Збірник праць Інституту математики НАН України 2006, т.3, N 2, 148–158

УДК 517.958

Локальні та нелокальні закони збереження рівнянь конвекції-дифузії

Н.М. ІВАНОВА

Інститут математики НАН України, Київ
E-mail: ivanova@imath.kiev.ua

За допомогою композиційного варіаційного принципа знайдено локальні та нелокальні закони збереження $(1+1)$-вимірних рівнянь конвекції-дифузії із сталими коефіцієнтами.

Local and nonlocal conservation laws of $(1+1)$-dimensional constant coefficient diffusion-convection equations are found with application of composite variational principle.

1. Вступ. У представленій роботі вивчається клас рівнянь конвекції-дифузії вигляду

$$u_t = (a(u)u_x)_x + b(u)u_x, \tag{1}$$

де $a = a(u)$ та $b = b(u)$ – довільні гладкі функції змінної u, $b(u) \neq 0$.

Рівняння (1), що називається також рівнянням Річардса, природно виникає у фізичних застосуваннях. Наприклад, супердифузивності такого типу були запропоновані для моделювання Ван-дер-Ваальсовської взаємодії у тонких плівках палива на поверхні рідини [7]. Це рівняння також застосовується при вивченні клітинних автоматів та взаємодії систем частинок із самоорганізацією (див. [4] та посилання в цій роботі). Воно описує модель потоку рідини у ненасиченому грунті [22].

Симетрії Лі рівнянь вигляду (1) досліджувалися у багатьох роботах (див., наприклад, [6, 18, 24]). Проте, повну та вичерпну групову класифікацію класу (1) отримано лише нещодавно у роботі [19]. Лiївські симетрії відповідної системи (2) рівнянь Ейлера–Лагранжа з нефіксованим значенням функції a, $b = 0$ та для $a = 1$, $b \in \{0, u\}$ розглянуто у [10]. Симетрії багатовимірних рівнянь дифузії та відповідних рівнянь Ейлера–Лагранжа досліджуються в [12].

Вперше закони збереження лінійного рівняння теплопровідності та рівняння Бюргерса побудовано за допомогою композиційного варіаційного принципу [1]. Ці результати перевідкрито та доповнено законами збереження нелінійного рівняння дифузії ($b = 0$, a – довільна, нефіксована функція) в роботі [10]. Закони збереження n-вимірних ($n \geq 1$) рівнянь дифузії $u_t = (a(u)u_i)_i$ прокласифіковано у [12] за допомогою прямого методу та композиційного варіаційного принципу. У [5] (див. також [9, розділ 10]) повністю вивчено локальні закони збереження рівнянь реакції-дифузії $u_t = (A(u))_{xx} + C(u)$, що мають непорожній перетин з класом (1). В [11, 21] представлено вичерпну класифікацію локальних та потенціальних законів збереження рівнянь (1). Локальні закони збереження рівнянь конвекції-дифузії із змінними коефіцієнтами знайдено в [13, 15].

2. Симетрії рівнянь конвекції-дифузії. Один з можливих шляхів знаходження законів збереження рівнянь (1) полягає у розповсюдженні лагранжевого підходу на нелагранжеві рівняння за допомогою введення допоміжних рівнянь таким чином, щоб отримана система була системою рівнянь Ейлера–Лагранжа для деякого варіаційного функціоналу. У якості таких допоміжних рівнянь виявилося надзвичайно зручним брати рівняння для приєднаної симетрії [1, 17, 23]. Тоді закони збереження отриманої системи (які, звичайно, є законами збереження вихідного рівняння) можна легко побудувати за допомогою теореми Ньотер [17]. Цей метод називається *композиційним варіаційним принципом.* Проілюструємо його застосування на прикладі рівнянь конвекції-дифузії.

Розглянемо систему рівнянь Ейлера–Лагранжа

$$u_t = (a(u)u_x)_x + b(u)u_x, \quad v_t = -a(u)v_{xx} + b(u)v_x \tag{2}$$

для варіаційного функціоналу

$$\mathscr{L} = \int \left(\tfrac{1}{2}(u_t v - u v_t) + a u_x v_x - \tfrac{1}{2} b u_x v + \tfrac{1}{2} v_x \textstyle\int b\right) dx,$$

що відповідає рівнянню (1). (Тут і надалі $\int b = \int b du$, $\int a = \int a du$.)

Система (2) складається з вихідного рівняння (1) та рівняння $v_t = -a(u)v_{xx} + b(u)v_x$ на приєднану до (1) симетрію.

