительстве (резервуары для хранения нефтепродуктов, металлические водонапорные башни, которые могут находиться под воздействием ветровых или сейсмических нагрузок). Во многих случаях подвижная масса жидкости составляет значительную часть от массы всей механической системы и является одним из основных факторов, определяющих динамическую прочность и устойчивость движения системы «тело - жидкость».

Проблемам динамики упругих конструкций с жидкостью посвящена обширная литература [1, 2]. Краевые задачи гидроупругости относятся к числу достаточно сложных задач математической физики, поскольку необходимо совместно интегрировать систему дифференциальных уравнений для перемещений оболочки и уравнения в частных производных для потенциала смещений жидкости. Тем не менее среди публикаций имеются работы, в которых построены точные решения рассматриваемых задач [1, 3, 4]. Точные решения можно построить только в тех случаях, когда поверхность оболочки совпадает с какой-либо координатной поверхностью одной из систем координат и уравнения теории оболочек допускают построение их явного общего решения. Особо следует отметить работу В. Б. Кулешова и Ю. Ю. Швейко [3], в которой в наиболее общей постановке с учетом волновых движений жидкости построено точное решение задачи об определении собственных неосесимметричных колебаний цилиндрических оболочек, частично заполненных жидкостью. Численные данные, которые представлены в этой работе, имеют очень важное значение, поскольку могут быть использованы для оценки точности различных приближенных методов, которые позволяют получить необходимые результаты более простым способом, чем при непосредственном интегрировании исходных уравнений.

Применительно к оболочкам вращения общего вида разработано ряд приближенных аналитических методов решения рассматриваемых краевых задач гидроупругости. Получение этих решений основано на применении метода Ритца [1, 5, 6] и Бубнова - Галеркина [7, 8]. При их использовании к расчету колебаний произвольных оболочек

вращения, частично заполненных жидкостью, основную трудность представляет выбор координатных функций для перемещений оболочки и жидкости. При реализации метода Бубнова - Галеркина эти трудности могут быть преодолены путем его модификации, предложенной в работе [9]. Следуя этому пути в работах [10] – [12] были предложены оригинальные решения ряда задач гидроупругости.

В настоящее время в связи с бурным развитием вычислительной техники интенсивно развиваются численные методы расчета динамических характеристик упругих оболочек вращения, частично заполненных жидкостью. Так в работе [13] предложен алгоритм расчета собственных и вынужденных колебаний упругих оболочек с жидкостью. Исходная задача сводится к системе интегродифференциальных уравнений за счет введения в рассмотрение вспомогательной спектральной задачи с параметром в граничном условии. Сформулированная краевая задача для этой системы уравнений сводится к соответствующим задачам Коши, решения которых находятся методом Кутта – Мерсона с ортогонализацией решений по С. К. Годунову. Имеется обширная литература по применению разных вариантов метода конечных элементов в задачах гидроупругости [14] – [16] и др. Рассмотренные численные методы обладают универсальностью по охвату решаемых задач, однако они требуют тщательной проверки точности получаемых результатов.

В настоящей работе предлагается алгоритм расчета колебаний произвольных оболочек вращения, частично заполненных жидкостью. При этом учитываются волновые движения жидкости на ее свободной поверхности.

Сначала исходная краевая задача для уравнений в частных производных с помощью метода Бубнова – Галеркина приводится к бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений, независимой переменной в которой является время. Определение коэффициентов этих уравнений сводится к квадратурам, если известны собственные числа и собственные функции дополнительно введенной в рассмотрение спектральной задачи о колебаниях оболочки без учета волновых движений жидкости. Решение этой задачи гидроупругости основано на применении метода декомпозиции области в сочетании с вариационным методом и на приближенном построении обратного оператора для гидродинамической части задачи. Преимущество предлагаемого подхода решения исходной задачи гидроупругости по сравнению с другими вариантами вариационного метода состоит в

том, что рассматриваемую задачу удастся разделить на отдельные подзадачи, для которых применяются индивидуальные пути их решения.

Приведено сравнение полученных расчетных данных с имеющимися в литературе точными решениями данной задачи.

2. Постановка задачи

Рассмотрим тонкостенную упругую оболочку вращения, которая на глубину H заполнена идеальной и несжимаемой жидкостью. В дальнейшем предполагается, что поле массовых сил, действующих на оболочку и жидкость, является потенциальным и ускорение поля массовых сил \vec{g} параллельно оси симметрии оболочки. Будем считать, что смещения, скорости и ускорения оболочки и частиц жидкости малы в том смысле, что их произведениями и квадратами можно пренебречь по сравнению с самими величинами. Оболочка является изотропной и обладает всеми свойствами, обеспечивающими применимость моментной теории тонкостенных оболочек В. З. Власова [17]. Начальными перемещениями срединной поверхности оболочки, обусловленными гидростатическим давлением жидкости, а также диссипацией энергии при колебаниях оболочки пренебрегаем.

Введенные допущения позволяют максимально упростить постановку задачи, сохранив при этом ее практическое значение. Такого рода предположения характерны для большинства теоретических работ по динамике упругих оболочек с жидкостью [1, 2, 18].

У оболочек вращения линиями главных кривизн являются их меридианы и параллели. В качестве ортогональных координат для произвольной точки срединной поверхности оболочки выберем длину дуги меридиана s , отсчитываемую от некоторой начальной параллели ($s_1 \leq s \leq s_2$) или от полюса оболочки ($s_1 = 0$), и угол β , определяющий положение точки на соответствующей параллели. Проекции перемещения точек срединной поверхности оболочки на положительные направления ее образующей, параллели и внешней нормали обозначим соответственно через u , v и w . Обозначим через ν , E и h коэффициент Пуассона, модуль упругости материала оболочки и ее толщину соответственно. Если в уравнения равновесия элемента оболочки, находящегося под воздействием поверхностной нагрузки $\vec{Q} = \{Q_1, Q_2, Q_3\}$, подставить силы и моменты, выраженные через перемещения оболочки, и умножить полученные уравнения на коэф-

коэффициент $(1 - \nu^2)/(Eh)$, то получим следующую систему уравнений в частных производных относительно компонентов перемещения u , v и w :

$$\begin{aligned} L_{11}(u) + L_{12}(v) + L_{13}(w) &= \frac{1 - \nu^2}{Eh} Q_1, \\ L_{21}(u) + L_{22}(v) + L_{23}(w) &= \frac{1 - \nu^2}{Eh} Q_2, \\ L_{31}(u) + L_{32}(v) + L_{33}(w) &= \frac{1 - \nu^2}{Eh} Q_3, \end{aligned} \quad (1)$$

где $L_{i,j}$ ($i, j = \overline{1,3}$) – известные линейные операторы теории оболочек [17]. Компоненты поверхностной нагрузки Q_1 , Q_2 и Q_3 в направлении положительного отсчета координат s , β и внешней нормали к поверхности оболочки в соответствии с принципом Д'Аламбера можно представить в следующем виде:

$$Q_1 = -\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \quad Q_2 = -\rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}; \quad Q_3 = -\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \Delta P. \quad (2)$$

Здесь ρ – плотность материала оболочки и ΔP – динамическое давление на оболочку со стороны жидкости. К уравнениям (1) необходимо добавить граничные условия крепления торцов оболочки при $s = s_1$ и $s = s_2$.

Введем декартову систему координат $Oxyz$ и соответствующую цилиндрическую систему координат $Ozr\beta$, ось Oz которой совместим с осью симметрии оболочки.

Для описания движения жидкости в оболочке введем в рассмотрение потенциал смещений $\chi(z, r, \beta, t)$. Обозначим через S – срединную поверхность оболочки; S_1 – поверхность, смоченную жидкостью; S_2 – несмоченную часть поверхности оболочки; Σ – невозмущенную свободную поверхность жидкости и D – область, занятую жидкостью (рис. 1).

Из принятых выше допущений вытекает возможность отнесения граничных условий для потенциала смещений χ к неподвижной срединной поверхности оболочки S_1 , а условия на возмущенной свободной поверхности жидкости – к ее невозмущенной свободной поверхности Σ .

Потенциал смещений частиц жидкости при заданном движении оболочки в ее нормальном направлении $w(s, \beta, t) = w(p, t)$ определя-

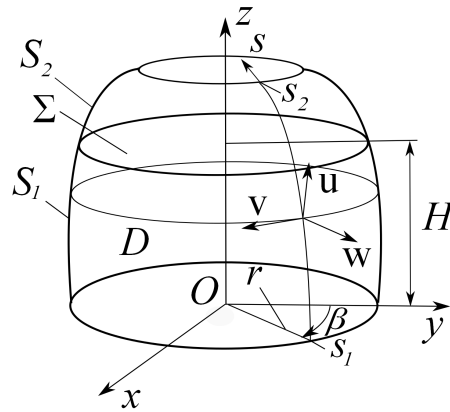


Рис. 1. Оболочка вращения, частично заполненная жидкостью.

