Збірник праць Інституту математики НАН України 2006, т.3, N 2, 71–91

УДК 517.912:512.816

Системи ЗДР другого порядку, інваріантні відносно низькорозмірних алгебр Лі

О.В. ГАПОНОВА, М.О. НЕСТЕРЕНКО

Інститут математики НАН України, Київ
E-mail: gaponova@imath.kiev.ua, maryna@imath.kiev.ua

Отримано вичерпний опис регулярних нормальних систем двох звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, інваріантних відносно дійсних алгебр Лі розмірностей три та чотири.

Regular systems of two second-order ordinary differential equations invariant with respect to real three- or four-dimensional Lie algebras are exhaustively described.

1. Вступ. Груповий аналіз є ефективним інструментом при дослідженні диференціальних рівнянь. Зокрема, він надає регулярну процедуру опису класів еквівалентності, для яких можуть бути справедливі ті чи інші загальні твердження теорії диференціальних рівнянь. Найбільш вражаючі досягнення групового аналізу пов'язані зі звичайними диференціальними рівняннями. Майже усі спеціальні методи інтегрування таких рівнянь (заміна змінних, метод інтегруючого множника тощо) насправді є частковими випадками загальної процедури, яка є складовою групового аналізу.

Основні ідеї групового аналізу сформульовано Софусом Лі ще у XIX столітті [6], ним же введено поняття "диференціального інваріанта", яке є важливим при вивчені диференціальних рівнянь груповими методами. У роботі [5] Лі довів, що кожну невироджену інваріантну систему диференціальних рівнянь можна зобразити у термінах диференціальних інваріантів відповідної групи симетрій. Внаслідок цього теорія диференціальних інваріантів стала важливою складовою групового аналізу диференціальних рівнянь. Пізніше теорія диференціальних інваріантів та відповідний понятійний апарат розвинуто у роботах Тресса [11, 12], Овсяннікова [9] та Олвера [2, 3, 8].

У цій статті теорію диференціальних інваріантів застосовано для вичерпного опису регулярних нормальних систем двох звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, інваріантних відносно дійсних алгебр Лі розмірностей три та чотири. Іншими словами, метою є знаходження усіх систем вигляду

$$\ddot{x} = F(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}), \quad \ddot{y} = G(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}), \tag{1}$$

які інваріантні відносно дійсних три- та чотиривимірних алгебр Лі.

Вивчення таких систем вмотивовано тим, що в багатьох випадках вони є базовими у класичній і квантовій механіці, механіці рідини та у загальній теорії відносності. Зокрема, серед (1) містяться усі ньютонівські і геодезичні [4,7] системи. Дослідження усіх можливих симетрій таких систем є надзвичайно складною задачею. Тому у багатьох роботах виконано групову класифікацію лише часткових випадків системи (1). Даміану та Софоклеус в [1] знайшли групи точкових перетворень автономних гамільтонових систем з двома степенями вільності. Вафо Сох та Махмуд розглядали критерій лінеаризації [14] та канонічні форми [13] систем вигляду (1), але, на жаль, їх роботи базуються на помилковій класифікації векторних полів і внаслідок цього містять ряд хибних тверджень.

Статтю організовано наступним чином. У параграфі 2 наведено необхідні поняття та твердження, а також розглянуто приклад побудови інваріантної системи. Класифікацію реалізацій дійсних низькорозмірних алгебр Лі з [10] використано у параграфах 3 та 4 для опису регулярних систем двох звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, що інваріантні відносно алгебр розмірностей три та чотири. Кожна з наведених систем записується у нормальній формі та містить дві параметр-функції. У параграфі 5 підсумовано отримані результати, сформульовано ряд задач для подальших досліджень та наведено деякі фізично важливі системи, що зводяться до описаних в статті.

2. Диференціальні інваріанти. Розглянемо r-вимірну алгебру Лі $\mathfrak{g}$ векторних полів з базисними інфінітезимальними операторами

$$e_i = \xi_i(t, x, y)\partial_t + \eta_i(t, x, y)\partial_x + \zeta_i(t, x, y)\partial_y. \tag{2}$$

Продовжену алгебру $\mathrm{pr}^{(n)}\mathfrak{g}$ породжують диференціальні оператори

$$e_i^{(n)} = \xi_i(t, x, y)\partial_t + \eta_i(t, x, y)\partial_x + \zeta_i(t, x, y)\partial_y +$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\left(\eta_i^k(t,x_{(k)},y_{(k)})\partial_{x^{(k)}}+\zeta_i^k(t,x_{(k)},y_{(k)})\partial_{y^{(k)}}\right). \tag{3}$$

Тут і надалі $n \geq 0$, $i = 1,\ldots,r$, символи $x_{(k)}$ та $y_{(k)}$ позначають набори $(x,x',\ldots,x^{(k)})$ та $(y,y',\ldots,y^{(k)})$ із залежних змінних x, y та їх похідних по t порядків не вище k.

Означення 1. Гладку функцію $I = I(t,x_{(n)},y_{(n)})\colon \mathbb{R}^{(2n+3)} \to \mathbb{R}$ називають *диференціальним інваріантом* порядку n алгебри Лі $\mathfrak{g}$, якщо $e_i^{(n)}I(t,x_{(n)},y_{(n)}) = 0$ для продовженого базису $\{e_i^{(n)}\}$ алгебри $\mathrm{pr}^{(n)}\mathfrak{g}$.

Розглянемо ранги

$$r_k = \mathrm{rank}\{(\xi_i,\eta_i,\eta_i^1,\ldots,\eta_i^k,\zeta_i,\zeta_i^1,\ldots,\zeta_i^k),\ i=1,\ldots,r\}.$$

Оскільки послідовність $\{r_k\}$ не спадає, обмежена значенням r та досягає його, то існує число $\nu = \min\{k \in \mathbb{Z}^+ \mid r_k = r\}$ та мають місце співвідношення $r_\nu = r_{\nu+1} = \cdots = r$.

Важливість диференціальних інваріантів пояснюється наступним фактом. Нехай система ЗДР інваріантна відносно алгебри $\mathfrak{g}$. Тоді локально її можна зобразити як об'єднання рівнянь, записаних у термінах диференціальних інваріантів $\mathfrak{g}$ (“регулярна” частина системи) та умов виродження рангів відповідних продовжених генераторів (“сингулярна” частина).

Природнім є питання чи можна вибрати мінімальний набір диференціальних інваріантів, який дозволяє отримати усі диференціальні інваріанти заданого порядку за допомогою скінченої кількості визначених операцій. Відповідь на це питання позитивна.

Означення 2. Максимальний набір I_n функціонально незалежних диференціальних інваріантів порядку не вище n (тобто інваріантів продовженої алгебри $\mathrm{pr}^{(n)}\mathfrak{g}$) називається *універсальним диференціальним інваріантом* порядку n алгебри $\mathfrak{g}$.

У випадку однієї незалежної та двох залежних змінних розмірність простору потоків порядку n дорівнює $2n+3$. Отже кількість функціонально незалежних диференціальних інваріантів порядку n алгебри $\mathfrak{g}$ обчислюється за формулою

$$d_n = 2n + 3 - r_n.$$

Будь-який диференціальний інваріант I порядку n алгебри $\mathfrak{g}$ з необхідністю є диференціальним оператором порядку $n+l$ цієї ж алгебри, $l \geq 0$. Отже, універсальний диференціальний інваріант I_{n+l} можна отримати доповненням універсального диференціального інваріанта I_n диференціальними інваріантами вищих порядків.

Необхідним етапом вивчення регулярних нормальних систем двох ЗДР другого порядку є побудова універсальних диференціальних інваріантів другого порядку відповідних алгебр. Наступна теорема дає необхідний і достатній критерій існування таких систем для заданої алгебри Лі.

Теорема 1. *Алгебра Лі векторних полів допускається нормальною регулярною системою типу* (1) *тоді і тільки тоді, коли* $r_1 = r_2$.

Для повного опису диференціальних інваріантів фіксованої реалізації алгебри Лі досить побудувати функціональний базис диференціальних інваріантів та оператори інваріантного диференціювання. Базиси диференціальних інваріантів можна знайти як частину універсального інваріанта порядку $(\nu + 1)$. Конструктивна процедура побудови операторів інваріантного диференціювання виводиться безпосередньо з умови їх комутування з формально нескінченно продовженими елементами алгебри (див. [9]).

Зауваження 1. Використання операторів інваріантного диференціювання є доцільним і для пошуку диференціальних інваріантів фіксованого порядку у особливо складних випадках, коли метод рухомих реперів та метод, що базується на означенні 1, призводять до громіздких обчислень. Це ілюструється у прикладі 1.