Теорема 1. *Будь-яке перетворення з групи еквівалентності* $G^{\sim}$ *класу* (2) *має вигляд*

$$\tilde{t} = \varepsilon_4 t + \varepsilon_1, \quad \tilde{x} = \varepsilon_5 x + \varepsilon_7 t + \varepsilon_2, \quad \tilde{u} = \varepsilon_6 u + \varepsilon_3,$$

$$\tilde{v} = \varepsilon_8 v - \varepsilon_7 t + \varepsilon_9, \quad \tilde{a} = \varepsilon_4^{-1}\varepsilon_5^2 a, \quad \tilde{b} = \varepsilon_4^{-1}\varepsilon_5 b - \varepsilon_7,$$

де $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_9$ *– довільні сталі,* $\varepsilon_4\varepsilon_5\varepsilon_6\varepsilon_8 \neq 0$. *Група еквівалентності класу рівнянь* (1) *співпадає з проекцією групи еквівалентності* $G^{\sim}$ *класу систем* (2) *на простір змінних* t, x, u.

Зауважимо, що група $G^{\sim}$ є природним продовженням перетворень еквівалентності класу рівнянь (1) на змінну v.

Теорема 2. *Алгеброю Лі ядра основних груп систем* (2) *є* $A^{\cap} = \langle \partial_t,\ \partial_x,\ \partial_v,\ v\partial_v \rangle$.

Теорема 3. *Повна множина* $G^{\sim}$*-нееквівалентних систем* (2), *що допускають розширення* $A^{\cap}$, *вичерпуються випадками, наведеними у таблиці 1.*

Таблиця 1. Результати групової класифікації класу систем (2) (рівнянь (1)).

N	$a(u)$	$b(u)$	Базис A^{Lie}
0	$\forall$	$\forall$	$\partial_t,\ \partial_x,\ \partial_v,\ v\partial_v$
1	$\forall$	$a(u)$	$\partial_t,\ \partial_x,\ \partial_v,\ v\partial_v,\ e^x\partial_v$
2	$\forall$	0	$\partial_t,\ \partial_x,\ \partial_v,\ v\partial_v,\ 2t\partial_t + x\partial_x,\ x\partial_v$
3	$e^{\mu u}$	e^u	$\partial_t,\ \partial_x,\ \partial_v,\ v\partial_v,\ (\mu-2)t\partial_t + (\mu-1)x\partial_x + \partial_u$
4	e^u	e^u	$\partial_t,\ \partial_x,\ \partial_v,\ v\partial_v,\ t\partial_t - \partial_u,\ e^x\partial_v$
5	e^u	u	$\partial_t,\ \partial_x,\ \partial_v,\ v\partial_v,\ t\partial_t + (x-t)\partial_x + \partial_u$
6	e^u	0	$\partial_t,\ \partial_x,\ \partial_v,\ v\partial_v,\ 2t\partial_t + x\partial_x,\ x\partial_v,\ t\partial_t - \partial_u$
7	u^μ	u^ν	$\partial_t,\ \partial_x,\ \partial_v,\ v\partial_v,\ (\mu-2\nu)t\partial_t + (\mu-\nu)x\partial_x + u\partial_u$
8	u^μ	u^μ	$\partial_t,\ \partial_x,\ \partial_v,\ v\partial_v,\ \mu t\partial_t - u\partial_u,\ e^x\partial_v$
9	u^μ	$\ln u$	$\partial_t,\ \partial_x,\ \partial_v,\ v\partial_v,\ \mu t\partial_t + (\mu x - t)\partial_x + u\partial_u$
10a	u^μ	0	$\partial_t,\ \partial_x,\ \partial_v,\ v\partial_v,\ 2t\partial_t + x\partial_x,\ x\partial_v,\ \mu t\partial_t - u\partial_u$
10b	u^{-2}	u^{-2}	$\partial_t,\ \partial_x,\ \partial_v,\ v\partial_v,\ 2t\partial_t + u\partial_u,\ e^{-x}(\partial_x + u\partial_u),\ e^x\partial_v$
11	$u^{-4/3}$	0	$\partial_t,\ \partial_x,\ \partial_v,\ v\partial_v,\ 2t\partial_t + x\partial_x,\ x\partial_v,\ 4t\partial_t + 3u\partial_u,$ $x^2\partial_x - 3xu\partial_u + xv\partial_v$
12	1	u	$\partial_t,\ \partial_x,\ \partial_v,\ v\partial_v,\ t\partial_x - \partial_u,\ 2t\partial_t + x\partial_x - u\partial_u,$ $t^2\partial_t + tx\partial_x - (tu+x)\partial_u$
13	1	0	$\partial_t,\ \partial_x,\ v\partial_v,\ 2t\partial_t + x\partial_x,\ 2t\partial_x - xu\partial_u + xv\partial_v,$ $u\partial_u,\ \alpha\partial_u,\ \beta\partial_v,$ $4t^2\partial_t + 4tx\partial_x - (x^2+2t)u\partial_u + (x^2-2t)v\partial_v$