ется из решения следующей краевой задачи [2, 18]

$$\begin{aligned} \Delta\chi &= 0, \quad (z, r, \beta) \in D, \\ \frac{\partial\chi}{\partial n}\Big|_{S_1} &= w(p, t), \\ \left(\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} + g\frac{\partial\chi}{\partial z} + f(t)\right)\Big|_{\Sigma} &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где Δ – оператор Лапласа; g – модуль вектора \vec{g} ; n – внешняя нормаль к поверхности S_1 и $f(t)$ – произвольная функция времени.

Динамическое условие на поверхности Σ выражает собою условие постоянства давления жидкости на ее свободной поверхности.

На основании линеаризованного интеграла Лагранжа – Коши динамическое давление со стороны жидкости на оболочку будет определяться по формуле [18]:

$$\Delta P = -\rho_0 \left(\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} - \frac{1}{\Sigma} \int_{\Sigma} \frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} d\Sigma \right). \quad (4)$$

При написании формулы (4) пренебрегалось несущественным гидростатическим давлением, обусловленным деформацией срединной

поверхности оболочки и свободной поверхности жидкости.

Заметим, что потенциал смещений χ должен еще удовлетворять следующему соотношению:

$$\int_{S_1+\Sigma} \frac{\partial \chi}{\partial n} dS = 0, \quad (5)$$

вытекающему из уравнения неразрывности и закона сохранения массы несжимаемой жидкости.

Таким образом, уравнения (1), (3) вместе с соотношениями (2), (4), (5) и соответствующими начальными условиями для оболочки и для волновых движений жидкости [2] однозначно определяют взаимосвязанные колебания упругой оболочки и находящейся в ней идеальной жидкости.

В дальнейшем удобно перейти к безразмерным величинам. Обозначим через R_0 какой-либо характерный размер оболочки. Введем в рассмотрение следующие безразмерные параметры-величины (обозначенные черточкой сверху):

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\rho g R_0 (1 - \nu^2)}{E}; \quad c^2 = \frac{h^2}{12 R_0^2}; \quad a = \frac{\rho_0 R_0}{\rho h}; \quad K = \frac{\rho R_0^2 (1 - \nu^2)}{E}; \\ t^2 &= K \bar{t}^2; \quad \{u, v, w\} = R_0 \{\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}\}; \quad \chi = R_0^2 \bar{\chi}; \\ \{T_i, S\} &= \frac{Eh}{(1 - \nu^2)} \{\bar{T}_i, \bar{S}\}; \quad \{M_i, H\} = \frac{EhR_0}{(1 - \nu^2)} \{\bar{M}_i, \bar{H}\}; \quad i = \bar{1}, \bar{2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Кроме того, отнесем к R_0 также параметры Ламе, кривизны и координаты точек срединной поверхности оболочки. В дальнейшем черточку над безразмерными величинами будем опускать. В формулах (6) T_i и M_i – погонные силы и изгибающие моменты; S и H – сдвигающая сила и крутящий момент, отнесенные к единице длины нормального сечения срединной поверхности оболочки.

Безразмерные уравнения возмущенного движения оболочки удобно представить в следующей векторно-матричной форме:

$$L\vec{U} + \vec{f} = \vec{X}. \quad (7)$$

Здесь L – матричный оператор, порожденный дифференциальными уравнениями (1) и определенный на множестве функций \vec{U} , которые удовлетворяют граничным условиям закрепления краев оболоч-

ки. Трехкомпонентные вектора \vec{f} , \vec{X} и \vec{U} имеют вид

$$\vec{f} = \left\{ \ddot{u}, \ddot{v}, \ddot{w} + a\delta(p) \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} - \frac{1}{\Sigma} \int_{\Sigma} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} d\Sigma \right) \right\};$$

$$\vec{X} = \{X_1, X_2, X_3\}; \quad X_i = \frac{1 - \nu^2}{Eh} Q_i, \quad i = \overline{1, 3};$$

$$\vec{U} = \{u, v, w\}, \quad \delta(p) = \begin{cases} 1 & \text{при } p \in S_1, \\ 0 & \text{при } p \notin S_1. \end{cases}$$

В свою очередь потенциал смещений частиц жидкости определяется из решения следующей краевой задачи

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} = 0, \quad (x, y, z) \in D,$$

$$\left. \frac{\partial \chi}{\partial n} \right|_{S_1} = w(p, t), \quad \left(\frac{\partial \chi}{\partial z} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} + \widehat{f(t)} \right) \Big|_{\Sigma} = 0. \quad (8)$$

Характерной особенностью сформулированных краевых задач для перемещений оболочки и для потенциала смещений жидкости является необходимость совместного интегрирования уравнений для вектор-функции \vec{U} , определенной в точках срединной поверхности оболочки и уравнений для функции $\chi(x, y, z, t)$, заданной в трехмерной области D . Функция $\chi(x, y, z, t)$ зависит от нормального прогиба оболочки $w(p, t)$, поскольку он входит в граничное условие на части границы S_1 области D . В свою очередь функция $w(p, t)$ зависит от функции $\chi(x, y, z, t)$, которая входит в вектор \vec{f} в уравнении (7). В связи с этим непосредственное решение краевой задачи (7), (8) в общем случае представляет собою достаточно сложную задачу. Поэтому в дальнейшем для ее решения будем применять приближенные методы, позволяющие свести решение исходной задачи для уравнений в частных производных к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений, независимой переменной в которых является время.

3. Сведение уравнений возмущенного движения оболочки с жидкостью к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

Аналогично, как и в динамике твердого тела с жидким заполнением [19], [20], представим потенциал смещений жидкости в виде суммы двух гармонических функций

$$\chi = \Phi(x, y, z, t) + \Psi(x, y, z, t), \quad (9)$$

где Φ — потенциал смещений частиц жидкости, обусловленный деформацией оболочки, при условии, что свободная поверхность представляет собой плоскость, параллельную поверхности Σ (иными словами, отсутствуют волновые движения); Ψ — потенциал волновых движений жидкости.

Функцию Φ определим как решение следующей краевой задачи:

$$\Delta\Phi = 0, \quad (x, y, z) \in D; \quad \left. \frac{\partial\Phi}{\partial n} \right|_{S_1} = w(p, t); \quad \left. \frac{\partial\Phi}{\partial n} \right|_{\Sigma} = c(t), \quad (10)$$

где $c(t)$ — произвольная функция времени t , p — координаты любой точки срединной поверхности оболочки.

Функцию $c(t)$ выберем таким образом, чтобы выполнялось условие разрешимости задачи Неймана для уравнения Лапласа (10), которое есть условием равенства потока жидкости через замкнутую поверхность $\Sigma + S_1$:

$$\int_{\Sigma+S_1} \frac{\partial\Phi}{\partial n} dS = 0.$$

Откуда следует, что

$$c(t) = -\frac{1}{\Sigma} \int_{S_1} w(p, t) dS. \quad (11)$$

Здесь Σ — площадь невозмущенной свободной поверхности жидкости.

Приведение уравнений (7) и (8) с учетом соответствующих граничных условий к бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений можно осуществить методом Бубнова – Галеркина. Для реализации этого метода необходимо располагать некоторой

системой линейно независимых функций, удовлетворяющих граничным условиям задачи и условиям полноты.

Введем в рассмотрение спектральную задачу с параметром в граничном условии

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_k(x, y, z) &= 0, \quad (x, y, z) \in D, \\ \frac{\partial\varphi_k}{\partial n}\Big|_{S_1} &= 0, \quad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varkappa_k\varphi_k\right)\Big|_{\Sigma} = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

В соответствии с уравнениями (8), краевая задача (12) описывает собственные колебания жидкости в неподвижном сосуде. При этом квадрат частоты σ_k^2 k -ой формы собственных колебаний жидкости связан с частотным параметром \varkappa_k соотношением

$$\sigma_k^2 = \eta\varkappa_k. \quad (13)$$

Все собственные значения спектральной задачи (12) действительны, положительны и имеют единственную предельную точку, расположенную на бесконечности. В свою очередь, совокупность собственных функций обладает свойством полноты на поверхности Σ и удовлетворяет следующим условиям ортогональности [21]:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \frac{\partial\varphi_k}{\partial n} d\Sigma &= \int_{\Sigma} \varphi_k d\Sigma = 0; \quad \int_{\Sigma} \varphi_k \varphi_l d\Sigma = 0; \\ \int_{\Sigma} \frac{\partial\varphi_k}{\partial n} \frac{\partial\varphi_l}{\partial n} d\Sigma &= 0, \quad (k \neq l). \end{aligned} \quad (14)$$

Составляющую Ψ потенциала смещений жидкости (9) представим в виде разложения в обобщенный ряд Фурье по функциям φ_k :

$$\Psi(x, y, z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} r_k(t)\varphi_k(x, y, z). \quad (15)$$

Коэффициенты Фурье $r_k(t)$ имеют смысл обобщенных координат, характеризующих волновые движения жидкости в оболочке.