Зауваження 2. У цій роботі використано реалізації низькорозмірних алгебр Лі векторними полями у просторі не більше трьох змінних з класифікації, отриманої у [10]. Залежні та незалежну змінні вибрано з міркувань максимального спрощення обчисленнь та зовнішнього вигляду систем ЗДР. Системи, які відповідають різним виборам залежних і незалежної змінних у фіксованій реалізації, еквівалентні з точністю до перетворень годографа та перепозначення змінних.

Зауважимо також, що не всі інваріантні регулярні системи ЗДР другого порядку можна представити у нормальній формі. Для виокремлення таких випадків використано теорему 1.

Приклад 1. Розглянемо детально дійсну нерозв'язну алгебру Лі $sl(2, \mathbb{R}) \oplus A_1$, породжену базисними елементами [10]

$$
\begin{aligned}
&e_1 = \partial_t, \quad e_2 = t\partial_t + x\partial_x, \quad e_3 = t^2\partial_t + 2tx\partial_x + x\partial_y, \\
&e_4 = x\partial_t + 2xy\partial_x + (y^2 + c)\partial_y, \quad c \in \{-1,\ 0,\ 1\}.
\end{aligned}
$$

Для знаходження системи ЗДР другого порядку інваріантної відносно цієї реалізації, знайдемо диференціальні інваріанти до другого порядку включно. Оскільки $r_0 = 3$, то інваріантів нульового порядку у цьому випадку немає.

Розглянемо другі продовження базисних операторів:

$$
\begin{aligned}
e_1^{(2)} &= \partial_t, \quad e_2^{(2)} = t\partial_t + x\partial_x - \dot{y}\partial_{\dot{y}} - \ddot{x}\partial_{\ddot{x}} - 2\ddot{y}\partial_{\ddot{y}},\\
e_3^{(2)} &= t^2\partial_t + 2tx\partial_x + x\partial_y + 2x\partial_{\dot{x}} + (\dot{x} - 2t\dot{y})\partial_{\dot{y}} +\\
&\quad + (2\dot{x} - 2t\ddot{x})\partial_{\ddot{x}} + (\ddot{x} - 2\dot{y} - 4t\ddot{y})\partial_{\ddot{y}},\\
e_4^{(2)} &= x\partial_t + 2xy\partial_x + (y^2 + c)\partial_y + (2y\dot{x} + 2x\dot{y} - \dot{x}^2)\partial_{\dot{x}} + (2y - \dot{x})\dot{y}\partial_{\dot{y}} +\\
&\quad + (2\ddot{x}y + 4\dot{x}\dot{y} + 2x\ddot{y} - 3\dot{x}\ddot{x})\partial_{\ddot{x}} + (2\dot{y}^2 + 2y\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y} - 2\dot{x}\ddot{y})\partial_{\ddot{y}}.
\end{aligned}
$$

Очевидно, що $r_1 = r_2 = 4 = r_l$, $l \geq 3$. Крім того, $d_1 = 5 - 4 = 1$ і $d_2 = 7 - 4 = 3$. Отже, існує один функціонально незалежний інваріант першого порядку та три функціонально незалежні інваріанти другого порядку, причому серед останніх міститься рівно один інваріант першого порядку. Звідси випливає, що критерій теореми 1 виконується і для даної реалізації існує інваріантна система вигляду (1).

Універсальний диференціальний інваріант I_1 породжується єдиною функцією $I = I(t, x, y, \dot{x}, \dot{y})$. Остання визначається умовами $e_i^{(1)} I = 0$, $i = 1, 2, 3, 4$, які еквівалентні перевизначеній системі ДРЧП першого порядку

$$
\begin{aligned}
&I_t = 0, \quad tI_t + xI_x - \dot{y}I_{\dot{y}} = 0,\\
&t^2 I_t + 2txI_x + xI_y + 2xI_{\dot{x}} + (\dot{x} - 2t\dot{y})I_{\dot{y}} = 0,\\
&xI_t + 2xyI_x + (y^2 + c)I_y + (2y\dot{x} + 2x\dot{y} - \dot{x}^2)I_{\dot{x}} + (2y - \dot{x})\dot{y}I_{\dot{y}} = 0.
\end{aligned}
$$

Набір функціонально незалежних інтегралів відповідної характеристичної системи складається з однієї функції

$$
I = \frac{x\dot{y} + y^2 - \dot{x}y + c}{\sqrt{4x\dot{y} - \dot{x}^2}}.
$$

Знайдемо розширення універсального інваріанту I_1 до універсального інваріанту другого порядку I_2. Для цього досить знайти два будь-які функціонально незалежні диференціальні інваріанти $\tilde{I}(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}, \ddot{x}, \ddot{y})$ та $\hat{I}(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}, \ddot{x}, \ddot{y})$, що явно залежать від других похідних.

Слід зазначити, що задача знаходження розв'язків системи

$$e_i^{(2)}\tilde{I} = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4 \tag{4}$$

та застосування методу рухомого реперу є надзвичайно складними і громіздкими, тому для знаходження одного з диференціальних інваріантів другого порядку подіємо оператором інваріантного диференціювання на інваріант I.

Оператор інваріантного диференціювання знаходиться у вигляді $X = \lambda(t, x, y, \dot{x}, \dot{y})D_t$, де функція λ знаходиться у неявному вигляді $\varphi(\lambda, t, x, y, \dot{x}, \dot{y})$ з системи $(e_i^{(1)} + \lambda D_t(\xi_i)\partial_\lambda)\varphi = 0$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Для даної реалізації алгебри Лі оператор інваріантного диференціювання має вигляд:

$$X = \frac{x}{x\dot{y} + y^2 - \dot{x}y + c} D_t.$$

Подіявши цим оператором на знайдений вище інваріант першого порядку I, отримаємо один з шуканих інваріантів другого порядку

$$\hat{I} = \frac{(\ddot{x} - 2\dot{y})x(x\dot{y}(\dot{x} - 4y) + \dot{x}(y^2 + c)) - \ddot{y}x^2(\dot{x}^2 - 2(x\dot{y} + y\dot{x}) + 2(y^2 + c))}{(4x\dot{y} - \dot{x}^2)^2},$$

який використовуємо для знаходження іншого інваріанта $\tilde{I}$ другого порядку. З перших трьох рівнянь системи (4) отримаємо $\tilde{I} = \tilde{I}(J_1, J_2, J_3, J_4)$, де

$$\begin{aligned} &J_1 = 2y - \dot{x}, \quad J_2 = 4x\dot{y} - \dot{x}^2, \\ &J_3 = x(\ddot{x} - 2\dot{y}), \quad J_4 = x^2\ddot{y} - xy(\ddot{x} - 2\dot{y}). \end{aligned} \tag{5}$$

Перепишемо четверте рівняння системи (4) та інваріанти I, $\hat{I}$ в термінах J_1, J_2, J_3, J_4

$$\begin{aligned} &2(J_1^2 - J_2 + 4c)\tilde{I}_{J_1} + 8J_1J_2\tilde{I}_{J_2} + 4(3J_1J_3 + 2J_4)\tilde{I}_{J_3} + \\ &\quad + (2J_1J_4 - J_1^2J_3 - J_2J_3 - 4cJ_3)\tilde{I}_{J_4} = 0, \end{aligned} \tag{6}$$

$$I = \frac{J_1^2 + J_2 + 4c}{\sqrt{J_2}}, \quad \hat{I} = \frac{2J_4(J_1^2 - J_2 + 4c) + J_1J_3(J_1^2 + J_2 + 4c)}{J_2^2}.$$

Скориставшись тим, що I та $\hat{I}$ є розв'язками рівняння (6), знаходимо третій функціонально незалежний з ними розв'язок цього рівняння:

$$\tilde{I}=\frac{2J_1(2J_4(J_1^2-J_2+4c)+J_1J_3(J_1^2+J_2+4c))-J_3((J_1^2+J_2+4c)^2-16cJ_2)}{(J_1^2-J_2+4c)\sqrt{J_2}((J_1^2+J_2+4c)^2-16cJ_2)}.$$

Повернувшись до вихідних змінних, отримаємо другий шуканий диференціальний інваріант реалізації $R(sl(2,\mathbb{R})\oplus A_1,3)$, що містить другі похідні:

$$\tilde{I}=\frac{\ddot{x}x(y^2-x\dot{y}+c)+\ddot{y}x^2(\dot{x}-2y)+2x\dot{y}(x\dot{y}-y^2-c)}{\sqrt{4x\dot{y}-\dot{x}^2}((x\dot{y}+y^2-y\dot{x}+c)^2-c(4x\dot{y}-\dot{x}^2))}.$$

Отже, узагальнений диференціальний інваріант другого порядку можна записати у вигляді $I_2=\left\{I,\hat{I},\tilde{I}\right\}$. Відповідну інваріантну систему наведено у параграфі 4.