Зауваження 1. У табл. 1–4 $\mu, \nu = \mathrm{const.}$ $(\mu,\nu) \neq (-2,-2), (0,1)$ та $\nu \neq 0, \mu$ у випадку 7. $\mu \neq -4/3, 0$ для випадку 10a. Функції $\alpha = \alpha(t,x)$ і $\beta = \beta(t,x)$ – довільні розв'язки рівнянь теплопровідності $\alpha_t = \alpha_{xx}$

та $\beta_t + \beta_{xx} = 0$ відповідно. Випадок 10b зводиться до 10a ($\mu = -2$) додатковим перетворенням еквівалентності

$$\tilde{t} = t, \quad \tilde{x} = e^x, \quad \tilde{u} = e^{-x}u, \quad \tilde{v} = v.$$

Зауваження 2. Надалі для зручності використовується подвійна нумерація T.N випадків класифікації, де T – номер таблиці і N – номер відповідного випадку у таблиці T. Позначення "рівняння 1.N" ("система 1.N", тощо) використовується для рівнянь з класу (1) (систем вигляду (2), тощо), у яких параметр-функції набувають значення з відповідних випадків.

Зауваження 3. Експоненціальні випадки 1.3–1.6 можна отримати як границі степеневих випадків 1.7–1.10a [14, 20]. Більш точно,

$$\tilde{u} = 1 + \nu^{-1}u,\ \mu = \mu'\nu\colon\quad 1.7_{\mu,\nu} \to 1.3_{\mu'},\ \nu \to +\infty,$$
$$\tilde{u} = 1 + \mu^{-1}u,\ \tilde{t} = \mu^2 t,\ \tilde{x} = \mu x\colon\quad 1.9_{\mu} \to 1.5,\ \mu \to +\infty,$$
$$\tilde{u} = 1 + \mu^{-1}u\colon\quad 1.10\mathrm{a}_{\mu} \to 1.6,\ \mu \to +\infty.$$

Наведені граничні переходи зберігають структуру алгебри Лі інваріантності і можуть бути використані для побудови точних розв'язків для експоненціальних класів з розв'язків рівнянь із степеневими нелінійностями. Деякі часткові випадки наведених граничних переходів для рівнянь дифузії ($b = 0$) отримано у [2, 3].

Легко бачити, що випадок 1.1 розширення симетрій виникає лише для класу систем (2) і не містить додаткових локальних симетрій рівнянь (1). Дійсно, проекція відповідної алгебри Лі симетрій на простір змінних t, x та u співпадає з алгеброю Лі $\langle \partial_t, \partial_x \rangle$ ядра основних груп класу рівнянь (1). Проте, як показано нижче, ця симетрія є варіаційною і, більш того, індукує локальні закони збереження рівнянь вигляду (1).

Застосування інфінітезімального критерію варіаційної інваріантності до симетрій Лі, представлених у таблиці 1 приводить до наступного твердження.

Теорема 4. *Повна множина $G^{\sim}$-нееквівалентних систем* (2), *що мають нетривіальні варіаційні симетрії нульового порядку, вичерпується випадками, наведеними у таблиці 2.*

Випадки 2.4 та 2.8 є перетинами $2.1 \cap 2.3$ та $2.1 \cap 2.7$ відповідно. Відповідні алгебри варіаційних симетрій є об'єднаннями алгебр симетрій випадків 2.1 та 2.3 (2.1 та 2.7).

Таблиця 2. Класифікація варіаційних симетрій класу систем (2).