Обобщенные координаты жидкости $r_k(t)$ будем определять из динамического условия для потенциала смещений жидкости χ (8) на ее свободной поверхности. Для этого подставим в граничное условие на Σ (8) выражения (9) и (15). Полученное соотношение умножим на

$a\partial\varphi_l/\partial n$ и проинтегрируем его по области Σ . С учетом условий ортогональности (14) и того, что функция $\Phi(x, y, z, t)$ является решением краевой задачи (10), получим следующее уравнение относительно $r_k(t)$

$$a\mu_k(\ddot{r}_k + \sigma_k^2 r_k) = -a \int_{\Sigma} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} d\Sigma, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (16)$$

где

$$\mu_k = \int_{\Sigma} \varphi_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} d\Sigma.$$

Далее выберем базис для аппроксимации перемещений оболочки и составляющей потенциала смещений жидкости Φ . Сформулируем вспомогательную спектральную задачу, описывающую свободные колебания оболочки с жидкостью при условии, что свободная поверхность жидкости представляет собой плоскость, перпендикулярную продольной оси оболочки. Эту задачу можно сформулировать, исходя из уравнений (7). Для этого в них следует положить $X_i \equiv 0$, для потенциала смещений жидкости (7) положить $\Psi \equiv 0$ и отделить временную координату по формулам

$$[u, v, w] = \exp^{i\Omega t} [u, v, w]; \quad \Phi = \exp^{i\Omega t} \Phi \quad c(t) = \exp^{i\Omega t} C.$$

Будем считать, что вектор - функция $\vec{U} = \{u, v, w\}$ принадлежит вещественному пространству H вектор - функций, удовлетворяющих граничным условиям крепления краев оболочки. Тогда с учетом введенных обозначений сформулированная спектральная задача будет иметь следующий вид:

$$L\vec{U} - \Omega^2 M\vec{U} = 0 \quad M\vec{U} = \left\{ u, v, w + a\delta(p) \left(\Phi - \frac{1}{\Sigma} \int_{\Sigma} \Phi d\Sigma \right) \right\}, \quad (17)$$

$$\Delta\Phi = 0, \quad (x, y, z) \in D, \quad \left. \frac{\partial\Phi}{\partial n} \right|_{S_1} = w, \quad \left. \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right|_{\Sigma} = C. \quad (18)$$

Определим скалярное произведение векторов в H формулой

$$(\vec{U}_1, \vec{U}_2) = \int_S (u_1 u_2 + v_1 v_2 + w_1 w_2) dS.$$

Рассмотрим свойства операторов L и M . Оператор L является симметричным. Это значит, что для любых трехкомпонентных вектор-функций $\vec{U}^{(1)}$ и $\vec{U}^{(2)}$, принадлежащих пространству H , справедливо тождество $(L\vec{U}^{(1)}, \vec{U}^{(2)}) = (L\vec{U}^{(2)}, \vec{U}^{(1)})$. Это тождество можно проверить непосредственно, используя формулы интегрирования по частям для поверхностных интегралов. Это можно сделать значительно проще если воспользоваться формулой [22]

$$\begin{aligned} (L\vec{U}^{(1)}, \vec{U}^{(2)}) = & \int_S \left\{ \varepsilon_1^{(1)} \varepsilon_1^{(2)} + \varepsilon_2^{(1)} \varepsilon_2^{(2)} + \nu \left(\varepsilon_2^{(1)} \varepsilon_1^{(2)} + \varepsilon_2^{(2)} \varepsilon_1^{(1)} \right) + \right. \\ & + \frac{(1-\nu)}{2} \omega^{(1)} \omega^{(2)} + c^2 \left[\varkappa_1^{(1)} \varkappa_1^{(2)} + \varkappa_2^{(1)} \varkappa_2^{(2)} + \right. \\ & \left. \left. + \nu \left(\varkappa_2^{(1)} \varkappa_1^{(2)} + \varkappa_1^{(1)} \varkappa_2^{(2)} \right) + 2(1-\nu) \tau^{(1)} \tau^{(2)} \right] \right\} dS, \end{aligned} \quad (19)$$

где верхние индексы в круглых скобках означают, что в соответствующие формулы для деформаций оболочки внесены компоненты вектор-функций $\vec{U}^{(1)}$ и $\vec{U}^{(2)}$. Из этой формулы следует симметрия оператора L . Если положить $\vec{U}^{(1)} = \vec{U}^{(2)} = \vec{U}$, то получим

$$\begin{aligned} (L\vec{U}, \vec{U}) = & \int_S \left\{ \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + 2\nu \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \frac{(1-\nu)}{2} \omega^2 + \right. \\ & \left. + c^2 \left[\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2 + 2\nu \varkappa_1 \varkappa_2 + 2(1-\nu) \tau^2 \right] \right\} dS. \end{aligned} \quad (20)$$

Правая часть в соотношении (20) равна удвоенной потенциальной энергии деформации оболочки [23], следовательно, оператор L положителен. Можно доказать и более сильное утверждение [22], что оператор L является и положительно определенным т.е. $(L\vec{U}, \vec{U}) \geq \gamma(\vec{U}, \vec{U})$, $\gamma > 0$. В дальнейшем будем предполагать параметры оболочки такими, что наименьшее собственное значение оператора L $\lambda_{\min}(L) > 0$. В этом случае наибольшее возможное значение параметра γ и есть $\lambda_{\min}(L)$. Таким образом наше предположение равносильно требованию положительной определенности оператора L .

Для оператора M будем иметь

$$\begin{aligned}
 (M\vec{U}_1, \vec{U}_2) &= \int_S \left[u_1 u_2 + v_1 v_2 + w_1 w_2 + \right. \\
 &\left. + a\delta(p) \left(\Phi_1 - \frac{1}{\Sigma} \int_{\Sigma} \Phi_1 d\Sigma \right) w_2 \right] dS.
 \end{aligned}
 \tag{21}$$

Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned}
 \int_{S_1} \left(\Phi_1 - \frac{1}{\Sigma} \int_{\Sigma} \Phi_1 d\Sigma \right) w_2 dS &= \int_{S_1} \left(\Phi_1 - \frac{1}{\Sigma} \int_{\Sigma} \Phi_1 d\Sigma \right) \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} dS = \\
 &= \int_{\Sigma+S_1} \left(\Phi_1 - \frac{1}{\Sigma} \int_{\Sigma} \Phi_1 d\Sigma \right) \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} dS = \int_{S_1} \left(\Phi_2 - \frac{1}{\Sigma} \int_{\Sigma} \Phi_2 d\Sigma \right) w_1 dS.
 \end{aligned}$$

Здесь была использована формула Грина для гармонических функций, преобразующая интеграл по поверхности $\Sigma + S_1$ в объемный интеграл, а также соотношение

$$\int_{\Sigma} \left(\Phi_1 - \frac{1}{\Sigma} \int_{\Sigma} \Phi_1 d\Sigma \right) \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} d\Sigma = 0,$$

которое вытекает из граничных условий для функции Φ_2 на поверхности Σ .

Из формул (21) следует, что оператор M симметричен и положителен [24]. На основании общих теорем теории спектральных задач [25] с учетом установленных свойств операторов L и M можно сформулировать ряд утверждений для собственных значений и собственных функций задачи (17), (18). Рассматриваемая задача имеет дискретный спектр $0 < \Omega_1^2 \leq \Omega_2^2 \leq \dots \leq \Omega_n^2 \dots$, причем $\Omega_n^2 \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Совокупность соответствующих собственных функций \vec{U}_i полна в пространстве вектор-функций из H и удовлетворяет следующим условиям ортогональности:

$$(L\vec{U}_i, \vec{U}_j) = (M\vec{U}_i, \vec{U}_j) = 0 \quad \text{при } i \neq j.
 \tag{22}$$

Вследствие этого произвольная квадратично суммируемая на поверхности S вектор-функция может быть разложена в ряд по системе собственных функций \vec{U}_i , который будет сходиться покомпонентно в

средне квадратичном смысле. Таким образом собственные функции спектральной задачи (17), (18) могут быть использованы для сведения уравнений в частных производных (7), (8) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

Представим перемещения срединной поверхности оболочки и потенциал смещений жидкости Φ в виде следующих разложений

$$\vec{U}(p, t) = \sum_{j=1}^{\infty} s_j(t) \vec{U}_j(p); \quad \Phi = \sum_{j=1}^{\infty} s_j(t) \Phi_j(x, y, z), \quad (23)$$

где Φ_j — гармонические функции, удовлетворяющие граничным условиям

$$\left. \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} \right|_{S_1} = w_j(p); \quad \left. \frac{\partial \Phi_j}{\partial z} \right|_{\Sigma} = -\frac{1}{\Sigma} \int_{S_1} w_j(p) dS.$$

Следует отметить, что при таком представлении решений задачи (7) выполняются все граничные условия для перемещений оболочки, в том числе и кинематическое граничное условие $\partial \Phi / \partial n|_{S_1} = w$.

