Збірник праць Інституту математики НАН України 2006, т.3, N 2, 63–70

УДК 514.745.82

Інтегровні геодезійні потоки на двовимірній сфері, породжені одновимірними багаточастинковими системами

А.Я. ВУС

Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів
E-mail: matmod@franko.lviv.ua

Розглянуто питання існування додаткового першого інтеграла геодезійного потоку ріманової метрики на двовимірній сфері. Отримано явний вигляд відповідних метрик, пов'язаних з потенціалами взаємодії інтегровних три- та чотиричастинкових систем Калоджеро–Мозера та Тоди.

The problem of the existence of additional first integral for the geodesic flow of Riemannian metric on two-dimensional sphere is considered. The explicit form of corresponding metrics, connected with potentials of interaction in integrable three- and four-particle Calogero–Moser and Toda systems is obtained.

1. Вступ. Однією з нетривіальних задач у теорії інтегровних скінченновимірних гамільтонових систем є проблема інтегровності геодезійних потоків ріманових метрик на сфері S^2.

Нагадаємо, що на довільному гладкому многовиді M з рімановою метрикою ds^2 можна сконструювати геодезійний потік – гамільтонову систему з гамільтоніаном $\mathcal{H} = \frac{1}{2}\|\vec{p}\|^2$, де $\vec{p}$ – вектор узагальнених імпульсів і $\|\cdot\|$ – норма на дотичному просторі, індукована відповідною метрикою ds^2. Геодезійний потік називається *інтегровним*, якщо він є інтегровним як гамільтонова система. Якщо розглядуваний многовид є сферою S^2, відповідний геодезійний потік є гамільтоновою системою з двома ступенями вільності, тому достатньою умовою його інтегровності за Ліувіллем є існування ще однієї функції на дотичному розшаруванні $F : T^*S^2 \to \mathbb{R}$, функціонально незалежної з $\mathcal{H}$, яка є сталою на траєкторіях гамільтонової системи. Відомо, що у випадку двовимірного многовида S^2 існує система глобальних координат $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, відомих як ізотермічні координати (див. [1]), в яких метрика на сфері має вигляд

$$ds^2 = \lambda(x, y)(dx^2 + dy^2), \tag{1}$$

а відповідний гамільтоніан – вигляд

$$\mathcal{H} = (p_x^2 + p_y^2)/\lambda(x, y). \tag{2}$$

Очевидно, достатньо шукати додаткові перші інтеграли гамільтонової системи з гамільтоніаном (2) у вигляді однорідного многочлена за імпульсами, оскільки будь-яка однорідна за імпульсами компонента розвинення інтеграла F в ряд Лорана знову є першим інтегралом цієї ж системи (див. [2]). Проблеми існування для геодезійного потоку додаткових перших інтегралів, що є лінійними або квадратичними функціями за імпульсами, є повністю досліджені (див., наприклад, [3]). Однак для випадку додаткових інтегралів вищих порядків відомі лише деякі частинні випадки, які переважно пов'язані з класичними інтегровними задачами динаміки твердого тіла.

2. Інтеграл третього степеня. Розглянемо задачу існування додаткового першого інтеграла, кубічного за імпульсами, вигляду

$$F = E^{30}(x, y)p_x^3 + E^{21}(x, y)p_x^2 p_y + E^{12}(x, y)p_x p_y^2 + E^{03}(x, y)p_y^3 \tag{3}$$

для геодезійного потоку метрики (1) на сфері S^2.

Надалі перейдемо до комплексних координат z, $\bar{z}$ $(z = x + iy)$. У цих координатах метрика (1) має вигляд $ds^2 = \lambda(z, \bar{z})dzd\bar{z}$, а гамільтоніан задається формулою $\mathcal{H} = 2p\bar{p}/\lambda(z, \bar{z})$, де $p = (p_x - ip_y)/2$ – відповідний узагальнений імпульс.