N	$a(u)$	$b(u)$	Базис $A^{\rm var}$
0	$\forall$	$\forall$	$\partial_t,\ \partial_x,\ \partial_v$
1	$\forall$	$a(u)$	$\partial_t,\ \partial_x,\ \partial_v,\ e^x\partial_v$
2	$\forall$	0	$\partial_t,\ \partial_x,\ \partial_v,\ x\partial_v,\ 2t\partial_t+x\partial_x-v\partial_v$
3	$e^{\mu u}$	e^u	$\partial_t,\ \partial_x,\ \partial_v,\ (\mu-2)t\partial_t+(\mu-1)x\partial_x+\partial_u-(\mu-1)v\partial_v$
4	e^u	e^u	$\partial_t,\ \partial_x,\ \partial_v,\ e^x\partial_v,\ t\partial_t-\partial_u$
5	e^u	u	$\partial_t,\ \partial_x,\ \partial_v,\ t\partial_t+(x-t)\partial_x+\partial_u-v\partial_v$
6	e^u	0	$\partial_t,\ \partial_x,\ \partial_v,\ x\partial_v,\ 2t\partial_t+x\partial_x-v\partial_v,\ t\partial_t-\partial_u$
7	u^μ	u^ν	$\partial_t,\ \partial_x,\ \partial_v,\ (\mu-2\nu)t\partial_t+(\mu-\nu)x\partial_x+$ $+u\partial_u+(\nu-\mu-1)v\partial_v$
8	u^μ	u^μ	$\partial_t,\ \partial_x,\ \partial_v,\ \mu t\partial_t-u\partial_u+v\partial_v,\ e^x\partial_v$
9	u^μ	$\ln u$	$\partial_t,\ \partial_x,\ \partial_v,\ \mu t\partial_t+(\mu x-t)\partial_x+u\partial_u-(\mu+1)v\partial_v$
10a	u^μ	0	$\partial_t,\ \partial_x,\ \partial_v,\ 2t\partial_t+x\partial_x-v\partial_v,\ x\partial_v,\ \mu t\partial_t-u\partial_u+v\partial_v$
10b	u^{-2}	u^{-2}	$\partial_t,\ \partial_x,\ \partial_v,\ 2t\partial_t+u\partial_u-v\partial_v,\ e^{-x}(\partial_x+u\partial_u),\ e^x\partial_v$
11	$u^{-4/3}$	0	$\partial_t,\ \partial_x,\ \partial_v,\ 2t\partial_t+x\partial_x-v\partial_v,\ x\partial_v,\ 4t\partial_t+3u\partial_u-v\partial_v,$ $x^2\partial_x-3xu\partial_u+xv\partial_v$
12	1	u	$\partial_t,\ \partial_x,\ \partial_v,\ t\partial_x-\partial_u,\ 2t\partial_t+x\partial_x-u\partial_u,$ $t^2\partial_t+tx\partial_x-(tu+x)\partial_u$
13	1	0	$\partial_t,\ \partial_x,\ 2t\partial_t+x\partial_x-u\partial_u,\ 2t\partial_x-xu\partial_u+xv\partial_v,$ $u\partial_u-v\partial_v,\ \alpha\partial_u,\ \beta\partial_v,$ $4t^2\partial_t+4tx\partial_x-(x^2+2t)u\partial_u+(x^2-2t)v\partial_v$

3. Закони збереження. У цьому розділі знайдені варіаційні симетрії використовуються для знаходження законів збереження рівнянь з класу (1). Законом збереження системи з класу (2) називається дивергентний вираз

$$D_tT(t,x,u_{(r)},v_{(r)})+D_xX(t,x,u_{(r)},v_{(r)})=0, \tag{3}$$

який тотожно дорівнює нулеві на многовиді вихідної системи. Диференціальні функції T та X називаються *густиною* та *потоком* закону збереження відповідно.

Закон збереження називається *тривіальним*, якщо компоненти вектора густини задовольняють умову

$$T=\hat T+\check T,\quad X=\hat X+\check X,$$

де $\hat T$, $\check T$, $\hat X$, $\check X$ є функціями t, x та похідних u і v, $\hat T$, $\hat X$ – тотожні нулі на многовиді системи (2), $D_t\check T+D_x\check X\equiv 0$.

Два закони збереження з векторами густини $(T,\, X)$ та $(T',\, X')$ називаються *еквівалентними*, якщо вектор-функція $(T'-T, X'-X)$ є вектором густини тривіального закону збереження.

Застосовуючи теорему Ньотер [8,17] до варіаційних симетрій, знайдених у попередньому розділі, отримаємо множини нееквівалентних законів збереження систем (2) (рівнянь (1)), наведені у таблиці 3.

Таблиця 3. Класифікація законів збереження систем (2) (рівнянь (1)).