Подставим разложения (23) в уравнения (7) и (16). Полученное уравнение (7) умножим скалярно на \vec{U}_i и проинтегрируем полученный результат по всей поверхности оболочки S . Тогда с учетом условий ортогональности (22) и соотношения $(L\vec{U}_i, \vec{U}_i) = \Omega_i^2 M(\vec{U}_i, \vec{U}_i)$ получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} a_i (\ddot{s}_i + \Omega_i^2 s_i) + a \sum_{k=1}^{\infty} \ddot{r}_k \lambda_{ik} &= \tilde{Q}_i, \\ a \mu_k (\ddot{r}_k + \sigma_k^2 r_k) + a \sum_{i=1}^{\infty} \ddot{s}_i \gamma_{ki} &= 0, \quad (i, k = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь

$$\begin{aligned} a_i &= \int_S (u_i^2 + v_i^2 + w_i^2) dS + a \int_L \left(\Phi_i - \frac{1}{\Sigma} \int_{\Sigma} \Phi_i dS \right) w_i dS, \\ \lambda_{ik} &= \int_{S_1} \varphi_k w_i dS, \quad \gamma_{ki} = \int_{\Sigma} \Phi_i \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} dS, \quad \tilde{Q}_i = \int_S (\vec{X}, \vec{U}_i) dS. \end{aligned}$$

Покажем симметрию коэффициентов λ_{ik} и γ_{ki} :

$$\gamma_{ki} = \int_{\Sigma} \Phi_i \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} dS = \int_{\Sigma+S_1} \Phi_i \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} dS = \int_{S_1} \varphi_k \frac{\partial \Phi_i}{\partial n} dS = \int_{S_1} \varphi_k w_i dS = \lambda_{ik}.$$

При этом была использована формула Грина для гармонических функций φ и ψ

$$\int_S \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS = \int_S \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS,$$

где S — замкнутая поверхность, ограничивающая область D .

Система уравнений (24) для описания возмущенного движения упругой оболочки, частично заполненной жидкостью, может быть сведена к аналогичным уравнениям, которые получены в работах [2] и [18] на основе использования принципа возможных перемещений.

Уравнения (24) могут быть использованы для приближенного определения свободных колебаний жидкости в упругом резервуаре. Для этого следует положить

$$s_i = \exp^{i\omega t} S_i, \quad r_k = \exp^{i\omega t} R_k, \quad \tilde{Q}_i \equiv 0. \quad (25)$$

С учетом этого и ограничиваясь конечным числом обобщенных координат для определения амплитуд S_i , R_k и частот колебаний ω , получим следующую однородную конечную систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} (G - \lambda^2 F) \vec{y} &= 0, \quad \vec{y} = \{S_1, S_2, \dots, S_{s_0}; R_1, R_2, \dots, R_{r_0}\}, \\ \lambda^2 &= \frac{(1 - \nu^2) \rho R_0^2 \omega^2}{E}. \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь элементы g_{ij} и f_{ij} верхней части относительно главной диагонали симметричных матриц G и F соответственно имеют вид:

$$\begin{aligned} g_{i,j} &= \delta_{ij} a_i \Omega_i^2, \quad f_{ij} = \delta_{ij} a_i, \quad (i, j = \overline{1, s_0}), \\ g_{i,j+s_0} &= 0, \quad f_{i,j+s_0} = a \lambda_{ij}, \quad (i = \overline{1, s_0}, j = \overline{1, r_0}), \\ g_{i+s_0,j+s_0} &= \delta_{ij} a \mu_i \sigma_i^2, \quad f_{i+s_0,j+s_0} = \delta_{ij} a \mu_i, \quad (i, j = \overline{1, r_0}), \\ \delta_{ij} &= \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases} \end{aligned}$$

Определение коэффициентов уравнений (24) связано с вычислением квадратур от решений спектральных задач (12) и (17), (18).

4. Применение вариационных методов для построения решений дополнительно введенных спектральных задач

Для оболочек вращения компоненты перемещений точек срединной поверхности оболочки u , v , w и потенциал смещений частиц жидкости Φ с учетом условий их периодичности по углу β можно представить в виде:

$$\begin{aligned} u(s, \beta) &= u(s) \cos n\beta, & v(s, \beta) &= v(s) \sin n\beta, \\ w(s, \beta) &= w(s) \cos n\beta, & \Phi(z, r, \beta) &= \Phi(z, r) \cos n\beta, \end{aligned} \quad (27)$$

где n – число волн упругой поверхности оболочки и жидкости в окружном направлении, рассматриваемое в дальнейшем в качестве параметра.

Заметим, что интегралы

$$\int_{S_1} w ds, \quad \int_{\Sigma} w d\Sigma, \quad \int_{\Sigma} \Phi d\Sigma,$$

встречающиеся в приведенных выше формулах не равны нулю только для случая осесимметричных колебаний при $n = 0$. Для других целочисленных значений параметра n эти интегралы равны нулю.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением неосесимметричных колебаний оболочки с жидкостью при $n > 0$.

После отделения угловой координаты β для составляющей потенциала смещений жидкости $\Phi(z, r)$ будем иметь следующую краевую задачу Неймана:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) - \frac{n^2}{r^2} \Phi &= 0, & (z, r) &\in Q, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{L_0} &= 0; & \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_{L_1} &= w, \end{aligned} \quad (28)$$

где Q , L_0 и L_1 – меридиональное сечение области D , поверхностей Σ и S_1 соответственно.

Введем в рассмотрение оператор G [26], который значениям функции $w(s)$, заданной на контуре L_1 , ставит в соответствие функцию Φ , определенную в области Q и являющуюся решением краевой задачи

(28). Это соответствие запишем в виде:

$$\Phi = Gw. \tag{29}$$

Здесь G — интегральный оператор, ядром которого является функция Грина второй краевой задачи (28). Если область имеет каноническую форму, то эту функцию можно построить в явном виде.

Будем считать, что вектор-функция $\vec{U} = \{u(s), v(s), w(s)\}$ принадлежит к классу H функций, определенных в точках меридионального сечения оболочки и удовлетворяющих условиям крепления ее торцов. Тогда исходную спектральную задачу (17), (18) можно представить в следующем операторном виде:

$$\Im(\vec{U}) = L\vec{U} - \Omega^2 M\vec{U} = 0; \quad M = \text{diag}\{1, 1, 1 + \delta(p)aG\}, \tag{30}$$

где L — матричный оператор, порожденный дифференциальными уравнениями (1) после отделения в них угловой координаты и перехода к безразмерным величинам.

Решения системы интегро – дифференциальных уравнений (30), имеющей восьмой порядок, должны быть подчинены соответствующим однородным граничным условиям. Граничные условия накладываются либо на перемещение оболочки, либо на соответствующие им силы. Так для абсолютно жесткого крепления края оболочки при $s = s_1$ эти условия примут вид:

$$\left[u = v = w = \frac{dw}{ds} = 0 \right]_{s=s_1}. \tag{31}$$

Для свободного края оболочки при $s = s_2$ имеют место следующие силовые граничные условия

$$\left[T_1 = S = \tilde{Q}_1 = M_1 = 0 \right]_{s=s_2}. \tag{32}$$

Здесь T_1 , S , \tilde{Q}_1 и M_1 — безразмерные погонные усилия, обобщенная перерезывающая сила и момент, которые выражаются через перемещения оболочки по формулам:

$$T_1 = \frac{du}{ds} + \frac{w}{R_1} + \nu \left(\frac{n}{r}v + \frac{r'}{r}u + \frac{w}{R_2} \right);$$

$$S = \frac{1 - \nu}{2} \left(\frac{n}{r}u + \frac{dv}{ds} - \frac{r'}{r}v \right);$$

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_1 &= -c^2 \left\{ \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{ds} \left(r \frac{dw}{ds} \right) - \frac{n^2}{r^2} w \right] - \frac{(1-\nu)n^2}{r^2} \left(\frac{dw}{ds} - \frac{r'}{r} w \right) \right\}; \\ M_1 &= c^2 \left[-\frac{d^2 w}{ds^2} + \nu \left(\frac{n^2}{r^2} w - \frac{r'}{r} \frac{dw}{ds} \right) \right].\end{aligned}$$

В других случаях крепления края оболочки используются комбинации граничных условий (31) и (32). Для оболочек в форме купола при построении решений следует учитывать асимптотическое поведение искомых функций при $s \rightarrow 0$ [27].