3. Системи з тривимірною алгеброю інваріантності. В цьому параграфі подано повний перелік множин регулярних систем двох диференціальних рівнянь другого порядку, інваріантних відносно дійсних тривимірних алгебр Лі. Кожна інваріантна система записується у нормальній формі та містить дві параметр-функції $F(\omega_1,\omega_2)$ і $G(\omega_1,\omega_2)$, де ω_1, ω_2 – диференціальні інваріанти нульового та першого порядків. Відповідну реалізацію алгебри Лі з переліку, наведеного в роботі [10], вказано перед системою. Решта функцій, що зустрічаються у цьому параграфі, є довільними, диференційовними потрібну кількість разів, якщо не зазначене інше.

$R(3A_1,1)$: $\omega_1=\dot{x}$, $\omega_2=\dot{y}$,

$$\ddot{x}=F\left(\omega_1,\omega_2\right),\quad \ddot{y}=G\left(\omega_1,\omega_2\right).$$

$R(3A_1,3)$: $\omega_1=y$, $\omega_2=\frac{\dot{x}-\dot{\varphi}(y)}{\dot{y}}$,

$$\ddot{x}=\dot{y}^2F\left(\omega_1,\omega_2\right)+\dot{x}\dot{y}^2G\left(\omega_1,\omega_2\right)+\dot{y}\ddot{\varphi}(y),\quad \ddot{y}=\dot{y}^3G\left(\omega_1,\omega_2\right).$$

$R(A_{2.1}\oplus A_1,1)$: $\omega_1=\dot{x}e^y$, $\omega_2=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$,

$$\ddot{x}=\dot{x}^2F\left(\omega_1,\omega_2\right),\quad \ddot{y}=\dot{y}^2G\left(\omega_1,\omega_2\right).$$

$R(A_{2.1}\oplus A_1,2)$: $\omega_1=y$, $\omega_2=\frac{\dot{x}}{\dot{y}}+\ln\dot{y}$,

$$\ddot{x}=\dot{y}^2F\left(\omega_1,\omega_2\right)+\dot{x}\dot{y}G\left(\omega_1,\omega_2\right),\quad \ddot{y}=\dot{y}^2G\left(\omega_1,\omega_2\right).$$

$R(A_{2.1}\oplus A_1,3)$: $\quad \omega_1=y,\ \omega_2=\frac{\dot y}{\dot x}$,

$$\ddot x=\dot x^2F(\omega_1,\omega_2),\quad \ddot y=\dot y^2G(\omega_1,\omega_2).$$

$R(A_{2.1}\oplus A_1,4)$: $\quad \omega_1=y,\ \omega_2=\frac{\dot y x}{\dot x}$,

$$\ddot x=\dot x^2\dot yF(\omega_1,\omega_2),\quad \ddot y=\dot x\dot y^2F(\omega_1,\omega_2)+\dot y^2G(\omega_1,\omega_2).$$

$R(A_{3.1},1)$: $\quad \omega_1=y-\frac{1}{\dot x},\ \omega_2=\frac{\dot y}{\dot x}$,

$$\ddot x=\dot x^3F(\omega_1,\omega_2),\quad \ddot y=\dot x^2\dot yF(\omega_1,\omega_2)+\dot x^2G(\omega_1,\omega_2).$$

$R(A_{3.1},2)$: $\quad \omega_1=y,\ \omega_2=\frac{\dot x^2-2\dot y}{\dot y^2}$,

$$\ddot x=\dot y\left(\dot x^2-\dot y\right)F(\omega_1,\omega_2)+\dot x\dot y^2G(\omega_1,\omega_2),$$
$$\ddot y=\dot x\dot y^2F(\omega_1,\omega_2)+\dot y^3G(\omega_1,\omega_2).$$

$R(A_{3.1},3)$: $\quad \omega_1=y,\ \omega_2=\frac{\dot y}{\dot x}$,

$$\ddot x=\dot x^3F(\omega_1,\omega_2),\quad \ddot y=\dot x^2\dot yF(\omega_1,\omega_2)+\dot x^2G(\omega_1,\omega_2).$$

$R(A_{3.2},1)$: $\quad \omega_1=y-\frac{1}{\dot x},\ \omega_2=\frac{\dot y e^y}{\dot x}$,

$$\ddot x=\dot x^2\dot yF(\omega_1,\omega_2),\quad \ddot y=\dot x\dot y^2F(\omega_1,\omega_2)+\dot y^2G(\omega_1,\omega_2).$$

$R(A_{3.2},2)$: $\quad \omega_1=y,\ \omega_2=\frac{\dot y e^{\frac{1}{\dot x}}}{\dot x}$,

$$\ddot x=\dot x^2\dot yF(\omega_1,\omega_2),\quad \ddot y=\dot x\dot y^2F(\omega_1,\omega_2)+\dot y^2G(\omega_1,\omega_2).$$

$R(A_{3.2},3)$: $\quad \omega_1=y,\ \omega_2=\frac{\dot y}{\dot x}$,

$$\ddot x=\dot x^3e^{-x}F(\omega_1,\omega_2),\quad \ddot y=\dot x^2\dot ye^{-x}F(\omega_1,\omega_2)+\dot x^2G(\omega_1,\omega_2).$$

$R(A_{3.3},1)$: $\quad \omega_1=\dot x,\ \omega_2=\dot ye^y$,

$$\ddot x=\dot yF(\omega_1,\omega_2),\quad \ddot y=\dot y^2G(\omega_1,\omega_2).$$

$R(A_{3.3},2)$: $\quad \omega_1=y,\ \omega_2=\dot x$,

$$\ddot x=\dot yF(\omega_1,\omega_2),\quad \ddot y=\dot y^2G(\omega_1,\omega_2).$$

$R(A_{3.3},3)$: $\omega_1=x$, $\omega_2=\frac{\dot y}{\dot x}$,

$$\ddot x=\dot x^3e^yF\left(\omega_1,\omega_2\right),\quad \ddot y=\dot x^2\dot ye^yF\left(\omega_1,\omega_2\right)+\dot x^2G\left(\omega_1,\omega_2\right).$$

$R(A^a_{3.4},1)$: $\omega_1=\dot xe^{(1-a)y}$, $\omega_2=\dot ye^y$,

$$\ddot x=\dot x\dot yF\left(\omega_1,\omega_2\right),\quad \ddot y=\dot y^2G\left(\omega_1,\omega_2\right).$$

$R(A^a_{3.4},2)$: $\omega_1=y$, $\omega_2=\dot x\dot y^{a-1}$,

$$\ddot x=\dot x\dot yF\left(\omega_1,\omega_2\right),\quad \ddot y=\dot y^2G\left(\omega_1,\omega_2\right).$$

$R(A^a_{3.4},3)$: $\omega_1=y$, $\omega_2=\frac{x\dot y}{\dot x}$,

$$\ddot x=\dot x^3x^{\frac{2a-1}{1-a}}F\left(\omega_1,\omega_2\right),\quad \ddot y=\dot x^2\dot yx^{\frac{2a-1}{1-a}}F\left(\omega_1,\omega_2\right)+\dot y^2G\left(\omega_1,\omega_2\right).$$

$R(A^b_{3.5},1)$: $\omega_1=y+\operatorname{arctg}\dot x$, $\omega_2=\frac{\dot y^2e^{2by}}{1+\dot x^2}$,

$$\ddot x=\dot y\left(1+\dot x^2\right)F\left(\omega_1,\omega_2\right),\quad \ddot y=\dot x\dot y^2F\left(\omega_1,\omega_2\right)+\dot y^2G\left(\omega_1,\omega_2\right).$$

$R(A^b_{3.5},2)$: $\omega_1=y$, $\omega_2=\frac{1+\dot x^2}{\dot y^2}e^{2b\operatorname{arctg}\dot x}$,

$$\ddot x=\dot y\left(1+\dot x^2\right)F\left(\omega_1,\omega_2\right),\quad \ddot y=\dot x\dot y^2F\left(\omega_1,\omega_2\right)+\dot y^2G\left(\omega_1,\omega_2\right).$$