N	$a(u)$	$b(u)$	Закони збереження
0	$\forall$	$\forall$	CL^1, CL^2, CL^3
1	$\forall$	$a(u)$	CL^1, CL^2, CL^3, CL^4
2	$\forall$	0	CL^1, CL^2, CL^3, CL^5, CL^6
3	$e^{\mu u}$	e^u	CL^1, CL^2, CL^3, CL^7
4	e^u	e^u	CL^1, CL^2, CL^3, CL^4, $\mathrm{CL}^7(\mu=1)$
5	e^u	u	CL^1, CL^2, CL^3, CL^8
6	e^u	0	CL^1, CL^2, CL^3, CL^5, CL^6, CL^9
7	u^μ	u^ν	CL^1, CL^2, CL^3, CL^{10}
8	u^μ	u^μ	CL^1, CL^2, CL^3, CL^4, $\mathrm{CL}^{10}(\mu=\nu)$
9	u^μ	$\ln u$	CL^1, CL^2, CL^3, CL^{11}
10a	u^μ	0	CL^1, CL^2, CL^3, CL^5, CL^6, CL^{12}
10b	u^{-2}	u^{-2}	CL^1, CL^2, CL^3, CL^4, $\mathrm{CL}^{10}(\mu=\nu=-2)$, CL^{13}
11	$u^{-4/3}$	0	CL^1, CL^2, CL^3, CL^5, CL^6, $\mathrm{CL}^{12}(\mu=-4/3)$, CL^{14}
12	1	u	CL^1, CL^2, CL^3, $\mathrm{CL}^{10}(\mu=0,\,\nu=1)$, CL^{15}, CL^{16}
13	1	0	CL^1, CL^2, CL^6, $\mathrm{CL}^{12}(\mu=0)$, CL^{17}, CL^{18}, CL^{19}, CL^{20}

Густини T та потоки X наведених законів збереження мають наступний вигляд:

CL^1: $au_xv_x-\frac12 bu_xv+\frac12 v\int b,\ -a(u_tv_x+u_xv_t)-\frac12 u_tvb-\frac12 v_t\int b;$

CL^2: $\frac12(uv_x-u_xv),\ \frac12(u_tv-uv_t)-au_xv_x;$

CL^3: $u,\ -au-\int b;$

CL^4: $e^xu,\ -e^xau_x;$

CL^5: $xu,\ \int a-xau_x;$

CL^6: $tau_xv_x+xvu_x,\ -xvu_t+a(xu_xv_x-u_xv-t(u_tv_x+u_xv_t));$

CL^7:
$$\begin{aligned}&(\mu-2)te^{\mu u}u_xv_x-\tfrac12(\mu-2)te^u(u_xv-v_x)+v\\&+\tfrac12(\mu-1)(x(uv_x-u_xv)+uv),\\&-e^{\mu u}((\mu-2)t(u_tv_x+u_xv_t)+(\mu-1)(xu_xv_x-u_xv)-v_x)\\&+e^u(\tfrac12(\mu-2)t(u_tv-v_t)-\tfrac12\mu v)+\tfrac12(\mu-1)(u_tv-uv_t);\end{aligned}$$

CL^8: $\frac{1}{4}tu^2v_x-\frac{1}{2}tuu_xv+(x-t)(uv_x-u_xv)+\frac{1}{2}uv+v$,
$e^u(v_x-u_xv-xu_xv_x-t(u_tv_x+u_xv_t))+\frac{1}{2}(x-t)(u_tv-uv_t)$
$-\frac{1}{2}uv+\frac{t}{4}(2uu_tv-u^2v_t)$;

CL^9: $te^uu_xv_x-v$, $-e^u(v_x+tu_tv_x+tv_tu_x)$;

CL^{10}: $\frac{1}{2}(\mu-2\nu)t(2au_xv_x-bu_xv-v_x\int b)+\frac{1}{2}(2-\nu+\mu)uv$
$+(\mu-\nu)x(uv_x-u_xv)$,
$\frac{1}{2}(\mu-\nu)x(u_tv-uv_t)+a(uv_x+(\nu-\mu-1)u_xv)$
$+\frac{1}{2}(\mu-2\nu)t(u_tbv-v_t\int b)+\frac{1}{2}(\nu-\mu-1)v\int b$
$-(\mu-\nu)xau_xv_x-(\mu-2\nu)ta(u_tv_x+u_xv_t)$;