Поскольку оболочка подвержена действию разрывной динамической нагрузки, то для эффективного построения приближенного решения системы (30) целесообразно разбить область изменения параметра s на две подобласти. Пусть $s = \zeta$ соответствует уровню жидкости, на который заполнена оболочка. Разобьем область $[s_1, s_2]$ точкой $s = \zeta$ на две подобласти $G^{(1)} = [s_1, \zeta]$ и $G^{(2)} = [\zeta, s_2]$. Область $G^{(1)}$ соответствует смоченной части оболочки, а область $G^{(2)}$ — оставшейся несмоченной части. Обозначим решения исходной задачи в под областях $G^{(1)}$ и $G^{(2)}$ соответственно через $\vec{U}^{(1)}$ и $\vec{U}^{(2)}$. В дальнейшем верхний индекс во всех встречающихся функциях будет обозначать область, в которой эти функции определены. В дальнейшем, для определенности, будем считать, что нижний торец оболочки жестко закреплен, а верхний — свободен. Кроме граничных условий (31), (32) в сечении $s = \zeta$ должны выполняться определенные граничные условия сопряжения решений $\vec{U}^{(1)}(s)$ и $\vec{U}^{(2)}(s)$.

Эквивалентную вариационную постановку исходной спектральной задачи можно получить, исходя из принципа возможных перемещений, согласно которому $\delta\Pi = \delta A$, где $\delta\Pi$ — вариация потенциальной энергии деформации оболочки [23]. Работу внешних сил δA на возможных перемещениях оболочки можно представить в следующем виде:

$$\delta A = \int_{s_1}^{s_2} \vec{Q}, \delta \vec{U} r ds = \Omega^2 \int_{s_1}^{s_2} [u \delta u + v \delta v + (w + \delta(p) a G(w)) \delta w] r ds. \quad (33)$$

В итоге исходная спектральная задача сведется к отысканию стационарных значений для функционала $I(\vec{U})$

$$I(\vec{U}) = \int_{s_1}^{s_2} F(\vec{U}) r ds.$$

Представим этот функционал в следующем виде:

$$I = \int_{G^{(1)}} F(\vec{U}^{(1)})dG^{(1)} + \int_{G^{(2)}} F(\vec{U}^{(2)})dG^{(2)}. \quad (34)$$

Будем предполагать, что в каждой из подобластей, в соответствии с теорией тонких изотропных оболочек, поля смещений, деформаций и напряжений обладают свойствами непрерывности и дифференцируемости. Вычислим первую вариацию от функционала (34), не накладывая никаких ограничений на варьируемые функции, кроме граничных условий (31). Тогда с учетом интегрирования по частям и принятых обозначений эту вариацию можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \delta I = & \sum_{k=1}^2 \int_{G^{(k)}} \mathfrak{Z}(\vec{U}^{(k)})dG^{(k)} + \\ & + \left(T_1^{(1)}\delta u^{(1)} + S^{(1)}\delta v^{(1)} + \tilde{Q}_1^{(1)}\delta w^{(1)} - M_1^{(1)}\frac{d\delta w^{(1)}}{ds} \right)_{s=\zeta} - \\ & - \left(T_1^{(2)}\delta u^{(2)} + S^{(2)}\delta v^{(2)} + \tilde{Q}_1^{(2)}\delta w^{(2)} - M_1^{(2)}\frac{d\delta w^{(2)}}{ds} \right)_{s=\zeta} + \\ & + \left(T_1^{(2)}\delta u^{(2)} + S^{(2)}\delta v^{(2)} + \tilde{Q}_1^{(2)}\delta w^{(2)} - M_1^{(2)}\frac{d\delta w^{(2)}}{ds} \right)_{s=s_2}. \end{aligned} \quad (35)$$

Приравнявая δI к нулю, получим вариационное уравнение для нахождения функций $\vec{U}^{(k)}(s)$. Из этого уравнения в силу произвольности варьирования функций в областях $G^{(k)}$ и на границе при $s = s_2$ следует, что в пределах каждой из введенных подобластей должны выполняться исходные уравнения и граничные условия свободного края оболочки при $s = s_2$. Далее, если предположить, что класс допустимых функций при $s = \zeta$ подчинен условиям

$$u^{(1)} = u^{(2)}; \quad v^{(1)} = v^{(2)}; \quad w^{(1)} = w^{(2)}; \quad \frac{dw^{(1)}}{ds} = \frac{dw^{(2)}}{ds}, \quad (36)$$

то из (35) вытекают следующие силовые граничные условия при $s = \zeta$:

$$T_1^{(1)} = T_1^{(2)}; \quad S^{(1)} = S^{(2)}; \quad M_1^{(1)} = M_1^{(2)}; \quad \tilde{Q}_1^{(1)} = \tilde{Q}_1^{(2)}. \quad (37)$$

При этом следует заметить, что условия (37) являются естественными граничными условиями для функционала (34).

Итак, при использовании метода Ритца для решения вариационного уравнения $\delta I = 0$ аппроксимации для функций $u^{(k)}$, $v^{(k)}$ и $w^{(k)}$ должны выбираться таким образом, чтобы они обеспечивали выполнение условий (36). В этом случае остальные граничные условия задачи, кроме условий (31), будут естественными граничными условиями для функционала (34). Построение решений, заведомо удовлетворяющих условиям (36), представляет собою в общем случае достаточно трудную самостоятельную задачу. В связи с этим возникает вопрос о преобразовании функционала (34) в такой функционал, для которого условия сопряжения (36) были бы естественными условиями.

Теория преобразования вариационных задач создана уже давно [28], но в литературе известны лишь немногие примеры применения ее к конкретным задачам.

Граничные условия (36) при $s = \zeta$ можно рассматривать как дополнительные ограничения на задачу нахождения стационарного значения функционала $I(\vec{U})$. Одним из способов учета ограничений в форме равенств является метод неопределенных множителей Лагранжа [28]. В соответствии с этим методом в рассмотрение новый функционал Π_1 , который имеет вид

$$\begin{aligned} \Pi_1(\vec{U}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = I(\vec{U}) + \left[\alpha_1(u^{(1)} - u^{(2)}) + \alpha_2(v^{(1)} - v^{(2)}) + \right. \\ \left. + \alpha_3(w^{(1)} - w^{(2)}) + \alpha_4 \left(\frac{dw^{(1)}}{ds} - \frac{dw^{(2)}}{ds} \right) \right]_{s=\zeta}, \end{aligned} \quad (38)$$

где α_i ($i = \overline{1,4}$) — множители Лагранжа, подлежащие определению в дальнейшем. Исходная вариационная задача при этом переходит в следующую:

$$\delta \Pi_1(\vec{U}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 0. \quad (39)$$

Преобразование функционала I в функционал Π_1 достигается ценой увеличения количества неизвестных. Нужно искать стационарное значение функционала Π_1 не только по u , v и w , но и по α_1 , α_2 , α_3 и α_4 . Эту задачу можно существенно упростить, если предварительно найти явные выражения для множителей Лагранжа через сами решения \vec{U} и их производные. С этой целью вычислим первую ва-

риацию функционала Π_1 при свободном варьировании функций $\vec{U}^{(i)}$ ($i = 1, 2$) и постоянных α_i ($i = \overline{1, 4}$).

Из вариационного уравнения (39) выпишем только внеинтегральные члены при $s = \zeta$. При этом будем иметь

$$\left[\delta\alpha_1(u^{(1)} - u^{(2)}) + \delta\alpha_2(v^{(1)} - v^{(2)}) + \delta\alpha_3(w^{(1)} - w^{(2)}) + \right. \\ \left. + \delta\alpha_4 \left(\frac{dw^{(1)}}{ds} - \frac{dw^{(2)}}{ds} \right) + (T_1^{(1)} + \alpha_1)\delta u^{(1)} - (T_1^{(2)} + \alpha_1)\delta u^{(2)} + \right. \\ \left. + (S^{(1)} + \alpha_2)\delta v^{(1)} - (S^{(2)} + \alpha_2)\delta v^{(2)} + (\tilde{Q}_1^{(1)} + \alpha_3)\delta w^{(1)} + \right. \\ \left. + (\tilde{Q}_1^{(2)} + \alpha_3)\delta w^{(2)} + (\alpha_4 - M_1^{(1)})\frac{d\delta w^{(1)}}{ds} + (M_1^{(2)} - \alpha_4)\frac{d\delta w^{(2)}}{ds} \right]_{s=\zeta}.$$

Если функционал (38) принимает стационарное значение для произвольных вариаций $\delta\vec{U}^{(i)}$, $\frac{d\delta w^{(i)}}{ds}$ ($i = 1, 2$) и $\delta\alpha_i$ ($i = \overline{1, 4}$), то из этого выражения следует, что в точке $s = \zeta$ будут выполняться кинематические условия сопряжения (36), а также соотношения

$$\alpha_1 = -T_1^{(1)}; \quad \alpha_1 = -T_1^{(2)}; \quad \alpha_2 = -S^{(1)}; \quad \alpha_2 = -S^{(2)}; \\ \alpha_3 = -\tilde{Q}_1^{(1)}; \quad \alpha_3 = -\tilde{Q}_1^{(2)}; \quad \alpha_4 = M_1^{(1)}; \quad \alpha_4 = M_1^{(2)}.$$

Из этих формул можно установить следующие выражения для множителей Лагранжа:

$$\alpha_1 = -\frac{1}{2} \left(T_1^{(1)} + T_1^{(2)} \right) \Big|_{s=\zeta}; \quad \alpha_2 = -\frac{1}{2} \left(S^{(1)} + S^{(2)} \right) \Big|_{s=\zeta}; \\ \alpha_3 = -\frac{1}{2} \left(\tilde{Q}_1^{(1)} + \tilde{Q}_1^{(2)} \right) \Big|_{s=\zeta}; \quad \alpha_4 = \frac{1}{2} \left(M_1^{(1)} + M_1^{(2)} \right) \Big|_{s=\zeta}. \quad (40)$$

Исключая α_i ($i = \overline{1, 4}$) из функционала (38) с помощью установленных для них выражений (40), получим обобщенный функционал Π_2 , зависящий только от $\vec{U}(s)$. Краевые условия (32), (36) и (37) будут автоматически выполняться для функций, доставляющих функционалу $\Pi_2(\vec{U})$ стационарное значение.