$R(A^b_{3.5},3)$: $\omega_1=y$, $\omega_2=\frac{\dot y\left(1+x^2\right)}{\dot x}$,

$$\ddot x=\dot x^3\left(1+x^2\right)^{-\frac32}e^{-b\operatorname{arctg}x}F\left(\omega_1,\omega_2\right),$$
$$\ddot y=\frac{\dot x\dot y^2e^{-b\operatorname{arctg}x}}{\sqrt{1+x^2}}F\left(\omega_1,\omega_2\right)+\dot y^2G\left(\omega_1,\omega_2\right)-\frac{2x\dot x\dot y}{1+x^2}.$$

$R(sl(2,\mathbb{R}),1)$: $\omega_1=2y-\dot x$, $\omega_2=4x\dot y-\dot x^2$,

$$\ddot x=\frac{1}{x}F\left(\omega_1,\omega_2\right)+2\dot y,\quad \ddot y=\frac{y}{x^2}F\left(\omega_1,\omega_2\right)+\frac{1}{x^2}G\left(\omega_1,\omega_2\right).$$

$R(sl(2,\mathbb{R}),2)$: $\omega_1=y$, $\omega_2=\frac{x^2\dot y^2}{\dot x^2+1}$,

$$\ddot x=x^2\dot y^3F(\omega_1,\omega_2)-\frac{1+\dot x^2}{x},\quad \ddot y=\dot y^2(\dot xF(\omega_1,\omega_2)+G(\omega_1,\omega_2))-\frac{2\dot x\dot y}{x}.$$

$R(sl(2,\mathbb{R}),3)$: $\quad \omega_1 = y$, $\omega_2 = \frac{x^2\dot{y}^2}{\dot{x}^2-1}$,

$$\ddot{x} = x^2\dot{y}^3F(\omega_1,\omega_2) - \frac{\dot{x}^2-1}{x}, \quad \ddot{y} = \dot{y}^2(\dot{x}F(\omega_1,\omega_2) + G(\omega_1,\omega_2)) - \frac{2\dot{x}\dot{y}}{x}.$$

$R(sl(2,\mathbb{R}),4)$: $\quad \omega_1 = y$, $\omega_2 = x\dot{y}$,

$$\ddot{x} = \frac{1}{2x}F(\omega_1,\omega_2) + \frac{\dot{x}^2}{2x}, \quad \ddot{y} = \frac{1}{x^2}G(\omega_1,\omega_2) - \frac{\dot{x}\dot{y}}{x}.$$

$R(so(3),1)$: $\quad \omega_1 = y$, $\omega_2 = \frac{\dot{x}^2+\cos^2 x}{\dot{y}^2}$,

$$\ddot{x} = \frac{\dot{y}^3}{\cos x}F(\omega_1,\omega_2) - 2\dot{x}^2 \operatorname{tg} x - \sin x \cos x,$$
$$\ddot{y} = \frac{\dot{x}\dot{y}^2}{\cos x}F(\omega_1,\omega_2) + \dot{y}^2G(\omega_1,\omega_2) - 2\dot{x}\dot{y} \operatorname{tg} x.$$

$R(so(3),2)$: $\quad \omega_1 = y - \operatorname{arctg} \frac{\dot{x}}{\cos x}$, $\omega_2 = \frac{\dot{x}^2+\cos^2 x}{(\dot{y}+\sin x)^2}$,

$$\ddot{x} = \frac{(\dot{x}^2+\cos^2 x)}{\cos x}\left((\dot{y}+\sin x)F(\omega_1,\omega_2) + \dot{y}\right) - \dot{x}^2 \operatorname{tg} x,$$
$$\ddot{y} = \frac{\dot{x}(\dot{y}+\sin x)^2}{\cos x}F(\omega_1,\omega_2) + \frac{\dot{x}\dot{y}(\dot{y}+\sin x)}{\cos x} + $$
$$+ (\dot{y}+\sin x)^2G(\omega_1,\omega_2) - \dot{x}\cos x - \dot{x}(\dot{y}+\sin x) \operatorname{tg} x.$$

4. Системи з алгеброю інваріантності розмірності чотири. Даний параграф присвячено системам двох диференціальних рівнянь другого порядку, інваріантним відносно дійсних чотиривимірних алгебр Лі. Як і у випадку тривимірних алгебр, інваріантні системи записуються у нормальній формі та містять дві параметр-функції $F(\omega)$ і $G(\omega)$, де ω – диференціальний інваріант нульового або першого порядку. Відповідна реалізація алгебри Лі зазначається перед системою, а її явний вигляд можна знайти у роботі [10]. Решта функцій, що позначені грецькими літерами, є довільними, диференційовними потрібну кількість разів, якщо не зазначене інше.

$R(4A_1,8)$: $\quad \omega = y$,

$$\ddot{x} = \frac{\dot{y}\,(\theta'\varphi''-\psi''+\theta''\dot{x})\,(\dot{y}G(\omega)+\theta''(\dot{x}-\varphi'))}{\theta''(\varphi'\theta'-\psi')} + \frac{\dot{y}^2F(\omega)}{\theta''} + \dot{y}\varphi'',$$

$$\ddot{y} = \frac{\dot{y}^3 G(\omega) + \dot{y}^2 \theta''(\dot{x} - \varphi')}{\varphi'\theta' - \psi'},$$

де вектор-функції $(y, \varphi(y))$ і $(\theta(y), \psi(y))$ – лінійно незалежні, а штрихами позначено похідні за змінною y.

$R(A_{2.1} \oplus 2A_1, 4)$: $\quad \omega = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$,

$$\ddot{x} = \dot{x}^2 F(\omega), \quad \ddot{y} = \dot{y}^2 G(\omega).$$

$R(A_{2.1} \oplus 2A_1, 6)$: $\quad \omega = \frac{\dot{y}}{y\dot{x}}$,

$$\ddot{x} = \dot{x}^2 F(\omega) + \dot{x}^2 \dot{y} G(\omega), \quad \ddot{y} = \dot{x}\dot{y}^2 G(\omega).$$

$R(A_{2.1} \oplus 2A_1, 9)$: $\quad \omega = y$,

$$\ddot{x} = \dot{y}^2 F(\omega) + \dot{x}\dot{y} G(\omega) - \dot{y}^2 \varphi'' \ln \dot{y}, \quad \ddot{y} = \dot{y}^2 G(\omega),$$

де $\varphi(y)$ – довільна функція від y, а штрихами позначено її похідні.

$R(2A_{2.1}, 3)$: $\quad \omega = \dot{y}\dot{x}^{-\frac{C}{1+C}} e^{\frac{y}{1+C}}$,

$$\ddot{x} = \dot{x}\dot{y} F(\omega), \quad \ddot{y} = \dot{y}^2 G(\omega).$$

$R(2A_{2.1}, 4)$: $\quad \omega = \frac{\dot{y}}{y} e^{\frac{\dot{x}}{\dot{y}}}$,

$$\ddot{x} = \frac{\dot{y}^2}{y}\left(F(\omega) - G(\omega) \ln \frac{\dot{y}}{y}\right), \quad \ddot{y} = \frac{\dot{y}^2}{y} G(\omega).$$

$R(2A_{2.1}, 5)$: $\quad \omega = y$,

$$\ddot{x} = \dot{x}\dot{y} F(\omega), \quad \ddot{y} = \dot{y}^2 G(\omega).$$

$R(2A_{2.1}, 6)$: $\quad \omega = \frac{x\dot{y}}{\dot{x}}$,

$$\ddot{x} = \dot{x}^2 \dot{y} e^y F(\omega), \quad \ddot{y} = \dot{x}\dot{y}^2 e^y F(\omega) + \dot{y}^2 G(\omega).$$

$R(A_{3.1} \oplus A_1, 5)$: $\quad \omega = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$,

$$\ddot{x} = \dot{y}^2 F(\omega) + \dot{x}\dot{y}^2 G(\omega), \quad \ddot{y} = \dot{y}^3 G(\omega).$$

$R(A_{3.1} \oplus A_1, 8)$: $\quad \omega = x$,

$$\ddot{x} = \dot{x}^3 G(\omega) - \frac{\dot{x}^2 \dot{y}}{\varphi'} F(\omega) - \frac{\dot{x}\dot{y}^2 \varphi''}{2\varphi'^2},$$

$$\ddot{y} = \left(\dot{x}^2 - \frac{\dot{x}\dot{y}^2}{\varphi'}\right) F(\omega) + \dot{x}^2\dot{y}G(\omega) + \frac{\dot{x}\dot{y}\varphi''}{\varphi'} - \frac{\dot{y}^3\varphi''}{2\varphi'^2},$$

де $\varphi(x)$ – довільна функція від x, а штрихами позначено її похідні.