CL^{11}: $\mu tu^\mu u_xv_x+\frac{1}{2}(\mu t\ln u+\mu x-t)(uv_x-u_xv)+\frac{1}{2}\mu uv+uv-\frac{1}{2}\mu tuv_x$,
$\frac{1}{2}(\mu t\ln u+\mu x-t)(u_tv-uv_t)-(\mu x-t)u_xv_x$
$-\mu tu^\mu(u_tv_x+u_xv_t)+u^{\mu+1}v_x$
$-(\mu+1)u^\mu u_xv-uv\ln u+\frac{1}{2}\mu uv_t+\frac{1}{2}(\mu+1)uv$;

CL^{12}: $\mu tu^\mu u_xv_x-uv$, $-u^{\mu+1}v_x+u^\mu u_xv-\mu tu^\mu(u_tv_x+u_xv_t)$;

CL^{13}: $e^{-x}(uv-u_xv+uv_x)$, $e^{-x}(u_tv-uv_t+2u^{-2}u_xv_x-2u^{-1}v_x$;

CL^{14}: $-2xuv+\dfrac{1}{2}x^2(uv_x-u_xv)$,
$\dfrac{1}{2}x^2(uv_t-u_tv)+x^2u^{-4/3}u_xv_x-3u^{-1/3}v$
$+x(3u^{-1/3}v_x-u^{-4/3}u_xv)$;

CL^{15}: tu_xv+v, $tu_xv_x+v_x-tu_tv-uv$;

CL^{16}: $t^2(u_xv_x-uu_xv)+txuv_x-xv$,
$t^2(uu_tv-u_tv_x-u_xv_t)-tx(uv_t+u_xv_x)+t(u^2v-uv_x)-xv_x+v$;

CL^{17}: αu, $\alpha_xu-\alpha u_x$;

CL^{18}: βv, $\beta v_x-\beta_xv$;

CL^{19}: $t(uv_x-u_xv)-xuv$, $t(u_tv-uv_t-2u_xv_x)+x(u_xv-uv_x)$;

CL^{20}: $t^2u_xv_x+\frac{1}{2}tx(uv_x-u_xv)-\frac{1}{4}x^2uv$,
$\frac{1}{4}x^2(u_xv-uv_x)-t^2(u_xv_t+u_tv_x)+\frac{1}{2}tx(u_tv-uv_t-2u_xv_x)$
$-\frac{1}{2}t(u_xv+uv_x)$.

Зауваження 4. Вектори густини законів збереження CL^3, CL^4, CL^5 та CL^{17} не містять у явному вигляді розв'язків приєднаного рівняння і визначають локальні закони збереження рівнянь конвекції-дифузії (1). Це є у точності всі лінійно незалежні закони збереження рівнянь (1), отримані раніше у [21] за допомогою прямого методу.

Решта векторів густини визначають нелокальні закони збереження рівнянь конвекції-дифузії, де нелокальна змінна v задається приєднаним рівнянням $v_t = -a(u)v_{xx} + b(u)v_x$.

Простори законів збереження перетинів $3.4 = 3.1 \cap 3.3$ та $3.8 = 3.1 \cap 3.7$ є об'єднаннями відповідних просторів випадків 3.1 та 3.3 (3.1 та 3.7) за додаткової умови $\mu = 1$ ($\nu = \mu$). Закони збереження CL^3 та CL^5 для лінійного рівняння теплопровідності (що виникають як підвипадки випадку $a = u^\mu$, $b = 0$) є частковими випадками множини законів збереження CL^{18}.

Розглянемо зараз більш детально лінійний випадок

$$u_t - u_{xx} = 0, \quad v_t + v_{xx} = 0 \tag{4}$$

Підкреслимо, що вектори густини законів збереження, наведені у таблиці 3 є нееквівалентними відносно звичайного означення еквівалентності, і відповідні закони збереження є лінійно незалежними. У той же час, діючи перетвореннями з групи Лі $G^{\max}$ симетрій системи (4), можна встановити $G^{\max}$-відношення еквівалентності на просторі законів збереження. Так, наприклад, CL^{18} еквівалентний CL^{17} відносно дискретного перетворення симетрії $\tilde t = -t$, $\tilde x = x$, $\tilde u = -v$, $\tilde v = -u$.

Розглянемо тепер множину законів збереження, породжених CL^{17} та $\mathrm{CL}^{12}(\mu = 0)$. Очевидно, що вони утворюють лінійний підпростір простору законів збереження системи (4), визначений системою твірних $\{(\alpha u, \alpha_x u - \alpha u_x),\ (uv, uv_x - u_x v)\}$. Замінимо систему твірних на $\{((v + \alpha u), (v_x + \alpha_x)u - (v + \alpha)u_x),\ (uv, uv_x - u_x v)\}$. Під дією точкового перетворення $v \to v - \alpha$ (інші змінні не перетворюються) з групи симетрій $G^{\max}$ вектор густини $((v + \alpha u), (v_x + \alpha_x)u - (v + \alpha)u_x)$ переходить у $(uv, uv_x - u_x v)$. Таким чином, з точністю до групи симетрій системи (4) розглянутий підпростір генерується законом збереження з вектором густини $(uv, uv_x - u_x v)$.