Зобразимо перший інтеграл (3) в координатах z, $\bar{z}$, p, $\bar{p}$ у вигляді

$$F = A(z, \bar{z})p^3 + B(z, \bar{z})p^2\bar{p} + C(z, \bar{z})p\bar{p}^2 + D(z, \bar{z})\bar{p}^3. \tag{4}$$

Оскільки F є дійснозначною функцією, то симетричні функціональні коефіцієнти в (4) є комплексно-спряженими, тобто $D = \bar{A}$, $C = \bar{B}$. Запишемо умову того, що функція (4) є першим інтегралом гамільтонової системи з гамільтоніаном $\mathcal{H}$. Тоді дужка Пуассона $\{\mathcal{H}, F\}$ тотожно дорівнює нулю:

$$\{\mathcal{H}, F\} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial z}\frac{\partial F}{\partial p} + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\bar{z}}\frac{\partial F}{\partial\bar{p}} - \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p}\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\bar{p}}\frac{\partial F}{\partial\bar{z}} = 0.$$

Прирівнюючи до нуля коефіцієнти при усіх мономах $p^i\bar{p}^j$ в дужці Пуассона $\{\mathcal{H}, F\}$, одержимо систему рівнянь

$$\begin{aligned} &A_2 = 0, \quad A_1\lambda + B_2\lambda + 3A\lambda_1 + B\lambda_2 = 0, \\ &B_1\lambda + C_2\lambda + 2B\lambda_1 + 2C\lambda_2 = 0, \\ &C_1\lambda + D_2\lambda + C\lambda_1 + 3D\lambda_2 = 0, \quad D_1 = 0, \end{aligned} \tag{5}$$

де введено позначення $A_1 := \partial A/\partial z$, $A_2 := \partial A/\partial \bar{z}$ і т.п.

З першого рівняння негайно отримуємо, що $A = A(z)$ є голоморфною функцією аргументу $z \in \mathbb{C}$. Елементарними міркуваннями (див. [4]) легко показати, що $A(z)$ є поліномом не вище 6-го степеня. Відповідно, диференціальні форми $\lambda(z,\bar{z})dzd\bar{z}$, $dz^3/A(z)$, $dz^2d\bar{z}/B(z,\bar{z})$ є інваріантними щодо довільного голоморфного перетворення глобальної координати z, тобто

$$dz^3/A(z) = d\omega^3/\tilde{A}(\omega), \quad \lambda(z,\bar{z})dzd\bar{z} = \tilde{\lambda}(\omega,\bar{\omega})d\omega d\bar{\omega}.$$

Лема. *При $\omega \to \infty$ справедливі такі асимптотики:*

$$\begin{aligned} &\tilde{\lambda}(\omega,\tilde{\omega}) = \frac{a + o(1)}{\omega^2\tilde{\omega}^2}, \quad \tilde{\beta}(\omega,\tilde{\omega}) = (b + o(1))\omega^2, \\ &\widetilde{\Phi}(\omega,\tilde{\omega}) = c + o(1), \end{aligned}$$

де a, b, c – деякі константи (можливо, нульові).

Доведення леми цілком аналогічне до відповідного результату Колокольцова [4], яке було одержано для додаткових квадратичних за імпульсами перших інтегралів. Таким чином, заміна змінної

$$z = \int_0^\omega (3\widetilde{A}(s)/i)^{-1/3} ds \tag{6}$$

переводить глобальну координату ω в локальну координату $z \in K \subset \mathbb{C}$, якій відповідає поліном $A(z) = i/3$.

Теорема. *Глобальний поліном $\widetilde{A}(\omega)$ з точністю до дробово-лінійного перетворення може мати лише один із наступних виглядів:*

1. $\widetilde{A}(\omega) = i/3$,
2. $\widetilde{A}(\omega) = i\omega/3$,
3. $\widetilde{A}(\omega) = i\omega^2/3$,

4. $\widetilde{A}(\omega) = i\omega^3/3$,
5. $\widetilde{A}(\omega) = i(\omega - \theta)^2(\omega + \bar{\theta})^2/3$.

Доведення теореми легко випливає з однозначності оберненого перетворення $\omega(z) : K \to \mathbb{C}$, що пов'язане з однозначністю відображення, оберненого до (6), і практично повністю повторює міркування роботи [4], проведені для випадку квадратичного додаткового першого інтеграла.