$R(A_{3.2} \oplus A_1, 3)$: $\quad \omega = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} e^{\frac{1}{\dot{x}}}$,

$$\ddot{x} = \dot{x}^2\dot{y}F(\omega), \quad \ddot{y} = \dot{x}\dot{y}^2F(\omega) + \dot{y}^2G(\omega).$$

$R(A_{3.2} \oplus A_1, 5)$: $\quad \omega = \frac{y\dot{x}+\dot{x}-1}{\dot{y}} e^{-y}$,

$$\ddot{x} = \dot{y}^2e^y(1 - y\dot{x})F(\omega) + e^y\dot{x}\dot{y}^2G(\omega) - \dot{x}^2\dot{y},$$
$$\ddot{y} = \dot{y}^3e^yG(\omega) - y\dot{y}^3e^yF(\omega) - \dot{x}\dot{y}^2 - \dot{y}^2.$$

$R(A_{3.2} \oplus A_1, 6)$: $\quad \omega = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} e^y$,

$$\ddot{x} = \dot{x}\dot{y}(1 - y\dot{x})F(\omega) + \dot{x}^2\dot{y}G(\omega) - \dot{x}\dot{y}(1 - y\dot{x}),$$
$$\ddot{y} = \dot{x}\dot{y}^2G(\omega) - y\dot{x}\dot{y}^2F(\omega) - \dot{y}^2(1 - y\dot{x}).$$

$R(A_{3.2} \oplus A_1, 7)$: $\quad \omega = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$,

$$\ddot{x} = \dot{x}^3e^{-x}F(\omega), \quad \ddot{y} = \dot{x}^2\dot{y}e^{-x}F(\omega) + \dot{x}^2G(\omega).$$

$R(A_{3.3} \oplus A_1, 3)$: $\quad \omega = \dot{x}$,

$$\ddot{x} = \dot{y}F(\omega), \quad \ddot{y} = \dot{y}^2G(\omega).$$

$R(A_{3.3} \oplus A_1, 5)$: $\quad \omega = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} e^y$,

$$\ddot{x} = \dot{x}\dot{y}F(\omega) + \dot{x}^2\dot{y}G(\omega) - \dot{x}\dot{y}, \quad \ddot{y} = \dot{x}\dot{y}^2G(\omega) - \dot{y}^2.$$

$R(A_{3.3} \oplus A_1, 8)$: $\quad \omega = x$,

$$\ddot{x} = \dot{x}^3 \exp\left(\frac{y\varphi'\dot{x} - \varphi\dot{y}}{\varphi'\dot{x}}\right) F(\omega),$$
$$\ddot{y} = \dot{x}^2\dot{y} \exp\left(\frac{y\varphi'\dot{x} - \varphi\dot{y}}{\varphi'\dot{x}}\right) F(\omega) + \dot{x}^2G(\omega) + \frac{\dot{x}\dot{y}\varphi''}{\varphi'},$$

де $\varphi(x)$ – довільна функція від x, а штрихами позначено її похідні.

$R(A^a_{3.4} \oplus A_1, 3)$: $\quad \omega = \dot{x}\dot{y}^{a-1}$,

$$\ddot{x} = \dot{x}\dot{y}F(\omega), \quad \ddot{y} = \dot{y}^2G(\omega).$$

$R(A^a_{3.4} \oplus A_1, 5)$: $\quad \omega = \frac{\dot y e^{ay+y}}{\dot x e^y - a e^{ay}}$,

$$\ddot x = \dot y^2 e^{ay} F(\omega) + \dot x \dot y^2 e^y G(\omega) + (a-1)\dot x \dot y, \quad \ddot y = \dot y^3 e^y G(\omega) - \dot y^2.$$

$R(A^a_{3.4} \oplus A_1, 6)$: $\quad \omega = \frac{\dot y e^{ay}}{\dot x}$,

$$\ddot x = \dot x \dot y F(\omega) + \dot x \dot y^2 e^y G(\omega) - \dot x \dot y, \quad \ddot y = \dot y^3 e^y G(\omega) - \dot y^2.$$

$R(A^a_{3.4} \oplus A_1, 7)$: $\quad \omega = \frac{\dot y x}{\dot x}$,

$$\ddot x = \dot x^3 x^{\frac{2a-1}{1-a}} F(\omega), \quad \ddot y = \dot x^2 \dot y x^{\frac{2a-1}{1-a}} F(\omega) + \dot y^2 G(\omega).$$

$R(A^a_{3.4} \oplus A_1, 10)$: $\quad \omega = \dot y e^y$,

$$\ddot x = \dot y^2 e^{ay} F(\omega) + \dot x \dot y G(\omega) + a \dot x \dot y, \quad \ddot y = \dot y^2 G(\omega).$$

$R(A^b_{3.5} \oplus A_1, 3)$: $\quad \omega = \frac{\dot x^2+1}{\dot y^2} e^{2b \operatorname{arctg} \dot x}$,

$$\ddot x = (\dot x^2+1)\dot y F(\omega), \quad \ddot y = \dot x \dot y^2 F(\omega) + \dot y^2 G(\omega).$$

$R(A^b_{3.5} \oplus A_1, 5)$: $\quad \omega = \frac{\dot x(b\cos y - \sin y) + b \sin y + \cos y}{\dot y e^{by}}$,

$$\ddot x = \dot y^2 e^{by} \left(F(\omega)(\sin y + \dot x \cos y) + G(\omega)(\dot x \sin y - \cos y)\right) - \dot y(1+\dot x^2),$$
$$\ddot y = \dot y^3 e^{by} \left(F(\omega)\cos y + G(\omega)\sin y\right) - \dot y^2 (b + \dot x).$$

$R(A^b_{3.5} \oplus A_1, 6)$: $\quad \omega = \frac{\dot y (x^2+1)}{\dot x}$,

$$\ddot x = \dot x \dot y^2 \sqrt{x^2+1}\, e^{-b \operatorname{arctg} x} F(\omega),$$
$$\ddot y = \dot y^3 \sqrt{x^2+1}\, e^{-b \operatorname{arctg} x} F(\omega) + \dot y^2 G(\omega) - \frac{2x\dot x \dot y}{1+x^2}.$$

$R(sl(2,\mathbb{R}) \oplus A_1, 3)$: $\quad \omega = \frac{x\dot y + y^2 - \dot x y + c}{\sqrt{4x\dot y - \dot x^2}}$,

$$\ddot x = \frac{4x\dot y - \dot x^2}{x} \left(1 - \frac{4x\dot y - \dot x^2}{2(x\dot y + y^2 - \dot x y + c)}\right) F(\omega) +$$
$$+ \frac{(\dot x - 2y)(4x\dot y - \dot x^2)}{2x(\omega^2 - c)} G(\omega) + 2\dot y,$$
$$\ddot y = \frac{4x\dot y - \dot x^2}{2x^2(\dot x - 2y)} \left(4x\dot y - 2y\dot x + \frac{(4x\dot y - \dot x^2)(y^2 - x\dot y - c)}{x\dot y + y^2 - \dot x y + c}\right) F(\omega) -$$

$$-\frac{(4x\dot{y}-\dot{x}^2)(y^2-x\dot{y}+c)}{2x^2(\omega^2-c)}G(\omega).$$

$R(sl(2,\mathbb{R})\oplus A_1,4)$: $\quad \omega=\frac{x^2\dot{y}^2}{\dot{x}^2-1}$,

$$\ddot{x}=x^2\dot{y}^3F(\omega)-\frac{\dot{x}^2-1}{x},\quad \ddot{y}=\dot{y}^2\left(\dot{x}F(\omega)+G(\omega)\right)-\frac{2\dot{x}\dot{y}}{x}.$$

$R(sl(2,\mathbb{R})\oplus A_1,5)$: $\quad \omega=\frac{x^2\dot{y}^2}{\dot{x}^2+1}$,

$$\ddot{x}=x^2\dot{y}^3F(\omega)-\frac{\dot{x}^2+1}{x},\quad \ddot{y}=\dot{y}^2\left(\dot{x}F(\omega)+G(\omega)\right)-\frac{2\dot{x}\dot{y}}{x}.$$

$R(sl(2,\mathbb{R})\oplus A_1,6)$: $\quad \omega=x\dot{y}$,

$$\ddot{x}=\frac{1}{2x}F(\omega)+\frac{\dot{x}^2}{2x},\quad \ddot{y}=\frac{1}{x^2}G(\omega)-\frac{\dot{x}\dot{y}}{x}.$$