Полученный функционал служит теоретической основой для построения прямых методов решения рассматриваемой задачи. На основе метода Ритца эти решения будут иметь аналитическую форму.

Представим функции $u^{(k)}(s)$, $v^{(k)}(s)$ и $w^{(k)}(s)$ ($k = 1, 2$) в виде следующих отрезков обобщенных рядов:

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= \sum_{j=1}^N x_j U_j^{(1)}(s); & v^{(1)} &= \sum_{j=1}^N x_{j+N} V_j^{(1)}(s); \\ w^{(1)} &= \sum_{j=1}^N x_{j+2N} W_j^{(1)}(s); & u^{(2)} &= \sum_{j=1}^N x_{j+3N} U_j^{(2)}(s); \\ v^{(2)} &= \sum_{j=1}^N x_{j+4N} V_j^{(2)}(s); & w^{(2)} &= \sum_{j=1}^N x_{j+5N} W_j^{(2)}(s). \end{aligned} \quad (41)$$

Здесь x_j ($j = \overline{1, 6N}$) — произвольные постоянные, подлежащие определению в дальнейшем; $U_j^{(k)}(s)$, $V_j^{(k)}(s)$ и $W_j^{(k)}(s)$ — системы координатных функций, которые определены соответственно в подобластях $G^{(k)}$ ($k = 1, 2$).

Координатные функции выберем в виде

$$\begin{aligned} U_j^{(1)} &= V_j^{(1)} = (s - s_1) P_j(x); & W_j^{(1)} &= (s - s_1)^2 P_j(x); & x &= \frac{2(s - \zeta)}{\zeta - s_1} + 1; \\ U_j^{(2)} &= V_j^{(2)} = W_j^{(2)} = P_j(y); & y &= \frac{2s}{s_2 - \zeta} - \frac{s_2 + \zeta}{s_2 - \zeta}, \end{aligned}$$

где $P_j(z)$ — смещенные на единицу по индексу j многочлены Лежандра с аргументами, которые преобразуют интервалы $[s_1, \zeta]$ и $[\zeta, s_2]$ на интервал $[-1, 1]$.

Введенные системы базисных функций являются линейно независимыми и полными функциями в соответствующих подобластях. Системы координатных функций с верхним индексом, равным единице, подчинены граничным условиям (31).

Подставим разложения (41) в функционал $\Pi_2(\vec{U})$. Из необходимых условий стационарности обобщенного функционала получим однородную систему алгебраических уравнений

$$(A - \Omega^2 B) \vec{X} = 0, \quad (42)$$

где $\vec{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_{6N}\}$. Коэффициенты a_{ij} симметричной матрицы A полностью совпадают с соответствующими элементами матрицы A

работы [29], где с позиций метода декомпозиции области предложен алгоритм расчета свободных колебаний оболочек вращения, не взаимодействующих с жидкостью.

Коэффициенты b_{ij} симметричной матрицы B вычисляются по следующим формулам:

$$\begin{aligned}
 b_{i,j} &= \int_{s_1}^{\zeta} U_i^{(1)} U_j^{(1)} r ds; & b_{i+N,j+N} &= \int_{s_1}^{\zeta} V_i^{(1)} V_j^{(1)} r ds; \\
 b_{i+2N,j+2N} &= \int_{s_1}^{\zeta} \left(W_i^{(1)} + aGW_i^{(1)}|_{L_1} \right) W_j^{(1)} r ds; \\
 b_{i+3N,j+3N} &= \int_{\zeta}^{s_2} U_i^{(2)} U_j^{(2)} r ds; & b_{i+4N,j+4N} &= \int_{\zeta}^{s_2} V_i^{(2)} V_j^{(2)} r ds; \\
 b_{i+4N,j+4N} &= \int_{\zeta}^{s_2} W_i^{(2)} W_j^{(2)} r ds; & (i, j &= \overline{1, N}).
 \end{aligned}
 \tag{43}$$

Остальные коэффициенты матрицы B равны нулю.

При вычислении элементов матрицы $b_{i+2N,j+2N}$ ($i, j = \overline{1, N}$) необходимо знать функции $F_k(z, r)$ на контуре L_1 , которые являются решениями следующих задач Неймана:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 F_k}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial F_k}{\partial r} \right) - \frac{n^2}{r^2} F_k &= 0, & (z, r) &\in Q, \\
 \frac{\partial F_k}{\partial z} \Big|_{L_0} &= 0; & \left(\frac{\partial F_k}{\partial n} \right) \Big|_{L_1} &= W_k^{(1)}, & (k = \overline{1, N}).
 \end{aligned}
 \tag{44}$$

В отличие от задачи (28) граничное условие на контуре L_1 содержит уже известные функции $W_k^{(1)}$, которые выбраны в качестве координатных функций для аппроксимации нормального прогиба оболочки $w^{(1)}(s)$ в области $G^{(1)}$.

Решения краевых задач (44) для произвольной оболочки вращения могут быть найдены приближенно с помощью метода Трефтца, если их предварительно свести к эквивалентным вариационным за-

дочам для функционалов:

$$I_k = \int_Q \left[r \left(\frac{\partial F_k}{\partial z} \right)^2 + r \left(\frac{\partial F_k}{\partial r} \right)^2 + \frac{n^2}{r} (F_k)^2 \right] dz dr - \\ - 2 \int_{L_1} r F_k W_k^{(1)} ds, \quad (k = \overline{1, N}). \quad (45)$$

В качестве координатных функций выберем систему частных решений уравнения (44), которые линейно независимы и полны на любом замкнутом контуре Q [21]. В этом случае решения задач (44) представим в виде разложений:

$$F_k(z, r) = \sum_{j=1}^q d_j^{(k)} \Psi_j(z, r). \quad (46)$$

Здесь $d_j^{(k)}$ — произвольные постоянные,

$$\Psi_j = \frac{2^n n! (j-n)!}{(j+n)!} R^j P_j^{(n)}(\cos \theta),$$

где $R = \sqrt{z^2 + r^2}$, $\cos \theta = z/R$, $P_j^{(n)}$ — присоединенные функции Лежандра первого рода.

Координатные функции $\Psi_j(z, r)$ и их производные удобно вычислять по следующим рекуррентным соотношениям:

$$\Psi_{j+1} = \frac{1}{j+2n} \{ [2(j+n) - 1] z \Psi_j - (j-1)(z^2 + r^2) \Psi_{j-1} \}; \\ \frac{\partial \Psi_{j+1}}{\partial z} = j \Psi_j, \quad \frac{\partial \Psi_{j+1}}{\partial r} = \frac{(j+n) \Psi_{j+1} - j z \Psi_j}{r}.$$

Приведенные соотношения позволяют построить системы частных решений исходных уравнений и их производных для любого значения параметра n и индекса j , если при этом положить:

$$\Psi_1 = r^n, \quad \frac{\partial \Psi_1}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \Psi_1}{\partial r} = nr^{(n-1)}.$$

Постоянные $d_j^{(k)}$ в разложениях (46) найдем из условий, что функции $F_k(z, r)$ должны доставлять минимумы квадратичным функционалам (45). Эти условия приводят к следующим системам линейных

неоднородных уравнений относительно компонент векторов-столбцов $\vec{d}^{(k)} = \{d_1^{(k)}, d_2^{(k)}, \dots, d_q^{(k)}\}$:

$$D\vec{d}^{(k)} = \vec{\gamma}^{(k)}, \quad (k = \overline{1, N}), \quad (47)$$

где коэффициенты d_{ij} симметричной матрицы D и элементы $\gamma_i^{(k)}$ вектор-столбцов $\vec{\gamma}^{(k)}$ определяются по формулам

$$d_{i,j} = \int_{L_0+L_1} r \Psi_i \frac{\partial \Psi_j}{\partial n} ds; \quad \gamma_i^{(k)} = \int_{L_1} r W_k^{(1)} \Psi_i ds, \quad (i, j = \overline{1, q}).$$

При выводе этих выражений было учтено, что координатные функции $\Psi_i(z, r)$ удовлетворяют исходному уравнению (44). Это позволило свести двойные интегралы по области Q к одномерным интегралам по ее границе, что существенно упростило алгоритм решения краевых задач (44).