Таким чином, зручно розглядати випадок локальної координати z, для якої $A(z) = \mathrm{const} = i/3$, оскільки всі інші інтегровні випадки можуть бути легко отримані за допомогою заміни змінної $d\omega/dz = (3\tilde{A}(\omega)/i)^{1/3}$. Не обмежуючи загальності, надалі вважатимемо, що $A(z) = i/3$. Введемо позначення $\beta = iB\lambda$, $\gamma = -iC\lambda$. Тоді відповідна система рівнянь (5) на невідомі функції λ, β, γ набуде вигляду

$$\beta_2 = \lambda_1, \quad \beta_1\lambda + \beta\lambda_1 = \gamma_2\lambda + \gamma\lambda_2, \quad \gamma_1 = \lambda_2. \tag{7}$$

Це звичайна нелінійна система диференціальних рівнянь із частинними похідними відносно функції λ, лінійна стосовно перших похідних від невідомої функції. При дослідженні розв'язків системи (7) одним із важливих моментів є питання про асимптотичну поведінку розв'язків у критичних точках області зміни локальної координати z.

У роботі [5] запропоновано загальний підхід до розв'язування цієї системи і описано декілька інтегровних систем рухомої частинки на сфері, що еволюціонує під впливом деякого потенціалу, які пов'язані з відомими інтегровними натуральними гамільтоновими системами. Один із таких розв'язків отримується при підстановці першого та третього рівнянь системи (7) у друге:

$$\beta_1\lambda + \beta\beta_2 = \gamma_2\lambda + \gamma\gamma_1.$$

Розглянувши випадок, коли з цього рівняння неможливо виразити λ внаслідок виконання рівностей

$$\beta_1 = \gamma_2, \quad \beta\beta_2 = \gamma\gamma_1,$$

остаточно отримаємо

$$\lambda_{111} = \beta_{112} = \gamma_{122} = \lambda_{222},$$

звідки

$$\lambda = f_1(z+\bar z) + f_2(\varepsilon z + \varepsilon^2 \bar z) + f_3(\varepsilon^2 z + \varepsilon \bar z), \tag{8}$$

де $\varepsilon = \exp(2\pi i/3)$ – первісний кубічний корінь з одиниці, $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $k = 1, 2, 3,$ – довільні гладкі функції.

Легко перевірити, що зображення функції $\lambda(z, \bar z)$ у вигляді (8) при підстановці в систему (7) дає в якості першоджерела відповідної метрики дві інтегровні системи на сфері S^2, що пов'язані з натуральними динамічними системами з гамільтоніанами

$$\mathcal{H}_1 = \tfrac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + c_1 \exp(x_1) + c_2 \exp(\tilde x_1) + c_3 \exp(\tilde{\tilde x}_1) \tag{9}$$

та

$$\mathcal{H}_2 = \tfrac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) - g^2(x_1^{-2} + \tilde x_1^{-2} + \tilde{\tilde x}_1^{-2}), \tag{10}$$

де

$$\tilde x_1 = -\tfrac{1}{2}x + y\tfrac{\sqrt{3}}{2}, \quad \tilde{\tilde x}_1 = -\tfrac{1}{2}x - y\tfrac{\sqrt{3}}{2}.$$

Гамільтоніани (9), (10) описують відповідно замкнутий ланцюжок Тоди та систему Калоджеро–Мозера взаємодіючих трьох точок на прямій, які допускають існування додаткового кубічного за імпульсами першого інтеграла. За допомогою принципу Мопертюї динамічні системи з гамільтоніанами (9), (10) індукують геодезійні потоки на многовидах

$$M_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : c_1 \exp(x_1) + c_2 \exp(\tilde x_1) + c_3 \exp(\tilde{\tilde x}_1) < h\},$$
$$M_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -g^2(x_1^{-2} + \tilde x_1^{-2} + \tilde{\tilde x}_1^{-2}) < h\},$$

з метриками

$$ds_1^2 = (h - c_1 \exp(x_1) - c_2 \exp(\tilde x_1) - c_3 \exp(\tilde{\tilde x}_1)(dx_1^2 + dx_2^2), \tag{11}$$
$$ds_1^2 = (h - g^2(x_1^{-2} + \tilde x_1^{-2} + \tilde{\tilde x}_1^{-2}))(dx_1^2 + dx_2^2). \tag{12}$$

Причетність обидвох цих систем до генерування інтегровних геодезійних потоків на сфері було відзначено в роботі [7], однак для них не було знайдено явного виразу для $\tilde\lambda(\omega, \bar\omega)$ в глобальній координаті $\omega \in \mathbb{C}$.