$R(sl(2,\mathbb{R})\oplus A_1,7)$: $\quad \omega=y$,

$$\ddot{x}=\frac{x\dot{y}^2}{2y^2}\left(F(\omega)+2G(\omega)\ln(x\dot{y})+\ln^2(x\dot{y})\right)+\frac{\dot{x}^2}{2x},$$
$$\ddot{y}=\frac{\dot{y}^2}{y}\left(G(\omega)+\ln(x\dot{y})\right)-\frac{\dot{x}\dot{y}}{x}.$$

$R(sl(2,\mathbb{R})\oplus A_1,8)$: $\quad \omega=y$,

$$\ddot{x}=\frac{x\dot{y}^2}{2}F(\omega)+\frac{\dot{x}^2}{2x},\quad \ddot{y}=\dot{y}^2G(\omega)-\frac{\dot{x}\dot{y}}{x}.$$

$R(so(3)\oplus A_1,1)$: $\quad \omega=\frac{\dot{x}^2+\cos^2 x}{\dot{y}^2}$,

$$\ddot{x}=\frac{\dot{y}^3}{\cos x}F(\omega)-2\dot{x}^2\operatorname{tg}x-\sin x\cos x,$$
$$\ddot{y}=\frac{\dot{x}\dot{y}^2}{\cos x}F(\omega)+\dot{y}^2G(\omega)-2\dot{x}\dot{y}\operatorname{tg}x.$$

$R(so(3)\oplus A_1,2)$: $\quad \omega=\frac{\dot{x}^2+\cos^2 x}{(\dot{y}+\sin x)^2}$,

$$\ddot{x}=\frac{(\dot{x}^2+\cos^2 x)^{3/2}}{\cos x}F(\omega)+\frac{\dot{y}(\dot{x}^2+\cos^2 x)}{\cos x}-\dot{x}^2\operatorname{tg}x,$$

$$\ddot{y} = (\dot{y} + \sin x)^2 \left(\frac{\dot{x}}{\cos x} F(\omega) + G(\omega) \right) + \frac{\dot{x}(\dot{y}^2 - 1)}{\cos x}.$$

$R(A_{4.1}, 3)$: $\quad \omega = \frac{\dot{y}^2}{2\dot{y} - \dot{x}^2}$,

$$\ddot{x} = \dot{y}(\dot{y} - \dot{x}^2) F(\omega) + \dot{x}\dot{y}^2 G(\omega), \quad \ddot{y} = \dot{y}^3 G(\omega) - \dot{x}\dot{y}^2 F(\omega).$$

$R(A_{4.1}, 5)$: $\quad \omega = \frac{y\dot{x} + 1}{\dot{y}}$,

$$\ddot{x} = \dot{y}^2(1 + \dot{x}y) F(\omega) + \dot{x}\dot{y}^2 G(\omega) + \dot{x}^2 \dot{y},$$
$$\ddot{y} = \dot{y}^3 y F(\omega) + \dot{y}^3 G(\omega) + \dot{x}\dot{y}^2.$$

$R(A_{4.1}, 6)$: $\quad \omega = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$,

$$\ddot{x} = \frac{1}{2}\dot{x}^3 x^2 F(\omega) + \frac{1}{2}\dot{x}^3 G(\omega) + 2x\dot{x}^2\dot{y},$$
$$\ddot{y} = \dot{x}^2 \left(1 + \frac{1}{2}x^2\dot{y}\right) F(\omega) + \frac{1}{2}\dot{x}^2\dot{y} G(\omega) + 2x\dot{x}\dot{y}^2.$$

$R(A^b_{4.2}, 2)$: $\quad \omega = \dot{y} e^{\frac{(b-1)\dot{x}}{\dot{y}}}$,

$$\ddot{x} = \dot{y}^{\frac{2b-1}{b-1}} F(\omega) + \dot{x}\dot{y}^{\frac{b}{b-1}} G(\omega), \quad \ddot{y} = \dot{y}^{\frac{2b-1}{b-1}} G(\omega).$$

$R(A^b_{4.2}, 4)$: $\quad \omega = \dot{y} e^{-by}$,

$$\ddot{x} = \dot{y}^2 e^{-y} F(\omega) + \dot{x}\dot{y} G(\omega), \quad \ddot{y} = \dot{y}^2 G(\omega).$$

$R(A^b_{4.2}, 5)$: $\quad \omega = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} x^{\frac{b-2}{b-1}}$,

$$\ddot{x} = \frac{\dot{x}^2\dot{y}}{b-1} (\ln x F(\omega) + (b-1) G(\omega) - 2\ln x),$$
$$\ddot{y} = \dot{x}\dot{y} \left(\frac{\dot{y}\ln x}{b-1} - \frac{1}{x} \right) F(\omega) + \dot{x}\dot{y}^2 G(\omega) - \frac{2\dot{x}\dot{y}^2 \ln x}{b-1}.$$

$R(A^b_{4.2}, 7)$: $\quad \omega = \frac{e^y(b-1)\dot{x} + e^{by}}{\dot{y}}$,

$$\ddot{x} = \dot{y}^2 e^{-y} F(\omega) + \dot{x}\dot{y}^2 e^{-by} G(\omega) + (b-1)\dot{x}\dot{y},$$
$$\ddot{y} = \dot{y}^3 e^{-by} G(\omega) + (b-1)\dot{y}^2.$$

$R(A_{4.3},3)$: $\quad \omega=\frac{\dot x}{\dot y}+\ln\dot y$,

$$\ddot x=\dot y^2F\left(\omega\right)+\dot x\dot yG\left(\omega\right),\quad \ddot y=\dot y^2G\left(\omega\right).$$

$R(A_{4.3},5)$, $\varepsilon\in\{0,1\}$: $\quad \omega=\frac{\varepsilon x+e^y}{\dot y}$,

$$\ddot x=\dot y^2F\left(\omega\right)+\dot x\dot y^2e^{-y}G\left(\omega\right)+\dot x\dot y,\quad \ddot y=\dot y^3e^{-y}G\left(\omega\right)+\dot y^2.$$

$R(A_{4.3},6)$: $\quad \omega=\frac{x\dot y}{\dot x}$,

$$\ddot x=x\dot x\dot y^2\left(F\left(\omega\right)-G\left(\omega\right)\ln x\right)-2\dot x^2\dot y\ln x,$$
$$\ddot y=x\dot y^3F\left(\omega\right)+\dot y^2(1-x\dot y\ln x)G\left(\omega\right)-2\dot x\dot y^2\ln x.$$

$R(A_{4.4},2)$: $\quad \omega=\frac{\dot x^2-2\dot y}{\dot y^2}$,

$$\ddot x=\frac{\dot y}{e^{\frac{\dot x}{\dot y}}}\left(\left(\dot y-\dot x^2\right)F\left(\omega\right)+\dot x\dot yG\left(\omega\right)\right),\quad \ddot y=\frac{\dot y^2}{e^{\frac{\dot x}{\dot y}}}\left(\dot yG\left(\omega\right)-\dot xF\left(\omega\right)\right).$$

$R(A_{4.4},4)$: $\quad \omega=\frac{1+y\dot x}{\dot y}e^y$,

$$\ddot x=\frac{\dot y^2}{e^y}\left((1+y\dot x)F(\omega)+\dot xG(\omega)\right)+\dot x^2\dot y,\quad \ddot y=\frac{\dot y^3}{e^y}\left(yF(\omega)+G(\omega)\right)+\dot x\dot y^2.$$

$R(A_{4.4},5)$: $\quad \omega=\frac{\dot x}{\dot y}e^x$,

$$\ddot x=\dot x^2\dot yF\left(\omega\right)+\frac{1}{2}x^2\dot x^2\dot yG\left(\omega\right)+2x\dot x^2\dot y,$$
$$\ddot y=\dot x\dot y^2F\left(\omega\right)+\dot x\dot y\left(1+\frac{1}{2}x^2\dot y\right)G\left(\omega\right)+2x\dot x\dot y^2.$$

$R(A_{4.5}^{a,b,c},2)$: $\quad \omega=\frac{\dot y^{b-a}}{\dot x^{c-a}}$,

$$\ddot x=\dot x^{\frac{b-2a}{b-a}}F\left(\omega\right),\quad \ddot y=\dot y^{\frac{c-2a}{c-a}}G\left(\omega\right).$$

$R(A_{4.5}^{1,1,1},7)$: $\quad \omega=y$,

$$\ddot x=\dot y\left(\dot x-\varphi'\right)\left(F(\omega)+\dot xG(\omega)\right)+\dot y\varphi'',\quad \ddot y=\dot y^2\left(\dot x-\varphi'\right)G(\omega),$$

де $\varphi(y)$ – довільна функція від y, а штрихами позначено її похідні.