У [8, 16] показано, що для систем рівнянь Ейлера–Лагранжа генеруюча множина нееквівалентних законів збереження визначається векторами густини, що відповідають операторам симетрії, які утворюють алгебри Лі, нееквівалентні відносно дії приєднаного зображення. Ця властивість дозволяє завершити дослідження еквівалентностей між законами збереження системи (4).

Теорема 5. *Генеруюча множина законів збереження системи* (4) *складається з CL^{19} та CL^{20}, що відповідають операторам варіа-*

ційної симетрії $2t\partial_t + x\partial_x - u\partial_u$ *та* $4t^2\partial_t + 4tx\partial_x - (x^2+2t)u\partial_u + (x^2-2t)v\partial_v$.

Детальне та строге доведення теореми 5 наведено у [12]. Аналогічно можна знайти генеруючі множини законів збереження нелінійних систем (2), які наведені у таблиці 4.

Таблиця 4. Генеруючі множини законів збереження систем (2) (рівнянь (1)).

N	$a(u)$	$b(u)$	Закони збереження
0	$\forall$	$\forall$	CL^1, CL^2, CL^3
1	$\forall$	$a(u)$	CL^1, CL^2, CL^3
2	$\forall$	0	CL^6
3	$e^{\mu u}$	e^u	CL^7 if $\mu\neq-2$ and CL^1, CL^7 if $\mu=-2$
4	e^u	e^u	CL^2, CL^3, $\mathrm{CL}^7(\mu=1)$
5	e^u	u	CL^8
6	e^u	0	CL^6, CL^9
7	u^μ	u^ν	CL^{10} if $\mu\neq-2\nu$ and CL^1, CL^{10} if $\mu=-2\nu$
8	u^μ	u^μ	CL^2, $\mathrm{CL}^{10}(\mu=\nu)$
9	u^μ	$\ln u$	CL^{11} if $\mu\neq 0,-1$;
			CL^1, CL^{11} if $\mu=0$ and CL^3, CL^{11} if $\mu=-1$
10a	u^μ	0	CL^6, CL^{12}
10b	u^{-2}	u^{-2}	$\mathrm{CL}^{10}(\mu=\nu=-2)$
11	$u^{-4/3}$	0	CL^6
12	1	u	CL^3, CL^{16}
13	1	0	CL^{19}, CL^{20}

4. Висновки. Загальновідомо, що еволюційне рівняння другого порядку не допускає лагранжевого формулювання. У той же час, система, що складається з диференціального рівняння та рівняння на приєднану симетрію завжди є системою рівнянь Ейлера–Лагранжа для деякого функціоналу [1, 23]. Тому, для знаходження її законів збереження, які, очевидно, є законами збереження вихідного рівняння, доцільно використовувати теорему Ньотер. Цей метод дістав назви композиційного варіаційного принципу.

Закони збереження системи рівнянь Ейлера–Лагранжа, що не залежать явно від розв'язків приєднаного рівняння, є локальними для вихідного рівняння. Якщо ж вектори густини містять у явному вигляді розв'язки приєднаного рівняння, відповідні локальні закони збереження системи рівнянь Ейлера–Лагранжа є нелокальними законами збереження вихідного рівняння. Отримана нелокальність має істотно інший характер, ніж найбільш досліджені потенціальні та псевдопотенціальні закони збереження.

У представленій роботі розглядається застосування композиційного варіаційного принципа до знаходження законів збереження $(1+1)$-вимірних рівнянь конвекції-дифузії. Знайдено локальні та нелокальні закони збереження рівнянь вигляду (1), що відповідають варіаційним симетріям нульового порядку системи рівнянь Ейлера–Лагранжа. Порівнюючи отримані закони збереження з результатами роботи [21] показано, що таким чином побудовано всі можливі локальні закони збереження рівнянь (1). Питання про повноту просторів нелокальних законів збереження із вказаним характером нелокальності залишається відкритим: необхідно додатково дослідити питання про (не)існування узагальнених варіаційних симетрій вищого порядку та/або про (не)існування локальних законів збереження вищих порядків для отриманої системи рівнянь Ейлера–Лагранжа.