Виявляється, що метрика (12) системи Калоджеро–Мозера, аналогічно як і метрика (11) замкнутого ланцюжка Тоди, за допомогою принципу Мопертюї генерує три сім'ї інтегровних гамільтонових систем на сфері S^2 для випадків $\widetilde{A}(\omega) \in \{i/3, i\omega/3, i\omega^2/3\}$, однак жоден із них не приводить до побудови гладкої метрики на S^2, тобто всі три випадки описують динаміку руху частинки на сфері S^2 під дією деякого потенціалу, що має сингулярні точки на конфігураційному просторі. Тому ці інтегровні системи не становлять значного інтересу в питаннях дослідження інтегровності геодезійних потоків на S^2. Але метрика (11) за умов $c_1 = c_2 = c_3 = c > 0$, $h > 0$, відповідає локальному многовиду $K \subset \mathbb{C}$, такому що K є трикутником з вершинами в точках $\{\varrho i, \varrho\varepsilon i, \varrho\varepsilon^2 i\}$, де $h = 2\exp(\varrho\sqrt{3}/2)$. У всіх вершинах трикутника K функція $\widetilde{\lambda}(\omega, \bar{\omega})$ обертається в нуль. Тоді за допомогою інтеграла Крістоффеля–Шварца

$$\omega = \int_0^\omega \frac{dz}{\sqrt[3]{(z-\varrho\varepsilon i)^2(z-\varrho\varepsilon^2 i)^2}} \tag{13}$$

область K конформно і однолисто відображається у верхню півплощину комплексної площини $\mathbb{C}$. Відповідно, область $K \cup K_1$ (де K_1 – трикутник, симетричний до K відносно відрізка $[\varrho\varepsilon i, \varrho\varepsilon^2 i]$) відображається конформно і однолисто у всю комплексну площину. Отже, для випадку $\widetilde{A}(\omega) = i(z-\varrho\varepsilon i)^2(z-\varrho\varepsilon^2 i)^2/3$ гладка на S^2 інтегровна метрика з додатковим кубічним за імпульсами першим інтегралом має явний вигляд

$$\tilde{\lambda}(\omega, \bar{\omega}) = \frac{\lambda(z(\omega), \bar{z}(\bar{\omega}))}{|\widetilde{A}(\omega)|^{\,2/3}}, \tag{14}$$

де $z(\omega)$ – та вітка многозначної функції, оберненої до (13), область значень якої співпадає з областю $K \cup K_1 \subset \mathbb{C}$. Легко переконатися, що функція (12) задовольняє асимптотиці

$$\tilde{\lambda}(\omega, \bar{\omega}) = \frac{a + o(1)}{\omega^2 \bar{\omega}^2}, \quad \omega \to \infty.$$

3. Інтеграл четвертого степеня. Аналогічним чином розглянемо модель геодезійного потоку на сфері з додатковим першим інтегралом, що є поліномом четвертого степеня за імпульсами. Нехай перший інтеграл метрики (1) має вигляд

$$F = A(z,\bar{z})p^4 + B(z,\bar{z})p^3\bar{p} + C(z,\bar{z})p^2\bar{p}^2 +$$

$$+ D(z,\bar z)p\bar p^3 + D(z,\bar z)\bar p^4. \tag{15}$$

Міркування, аналогічні до наведених вище для кубічного за імпульсами першого інтеграла, приводять до висновку, що $A(z)$ є поліномом не вище восьмого степеня. Розглядаючи деяку локальну координату z, для якої $A(z) = 1/4$, і ввівши позначення $\beta = -B\lambda$, $\gamma = -C\lambda$, $\delta = -D\lambda$, легко отримати систему рівнянь для невідомих функцій λ, β, γ, δ, аналогічну до вищенаведеної системи (7):

$$\begin{aligned} &\beta_2 = \lambda_1, \quad \beta_1\lambda + \beta\lambda_1 = \gamma_2\lambda + 2\gamma\lambda_2, \\ &\delta_2\lambda + \delta\lambda_2 = \gamma_1\lambda + 2\gamma\lambda_1, \quad \gamma_1 = \lambda_2. \end{aligned} \tag{16}$$

Зауважимо, що з другого та третього рівнянь системи (16) випливає, що функція γ є дійснозначною, а β та δ – комплексно-спряжені.