$R(A^{1,1,c}_{4.5}, 6), c \neq 1$: $\quad \omega = x,$

$$\ddot{x} = \dot{x}^3 \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)^{1/c} F(\omega), \quad \ddot{y} = \dot{x}^2 \dot{y} \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)^{1/c} F(\omega) + \dot{x}\dot{y}G(\omega).$$

$R(A^{1,1,c}_{4.5}, 7), c \neq 1$: $\quad \omega = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} e^y,$

$$\ddot{x} = \dot{x}\dot{y}F(\omega) + \dot{x}^2\dot{y}G(\omega) + (c-1)\dot{x}\dot{y}, \quad \ddot{y} = \dot{x}\dot{y}^2 G(\omega) + (c-1)\dot{y}^2.$$

$R(A^{a,b,1}_{4.5}, 5)$, $-1 \leq a < b < 1$; $b > 0$ при $a = -1$; $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{0,1\}$, $\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 \neq 0$:
$$\omega = \dot{y}^{-1}(\varepsilon_1(a-1)e^{-by}\dot{x} + \varepsilon_2(b-1)e^{-ay}),$$

$$\ddot{x} = \frac{\dot{y}e^{by}}{\varepsilon_1(a-1)} \left(\dot{y}F(\omega) - \varepsilon_2(b-1)(a-b)e^{-ay}\right) + \dot{x}\dot{y}^2 e^{ay} G(\omega),$$
$$\ddot{y} = \dot{y}^3 e^{ay} G(\omega) - (a-1)\dot{y}^2.$$

$R(A^{a,b,1}_{4.5}, 6), -1 \leq a < b < 1$; $b > 0$ при $a = -1$: $\quad \omega = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} x^{\frac{a-b-1}{a-b}},$

$$\ddot{x} = \dot{x}^2 \dot{y} x^{\frac{b-1}{a-b}} F(\omega), \quad \ddot{y} = \dot{x}\dot{y}^2 x^{\frac{b-1}{a-b}} F(\omega) + \dot{y}^2 x^{\frac{1}{b-a}} G(\omega).$$

$R(A^{a,b}_{4.6}, 2)$: $\quad \omega = \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) e^{2(a-b)\operatorname{arctg}\frac{\dot{x}}{\dot{y}}},$

$$\ddot{x} = e^{-a\operatorname{arctg}\frac{\dot{x}}{\dot{y}}}(\dot{y}F(\omega)) + \dot{x}G(\omega)), \ \ddot{y} = e^{-a\operatorname{arctg}\frac{\dot{x}}{\dot{y}}}(\dot{y}G(\omega) - \dot{x}F(\omega)).$$

$R(A^{a,b}_{4.6}, 4)$: $\quad \omega = \frac{\dot{x}\varepsilon e^{b\operatorname{arctg} y}(b-a+y)\sqrt{1+y^2} - (1+y^2)e^{a\operatorname{arctg} y}}{\dot{y}},$

$$\ddot{x} = \frac{\dot{y}^2 e^{-b\operatorname{arctg} y}}{(1+y^2)^{3/2}} F(\omega) + \frac{\dot{x}\dot{y}^2 e^{-a\operatorname{arctg} y}}{(1+y^2)^2}(G(\omega) - \varepsilon y F(\omega)) +$$
$$+ \frac{2y\dot{x}\dot{y}}{1+y^2} - \frac{\dot{x}^2\dot{y}\varepsilon e^{(b-a)\operatorname{arctg} y}(y^2+1+(b-a+y)^2)}{(1+y^2)^{3/2}},$$
$$\ddot{y} = \frac{\dot{y}^3 e^{-a\operatorname{arctg} y}}{(1+y^2)^2}(G(\omega) - \varepsilon y F(\omega)) + \frac{2y\dot{y}^2}{1+y^2} -$$
$$- \frac{\dot{x}\dot{y}^2 \varepsilon e^{(b-a)\operatorname{arctg} y}\left(y^2+1+(b-a+y)^2\right)}{(1+y^2)^{3/2}}.$$

$R(A_{4.7}, 2)$: $\quad \omega = \frac{\dot{y}}{y\dot{x}-1} e^{\frac{\dot{x}}{\dot{y}}},$

$$\ddot{x} = \dot{x}\dot{y}^2 F(\omega) + \dot{y}^2(y\dot{x}-1)e^{-\frac{\dot{x}}{\dot{y}}} G(\omega) - \dot{x}^2\dot{y},$$

$$\ddot{y} = \dot{y}^3 F(\omega) + \dot{y}^3 y e^{-\frac{\dot{x}}{\dot{y}}} G(\omega) - \dot{x}\dot{y}^2.$$

$R(A_{4.7}, 3)$: $\omega = \frac{\dot{x}^2 - 2\dot{y}}{\dot{y}^2} e^{2y}$,

$$\ddot{x} = \dot{y} e^{-y} \left(\dot{y} - \dot{x}^2\right) F(\omega) + \dot{x}\dot{y}^2 e^{-2y} G(\omega), \ \ddot{y} = \dot{y}^3 e^{-2y} G(\omega) - \dot{x}\dot{y}^2 e^{-y} F(\omega).$$

$R(A_{4.7}, 4)$: $\omega = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} e^{y}$,

$$\ddot{x} = \dot{x}^3 F(\omega) + y\dot{x}^3, \quad \ddot{y} = \dot{x}^2 \dot{y} F(\omega) + \dot{y}^2 G(\omega) + y\dot{x}^2 \dot{y}.$$

$R(A_{4.7}, 5)$: $\omega = y$,

$$\ddot{x} = \dot{x}^3 F(\omega) - \dot{x}^3 \ln \frac{\dot{y}}{\dot{x}}, \quad \ddot{y} = \dot{x}^2 \dot{y} F(\omega) + \dot{y}^2 G(\omega) - \dot{x}^2 \dot{y} \ln \frac{\dot{y}}{\dot{x}}.$$

$R(A^b_{4.8}, 2)$: $\omega = \left(y - \frac{1}{\dot{x}}\right) \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)^{\frac{b}{1-b}}$,

$$\ddot{x} = \dot{x}^2 \dot{y} F(\omega), \quad \ddot{y} = \dot{x}\dot{y}^2 F(\omega) + \frac{\dot{x}\dot{y}^2}{y\dot{x} - 1} G(\omega).$$

$R(A^b_{4.8}, 3)$: $\omega = \frac{\dot{x}^2 - 2\dot{y}}{\dot{y}^2} y^{\frac{2b}{b-1}}$,

$$\ddot{x} = \dot{y} y^{\frac{2b-1}{1-b}} \left(\dot{y} - \dot{x}^2\right) F(\omega) + \dot{x}\dot{y}^2 y^{\frac{3b-1}{1-b}} G(\omega),$$
$$\ddot{y} = \dot{y}^3 y^{\frac{3b-1}{1-b}} G(\omega) - \dot{x}\dot{y}^2 y^{\frac{2b-1}{1-b}} F(\omega).$$

$R(A^b_{4.8}, 4)$: $\omega = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} e^{y}$,

$$\ddot{x} = \dot{x}^2 \dot{y} e^{by} F(\omega), \quad \ddot{y} = \dot{x}\dot{y}^2 e^{by} F(\omega) + \dot{y}^2 G(\omega).$$

$R(A^b_{4.8}, 5)$: $\omega = y$,

$$\ddot{x} = \dot{x}^{b+2} \dot{y}^{1-b} F(\omega), \quad \ddot{y} = \dot{x}^{b+1} \dot{y}^{2-b} F(\omega) + \dot{y}^2 G(\omega).$$

$R(A^{-1}_{4.8}, 7)$: $\omega = y$,

$$\ddot{x} = \dot{x}\dot{y}^2 \left(F(\omega) + G(\omega) \ln \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \right), \quad \ddot{y} = \dot{y}^3 F(\omega) + \dot{y}^2 \left(1 + \dot{y} \ln \frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right) G(\omega).$$

$R(A^b_{4.8}, 6), b \neq \pm 1$: $\omega = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} e^{by}$,

$$\ddot{x} = \dot{x}^2 \dot{y} e^{y} F(\omega), \quad \ddot{y} = \dot{x}\dot{y}^2 e^{y} F(\omega) + \dot{y}^2 G(\omega).$$