Таким образом, решение спектральной задачи (17), (18) сведено к решению однородной системы линейных алгебраических уравнений (42). Из условия существования нетривиальных решений этой системы находим частоты Ω_i ($i = 1, 2, \dots$) колебаний рассматриваемой механической системы. Затем из уравнений (42) находятя вектора $\vec{X}^{(i)} = \{x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_{6N}^{(i)}\}$, соответствующие каждой найденной частоте Ω_i . Знание векторов $\vec{X}^{(i)}$ позволяет определить формы колебаний оболочки по формулам (41). В свою очередь потенциал смещений жидкости, соответствующий i -му тону колебаний системы, определяется следующим образом:

$$\Phi_i(z, r) = \sum_{j=1}^N x_{j+2N}^{(i)} F_j(z, r).$$

Для учета волновых движений жидкости в оболочке необходимо располагать решениями спектральной задачи (12) с параметром в граничном условии. Собственные функции и собственные значения этой задачи для произвольной оболочки вращения могут быть найдены приближенно методом Трефтца, если краевую задачу (12) после отделения угловой координаты предварительно свести к вариационной задаче. Функционал, соответствующий этой краевой задаче, имеет вид:

$$I(\varphi) = \int_Q \left[r \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 + r \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 + \frac{n^2}{r} \varphi^2 \right] dz dr - \varkappa \int_{L_0} r \varphi^2 ds. \quad (48)$$

Функцию $\varphi(z, r)$ представим в виде разложения

$$\varphi(z, r) = \sum_{k=1}^q a_k \Psi_k(z, r), \quad (49)$$

где a_k — произвольные постоянные, $\Psi_k(z, r)$ — ранее введенная система частных решений уравнения для функции φ .

Из условий стационарности функционала (48) для определения коэффициентов a_k и параметров \varkappa получим однородную систему алгебраических уравнений:

$$(D - \varkappa B_1)\vec{a} = 0, \quad \vec{a} = \{a_1, a_2, \dots, a_q\},$$

где коэффициенты матрицы D совпадают с коэффициентами соответствующей матрицы системы уравнений (47), элементы $\beta_{ij}^{(1)}$ матрицы B_1 вычисляются по формулам

$$\beta_{ij}^{(1)} = \int_{L_0} r \Psi_i \Psi_j ds.$$

Найденные решения для функций $\vec{U}_i(s)$, $\Phi_i(z, r)$ и φ_i позволяют определить коэффициенты уравнений (24) возмущенного движения произвольной оболочки вращения, частично заполненной жидкостью.

5. Результаты расчета колебаний цилиндрической оболочки, частично заполненной жидкостью

В качестве методического примера, иллюстрирующего применение предложенного выше алгоритма, рассмотрим задачу о собственных неосесимметричных колебаниях упругой цилиндрической оболочки длины l с абсолютно жестким и неподвижным дном, которая частично заполнена жидкостью на глубину H . Как и ранее будем считать, что при $z = 0$ ($s = z$) торец оболочки жестко закреплен, а при $z = l$ — свободен.

В качестве характерного линейного размера системы выберем радиус оболочки R_0 . В соответствии с работой [3] выберем следующие безразмерные параметры оболочки:

$$\frac{l}{R_0} = 6.06; \quad \frac{R_0}{h} = 150; \quad a = 19.2; \quad \eta = 0.126 \cdot 10^{-7}.$$

Во всех расчетах в дальнейшем полагалось, что коэффициент Пуассона $\nu = 0.29$. Значения параметров n и $\varepsilon = H/l$ в процессе расчетов варьировались.

В данном случае решение спектральной задачи (12) можно получить методом разделения переменных. При этом собственные функции $\varphi_k(z, r, \beta)$ будут иметь следующий вид:

$$\varphi_k(z, r, \beta) = \frac{\cosh(\xi_k z)}{\xi_k \sinh(\xi_k H)} \cdot \frac{I_n(\xi_k r)}{I_n(\xi_k)} \cos n\beta,$$

где $I_n(x)$ — функции Бесселя первого рода и n -го порядка; ξ_k — k -ый корень уравнения $I'_n(\xi) = 0$.

Собственные значения \varkappa_k задачи (12) и безразмерные коэффициенты μ_k уравнений (16) определяются по формулам

$$\varkappa_k = \xi_k \tanh(\xi_k H); \quad \mu_k = \frac{\pi(\xi_k^2 - n^2)}{2\xi_k^3 \tanh(\xi_k H)}.$$

Для определения свободных колебаний рассматриваемой механической системы после нахождения коэффициентов уравнений (24) a_i , λ_{ik} , Ω_i^2 , μ_k , σ_k^2 необходимо решить однородную алгебраическую систему уравнений (26).

В таблице 1 приведены низшие частоты λ связанных колебаний жидкости и упругой оболочки при числе волн в окружном направлении $n = 2$ и относительной глубине жидкости в оболочке $\varepsilon = 0.25$ в зависимости от количества членов r_0 и s_0 в разложениях (12) и (23) для аппроксимации волновых движений жидкости и перемещений оболочки соответственно.

Из таблицы непосредственно следует, что спектр частот колебаний рассматриваемой механической системы имеет две ветви. Первая $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{r_0}$ связана преимущественно с волновыми движениями свободной поверхности жидкости, а вторая ветвь спектра $\lambda_{r_0+1}, \lambda_{r_0+2}, \dots, \lambda_{r_0+s_0}$ преимущественно связана с деформациями срединной поверхности оболочки, определяемой ее упругими и инерционными свойствами. Для рассматриваемых параметров оболочки низшие частоты преимущественно волновых движений жидкости с точностью до шести значащих цифр совпадают с частотами свободных колебаний жидкости в абсолютно жестком цилиндре. Следовательно в этом случае упругость оболочки практически не влияет на колебания жидкости. В свою очередь волновые движения жидкости

Таблица 1. Значения частот λ_i связанных колебаний рассматриваемой системы при $N = 14$, $q = 10$, $n = 2$, $\varepsilon = 0.25$.

s_0	λ_1	λ_2	λ_3	λ_{r_0}	λ_{r_0+1}	λ_{r_0+2}	λ_{r_0+3}
$r_0 = 0$							
1					.02062		
2					02062	.07459	
3					02062	.07459	.14864
4					02062	.07459	.14864
5					02062	.07459	.14864
$r_0 = 1$							
1	.00020				.02071		
2	.00020				.02071	.08171	
3	.00020				.02071	.08160	.15176
4	.00020				.02071	.08152	.15157
5	.00020				.02071	.08152	.15156
$r_0 = 2$							
1	.00020	.00029			.02072		
2	.00020	.00029			.02072	.08231	
3	.00020	.00029			.02072	.08219	.15193
4	.00020	.00029			.02072	.08209	.15170
5	.00020	.00029			.02072	.08208	.15169
$r_0 = 3$							
1	.00020	.00029	.00035		.02072		
2	.00020	.00029	.00035		.02072	.08250	
3	.00020	.00029	.00035		.02072	.08237	.15197
4	.00020	.00029	.00035		.02072	.08226	.15173
5	.00020	.00029	.00035		.02072	.08226	.15172
$r_0 = 4$							
1	.00020	.00029	.00035	.00041	.02072		
2	.00020	.00029	.00035	.00041	.02072	.08258	
3	.00020	.00029	.00035	.00041	.02072	.08245	.15199
4	.00020	.00029	.00035	.00041	.02072	.08234	.15174
5	.00020	.00029	.00035	.00041	.02072	.08233	.15173

могут существенно влиять на частоты второй ветви связанных колебаний жидкости и оболочки.

Для преимущественно упругих частот колебаний максимальное

перемещение срединной поверхности оболочки всегда больше максимального смещения свободной поверхности жидкости.

Предложенный алгоритм решения задачи обладает достаточно быстрой сходимостью. Это объясняется удачным выбором парциальных систем, учитывающих основные свойства искомых решений.

При получении приведенных выше результатов в рядах (41) и (46) удерживалось соответственно такое количество членов N и q , при которых в найденных значениях частот λ было бы не менее шести верных значащих цифр. Эти условия выполняются при $N = 14$ и $q = 10$.

Сравнение полученных расчетных данных и точных табличных результатов, приведенных в работе [3], указывает на полное их совпадение.