Виключимо γ з другого та третього рівнянь:

$$(\beta_1\lambda + \beta\lambda_1)_1 = (\delta_2\lambda + \delta\lambda_2)_2.$$

Тоді випадок

$$\beta_1 = \gamma_2, \quad \delta_2 = \gamma_1$$

є аналогічним до того, що був описаний вище для метрики (8) у випадку кратного додаткового інтеграла. У цьому випадку функція λ задовольняє рівняння $\lambda_{1111} = \lambda_{2222}$ із загальним розв'язком

$$\lambda = f_1(z+\bar z) + f_2(\theta z + \theta^3\bar z) + f_3(\theta^2 z + \theta^2\bar z) + f_4(\theta^3 z + \theta\bar z),$$

де θ – первісний корінь четвертого степеня з одиниці, а саме $\theta = i$. Підставляючи загальний вигляд функції λ в умову тотожньої рівності нуль дужки Пуассона $\{F, \mathcal{H}\} = 0$, одержимо функціональне рівняння

$$\begin{aligned} &(f_4 - f_2)(\ddot f_3 - \ddot f_1) + 2(\ddot f_4 - \ddot f_2)(f_3 - f_1) + \\ &\quad + 3\dot f_4(\dot f_3 - \dot f_1) + 3\dot f_2(\dot f_3 + \dot f_1) = 0. \end{aligned}$$

Це функціональне рівняння вперше виникло в роботі [6] при дослідженні інтегровних натуральних динамічних систем з додатковим першим інтегралом 4 степеня. Один із частинних розв'язків (для якого $f_4 = 0$) генерує інтегровну метрику на сфері, для якої у глобальній координаті ω відповідний поліном

$$\widetilde A(\omega) = (\omega - \omega_1)^2(\omega - \omega_2)^3/4.$$

Відповідний інтегровний геодезійний потік на сфері породжується натуральною динамічною системою з двома ступенями вільності та гамільтоніаном

$$\mathcal{H} = \tfrac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \gamma(\exp(2x) + \exp(-2y) + 2\exp(y - x))),$$

що описує окремий випадок системи чотирьох частинок на прямій, що рухається під дією експоненціального потенціалу взаємодії, а саме відповідають розірваному ланцюжку Тоди з симетричним розташуванням частинок та протилежними за значеннями величинами імпульсів.

4. Заключні зауваження. У дослідженнях А.В. Болсінова, В.С. Матвєєва та А.Т. Фоменка (див. [3]) свого часу було висловлено гіпотезу про наявність для аналітичних метрик на сфері S^2 інтегровних геодезійних потоків з додатковими поліноміальними першими інтегралами вище четвертого степеня за імпульсами. Останнім часом роботи Є.Н. Селіванової підтверджують можливість будувати нові однопараметричні метрики на сфері з додатковими першими інтегралами 3 та 4 степеня. Питання ж підтвердження або заперечення гіпотези про метрики з нетривіальними інтегралами степеня вище четвертого надалі залишається відкритим.

[1] Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ. – Москва: Наука, 1967. – 664 с.

[2] Whittaker E.T. A Treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies. – Cambridge: Cambridge University Press, 1937.

[3] Bolsinov A.V., Matveev V.S., Fomenko A.T. Two-dimensional Riemannian metrics with an integrable geodesic flow. Local and global geometries // Math. Sb. – 1998. – **189**, № 9–10. – P. 1441–1466.

[4] Колокольцов В.Н. Полиномиальные интегралы геодезических потоков на римановых многообразиях // Дисс. ... канд. физ.–мат. наук. – Москва, 1984.

[5] Вус А.Я. Геодезійні потоки на сфері S^2 з додатковим кубічним за імпульсами першим інтегралом // Математичний вісник НТШ. – 2005. – **2**. – С. 49–57.

[6] Hietarinta J. Direct methods for the search of second invariant // Phys. Rep. – 1987. – **147** – P. 87–154.

[7] Dullin H.R., Matveev V.S., Topalov P.I. On integrals of the third degree in the momenta // Regular and Chaotic Dynamics, – 1999. – **4**, N 3 – P. 35–44.