$R(A^b_{4.8}, 7), b \neq \pm 1$: $\quad \omega = y,$

$$\ddot{x} = \dot{x}^{\frac{2b+1}{b}} \dot{y}^{\frac{b-1}{b}} F(\omega), \quad \ddot{y} = \dot{x}^{\frac{b+1}{b}} \dot{y}^{\frac{2b-1}{b}} F(\omega) + \dot{y}^2 G(\omega).$$

$R(A^0_{4.8}, 9)$: $\quad \omega = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} e^{\frac{y\dot{x}-1}{C\dot{x}}},$

$$\ddot{x} = \dot{x}^2 \dot{y} F(\omega), \quad \ddot{y} = \dot{x}\dot{y}^2 F(\omega) + \dot{y}^2 G(\omega), \quad C \neq 0.$$

$R(A^a_{4.9}, 2)$: $\quad \omega = \frac{y\dot{x}-1}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} e^{a \operatorname{arctg} \frac{\dot{y}}{\dot{x}}},$

$$\ddot{x} = \dot{x}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) F(\omega) + \dot{y}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) G(\omega) - \dot{x}^2 \dot{y},$$
$$\ddot{y} = \dot{y}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) F(\omega) + \frac{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)\left(\dot{x} + y\dot{y}^2\right)}{y\dot{x} - 1} G(\omega) - \dot{x}\dot{y}^2.$$

$R(A^a_{4.9}, 3)$: $\quad \omega = \frac{2\dot{y}-\dot{x}^2}{\dot{y}^2}(1+y^2) e^{2a \operatorname{arctg} y},$

$$\ddot{x} = \frac{2\dot{y} - \dot{x}^2}{1+y^2}\left(\frac{(\dot{y} - \dot{x}^2)}{\sqrt{2\dot{y} - \dot{x}^2}} F(\omega) + \dot{x} G(\omega) + y\dot{x}\right),$$
$$\ddot{y} = \frac{\dot{y}(2\dot{y} - \dot{x}^2)}{1+y^2}\left(G(\omega) - \frac{\dot{x}}{\sqrt{2\dot{y} - \dot{x}^2}} F(\omega) + y\right).$$

$R(A_{4.10}, 3)$: $\quad \omega = \frac{\dot{y} e^{y + C \operatorname{arctg} \dot{x}}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}},$

$$\ddot{x} = \dot{y}\left(1 + \dot{x}^2\right) F(\omega), \quad \ddot{y} = \dot{x}\dot{y}^2 F(\omega) + \dot{y}^2 G(\omega).$$

$R(A_{4.10}, 4)$: $\quad \omega = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}\left(1 + x^2\right),$

$$\ddot{x} = \frac{\dot{x}^3 e^y}{(1+x^2)^{3/2}} F(\omega), \quad \ddot{y} = \frac{\dot{x}\dot{y}}{1+x^2}\left(\frac{\dot{x} e^y}{(1+x^2)^{1/2}} F(\omega) + G(\omega) - 2x\right).$$

$R(A_{4.10}, 5)$: $\quad \omega = y + \operatorname{arctg} \dot{x},$

$$\ddot{x} = \dot{y}\left(1 + \dot{x}^2\right) F(\omega), \quad \ddot{y} = \dot{x}\dot{y}^2 F(\omega) + \dot{y}^2 G(\omega).$$

$R(A_{4.10}, 6)$: $\quad \omega = y,$

$$\ddot{x} = \dot{y}\left(1 + \dot{x}^2\right) F(\omega), \quad \ddot{y} = \dot{x}\dot{y}^2 F(\omega) + \dot{y}^2 G(\omega).$$

5. Заключні зауваження. У цій роботі отримано вичерпний опис регулярних нормальних систем двох звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, інваріантних відносно дійсних алгебр Лі розмірностей три та чотири. Решта інваріантних систем або є сингулярними, тобто включають умови виродження рангів других продовжень генераторів алгебри Лі, або не можуть бути записані у нормальній формі. Опис таких систем, а також питання лінеаризації систем типу (1) теж є цікавими з точки зору застосувань та стануть предметом наших подальших досліджень. Іншою важливою задачею є знаходження геодезичних рівнянь серед систем другого порядку, а саме "докласифікація" отриманих систем, інваріантних відносно чотиривимірних алгебр Лі. Також потрібно дослідити, які з отриманих інваріантних систем є ньютонівськими, а саме, які з них можна записати у вигляді

$$\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \ddot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y} \tag{7}$$

з потенціал-функцією $V = V(x, y)$.

Як обгрунтування важливості отриманих результатів і доцільності подальших досліджень наведемо декілька фізично цікавих систем, що містяться серед побудованих у статті.

Приклад 2. Класичну задачу Кеплера можна переписати через полярні координати у вигляді системи двох диференціальних рівнянь другого порядку

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + \frac{\mu}{r^2} = 0, \quad r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0.$$

Ця система як частковий випадок міститься в найбільш загальній системі, що інваріантна відносно реалізації $R(A_{2.1} \oplus A_1, 1)$.

Приклад 3. Узагальнена система Єрмакова

$$\ddot{x} = \frac{1}{x^3} F\left(\frac{y}{x}\right), \quad \ddot{y} = \frac{1}{y^3} G\left(\frac{y}{x}\right)$$

інваріантна відносно реалізації алгебри Лі $sl(2, \mathbb{R})$, еквівалентної реалізації $R(sl(2, \mathbb{R}), 1)$.

Приклад 4. Двовимірна задача з центральною силою

$$\ddot{\boldsymbol{r}} + \left(\frac{\mu}{(x^2 + y^2)^2} - \epsilon\right)\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}, \quad \mu, \epsilon > 0, \quad \boldsymbol{r} = (x, y)$$

інваріантна відносно реалізації алгебри Лі $sl(2,\mathbb{R})\oplus A_1$, еквівалентної реалізації $R(sl(2,\mathbb{R})\oplus A_1, 3)$ та в полярних координатах може бути переписана у вигляді

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 + \frac{\mu}{r^3} - \varphi r = 0, \quad r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = 0.$$

Автори вдячні В.М. Бойко, В.І. Лагно, А.Г. Нікітіну та Р.О. Поповичу за постановку задачі та корисні дискусії. Дослідження МН частково підтримані грантом Президента України для молодих учених № GP/F11/0061 та грантом INTAS № 04-83-3217.

[1] Damianou P.A., Sophocleous C. Symmetries of Hamiltonian systems with two degrees of freedom // J. Math. Phys. – 1999. – **40**, № 1. – P. 210–235.

[2] Fels M., Olver P.J. Moving coframes. I. A practical algorithm // Acta Appl. Math. – 1998. – **51**. – P. 161–213.

[3] Fels M., Olver P.J. Moving coframes. II. Regularization and theoretical foundations // Acta Appl. Math. – 1999. – **55**. – P. 127–208.

[4] Feroze T., Mahomed F.M., Qadir A. The connection between isometries and symmetries of geodesic equations of the underlying spaces, to appear.

[5] Lie S. Über Differentiation // Math. Ann. – 1884. – **24**. – P. 537–578.

[6] Lie S. Theorie der Transformationsgruppen, Vol. 1–3. – Leipzig, 1888, 1890, 1893. – 645 s., 568 s., 830 s.

[7] Mahomed F.M., Qadir A. Invariant criteria for a system of geodesic equations corresponding to spaces of constant nonzero curvature, to appear.

[8] Olver P. Equivalence, invariants, and symmetry. – Cambridge: Cambridge University Press, 1995. – 525 p.

[9] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – Москва: Наука, 1978. – 400 с.

[10] Popovych R., Boyko V., Nesterenko M., Lutfullin M. Realizations of real low-dimensional Lie algebras // J. Phys. A: Math. Gen. – 2003. – **36**. – P. 7337–7360.

[11] Tresse A. Sur les invariants differentiels des groupes continus de transformations // Acta Math. – 1894. – **18**. – P. 1–88.

[12] Tresse A. Determination des invariants ponctuels de l'equation differentielle du second ordre $y'' = \omega(x, y, y')$. – Leiptzig: S. Hirzel, 1896.

[13] Wafo Soh C., Mahomed F.M. Canonical forms for systems of two second-order ordinary differential equations // J. Phys. A: Math. Gen. – 2001. – **34**. – P. 2883–2911.

[14] Wafo Soh C., Mahomed F.M. Linearization criteria for a system of second-order ordinary differential equations // Internat. J. Non-Linear Mech. – 2001. – **36**. – P. 671–677.