Характер изменения преимущественно упругих низших частот λ_{r_0+1} в зависимости от числа волн n в окружном направлении и параметра заполнения оболочки жидкостью ε ($0 \leq \varepsilon \leq 1$) показан на (рис. 2).

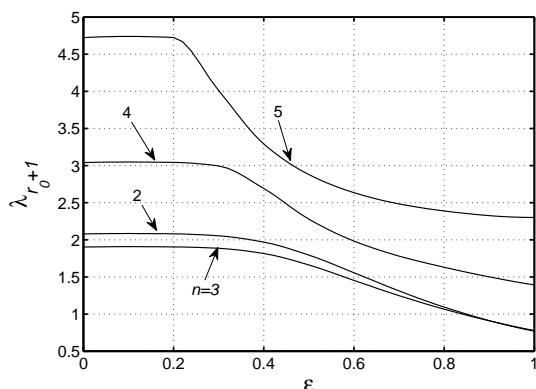


Рис. 2. Характер изменения преимущественно упругих низших частот λ_{r_0+1} в зависимости от числа волн n в окружном направлении и параметра заполнения оболочки жидкостью ε .

Из приведенных зависимостей следует, что для рассматриваемых параметров оболочки наибольшее влияние оказывает изменение глубины жидкости в диапазоне $0.125 \leq \varepsilon \leq 0.75$. Для $\varepsilon < 0.125$ частоты близки к частотам оболочки без жидкости, а при $\varepsilon > 0.75$ — к частотам

там оболочки, целиком заполненной жидкостью.

6. Заключение

В работе предложен алгоритм расчета собственных колебаний произвольных оболочек вращения, частично заполненных жидкостью, с учетом волновых движений на свободной поверхности. Поскольку оболочка подвержена действию разрывной динамической нагрузки, то при построении приближенного решения задачи гидроупругости область интегрирования уравнений для оболочки разбивается на две подобласти. Первая подобласть соответствует смоченной части оболочки, а вторая — несмоченной.

Решение сформулированной задачи базируется на построении обобщенного функционала, для которого условия сопряжения на смежной границе введенных подобластей являются естественными граничными условиями. На основе метода Ритца и приближенного построения обратного оператора для гидродинамической части задачи решение задачи гидроупругости сведено к решению однородной алгебраической системы уравнений. Такой подход позволяет разделить трудности построения решений, которые возникают при совместном интегрировании уравнений в частных производных для потенциала смещений жидкости и системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих колебания произвольной оболочки вращения.

На примере задачи о собственных неосесимметричных колебаниях круговой цилиндрической оболочки, частично заполненной идеальной жидкостью, показана достаточно высокая точность и эффективность предложенного алгоритма решения рассматриваемой задачи гидроупругости.

- [1] Горшков А. Г., Морозов В. И., Пономарев А. Т., Шклярчук Ф. Н. Аэроупругость конструкций. — М.: Физматгиз, 2000. — 592 с.
- [2] Микшиев Г. Н., Рабинович Б. И. Динамика тонкостенных конструкций с отсеками, содержащими жидкость. — М.: Машиностроение, 1971. — 563 с.
- [3] Кулешов В. Б., Швейко Ю. Ю. Неосесимметричные колебания цилиндрических оболочек, частично заполненных жидкостью // Изв. АН СССР, Механика твердого тела. — 1971. — №. 3 — С. 126 – 136.

- [4] *Кулешов В. Б., Швейко Ю. Ю.* Неосесимметричные колебания круглых и кольцевых пластин, взаимодействующих с жидкостью // Исследования по теории сооружений. — 1972. — №. 19 — С. 28 – 40.
- [5] *Александрович Л. И., Лампер Р. Е.* Собственные колебания упругого осесимметричного сосуда произвольного контура // Тр. 6-й Всес. конф. по теории оболочек и пластин, Баку. — 1966. — М.: Наука., 1967. — С. 27 – 29.
- [6] *Троценко В. А.* О колебаниях жидкости в сосудах, свободная поверхность которой закрыта мембранной оболочкой из гиперупругого материала // Изв. АН СССР: Механика твердого тела. — 1980. — № 6. — С. 166 – 177.
- [7] *Шмаков В. П.* Об уравнениях осесимметричных колебаний цилиндрической оболочки с жидким заполнением // Изв. АН СССР: Механика и машиностроение. — 1964. — № 1. — С. 170 – 173.
- [8] *Wen-Hwa Chu, Conzales R.* Supplement to breathing vibrations of a partially filled cylindrical tank – linear theory // Transactions of the ASME, series E, J. of Appl. Mech. — 1964. — **31.**, 4. — P. 722 – 723.
- [9] *Шмаков В. П.* Об одном приеме, упрощающем применение метода Бубнова – Галеркина к решению краевых задач // Инж. журнал: Механика твердого тела. — 1967. — № 5. — С. 129 – 136.
- [10] *Балакирев Ю. Г., Шмаков В. П.* Осесимметричные колебания цилиндрической оболочки с полусферическим дном // Колебания упругих конструкций с жидкостью. — Новосибирск: Изд. НЭТИ, 1984. — С. 28 – 32.
- [11] *Балакирев Ю. Г.* Осесимметричные колебания пологой сферической оболочки с жидкостью // Инж. журнал: Механика твердого тела. — 1967. — № 5. — С. 116 – 123.
- [12] *Кобычжин В. С., Шмаков В. П., Яблоков В. А.* Осесимметричные колебания полусферической оболочки, частично заполненной жидкостью // Инж. журнал: Механика твердого тела. — 1968. — № 5. — С. 46 – 54.
- [13] *Брусилковский А. Д., Шмаков В. П., Яблоков В. А.* Метод расчета собственных и вынужденных колебаний упругих оболочек вращения, заполненных идеальной несжимаемой жидкостью // Изв. АН СССР: Механика твердого тела. — 1973. — № 3. — С. 99 – 110.
- [14] *Григорьев В. Г.* Применение метода конечных элементов к расчету колебаний упругих оболочечных конструкций, содержащих жидкость // Динамика упругих и твердых тел, взаимодействующих с жидкостью. (труды III семинара). — Томск: Томский ун-т, 1978. — С. 55 – 60.

- [15] *Olson L. G., Bathe K. J.* A study of displacement based fluid finite elements for calculating frequencies of fluid and fluid – structure systems // *Nuclear Engineering and Design*. — 1983. — **76**. — P. 137 – 151.
- [16] *Можеев В. В.* Исследование динамики конструкций с жидкостью и газом с помощью метода конечных элементов // *Изв. РАН: Механика твердого тела*. — 1998. — № 6. — С. 166 – 174.
- [17] *Власов В. З.* Общая теория оболочек и ее приложения в технике. — М.: — Л.: Гостехиздат, 1949. — 784 с.
- [18] *Шмаков В. П.* Избранные труды по гидроупругости и динамике упругих конструкций. — М.: Изд-во МГТУ им. Баумана, 2011. — 287 с.
- [19] *Нариманов Г. С.* О движении твердого тела, полость которого частично заполнена жидкостью // *Прикл. математика и механика*. — 1956. — **20**, вып. 1. — С. 21 – 38.
- [20] *Микишев Г. С., Рабинович Б. И.* Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. — М.: Машиностроение, 1968. — 532 с.
- [21] *Фещенко С. Ф., Луковский И. А., Рабинович Б. И., Докучаев Л. В.* Методы определения присоединенных масс жидкости в подвижных полостях. — К.: Наукова думка, 1969. — 250 с.
- [22] *Гольденвейзер А. Л., Лидский В. Б., Товстик П. Е.* Свободные колебания тонких упругих оболочек. — М.: Наука, ГРФ-МЛ, 1979. — 384 с.
- [23] *Новожилов В. В.* Теория тонких оболочек. — Л.: Судпромгиз, 1962. — 431 с.
- [24] *Бабский В. Г., Копачевский Н. Д., Мышкис А. Д., Слобожанин Л. А., Тюпцов А. Д.* Гидромеханика невесомости. — М.: Наука, ГРФ-МЛ, 1976. — 504 с.
- [25] *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. — М.: ГРФ-МЛ, 1970. — 512 с.
- [26] *Моисеев Н. Н., Румянцев В. В.* Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. — М.: Наука, 1965. — 439 с.
- [27] *Троценко Ю. В.* Структура интегралов уравнений колебаний оболочек вращения в форме купола // *Зб. праць Інституту математики НАН України*. — 2008. — **5**, 2. — С. 334 – 348.
- [28] *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. — М.: Гостехиздат, 1951. — **1**. — 476 с.
- [29] *Троценко В. А., Троценко Ю. В.* Применение метода Ритца в сочетании с методом декомпозиции области для решения задачи о свободных колебаниях оболочек вращения // *Зб. праць Інституту математики НАН України*. — 2014. — **11**, 4. — С. 355 – 375.