Дослідження підтримано грантом Президента України для підтримки наукових досліджень молодих вчених GP/F11/0061.

[1] Atherton R.W., Homsy G.M. On the existence and formulation of variational principles for nonlinear differential equations // Stud. App. Math. – 1975. – **54**. – P. 31–60.

[2] Bluman G.W., Kumei S. Symmetries and differential equations. – Springer: New York, 1989. – 412 p.

[3] Bluman G.W., Reid G.J., Kumei S. New classes of symmetries for partial differential equations // J. Math. Phys. – 1988. – **29**. – P. 806–811.

[4] Chayes J.T., Osher S.J., Ralston J.V. On singular diffusion equations with applications to self-organized criticality // Comm. Pure Appl. Math. – 1993. – **46**. – P. 1363–1377.

[5] Dorodnitsyn V.A., Svirshchevskii S.R. On Lie–Bäcklund groups admitted by the heat equation with a source. – Moscow: Keldysh Institute of Applied Mathematics of Academy of Sciences USSR, 1983. – Preprint № 101. – 28 pp.

[6] Edwards M.P. Classical symmetry reductions of nonlinear diffusion-convection equations // Phys. Lett. A. – 1994. – **190**. – P. 149–154.

[7] De Gennes P.G. Wetting: statics and dynamics // Rev. Modern Phys. – 1985. – **57**. – P. 827–863.

[8] Ibragimov N.H. Transformation groups applied to mathematical physics. – Dordrecht: D. Reidel Publishing Co., 1985. – 394 p.

[9] Ibragimov N.H. (Editor) Lie group analysis of differential equations. Vol. 1. Symmetries, exact solutions and conservation laws. – Boca Raton: Chemical Rubber Company, 1994. – 430 p.

[10] Ibragimov N.H., Kolsrud T. Lagrangian approach to evolution equations: symmetries and conservation laws // Nonlinear Dynamics. – 2004. – **36**. – P. 29–40.

[11] Ivanova N. Conservation laws and potential systems of diffusion-convection equations // Proceedings of Institute of Mathematics, Kyiv. – 2004. – **50**, Part 1. – P. 149–153.

[12] Ivanova N. Conservation laws of multidimensional diffusion-convection equations // Nonlinear Dynamics, to appear.

[13] Ivanova N.M., Popovych R.O., Sophocleous C. Conservation laws of variable coefficient diffusion-convection equations // Proceedings of Tenth International Conference in Modern Group Analysis. – Larnaca, Cyprus, 2004. – P. 107–113.

[14] Ivanova N.M., Popovych R.O., Sophocleous C. Group analysis of variable coefficient diffusion-convection equations. I. Enhanced group classification, in preparation.

[15] Ivanova N.M., Popovych R.O., Sophocleous C. Group analysis of variable coefficient diffusion-convection equations. III. Conservation laws and contractions, in preparation.

[16] Khamitova R.S. The structure of a group and the basis of conservation laws // Teoret. Mat. Fiz. – 1982. – **52**. – 244–251.

[17] Olver P. Applications of Lie groups to differential equations. – New York: Springer-Verlag, 1986. – 514 p.

[18] Oron A., Rosenau P. Some symmetries of the nonlinear heat and wave equations // Phys. Lett. A. – 1986. – **118**. – P. 172–176.

[19] Popovych R.O., Ivanova N.M. New results on group classification of nonlinear diffusion-convection equations // J. Phys. A: Math. Gen. – 2004. – **37**. – P. 7547–7565.

[20] Popovych R.O., Ivanova N.M. Potential equivalence transformations for nonlinear diffusion-convection equations // J. Phys. A: Math. Gen. – 2005. – **38**. – P. 3145–3155.

[21] Popovych R.O., Ivanova N.M. Hierarchy of conservation laws of diffusion-convection equations // J. Math. Phys. – 2005. – **46**, 043502. – 22 pp.

[22] Richard's L.A. Capillary conduction of liquids through porous mediums // Physics. – 1931. – **1**. – P. 318–333.

[23] Vainberg M.M. Variational methods for investigation of non-linear operators. – San Francisco, Calif.: Holden-Day, 1964. – 344 p.

[24] Yung C.M., Verburg K., Baveye P. Group classification and symmetry reductions of the non-linear diffusion-convection equation $u_t = (D(u)u_x)_x - K'(u)u_x$ // Int. J. Non-Lin. Mech. – 1994. – **29**. – P. 273–278.