Збірник праць Інституту математики НАН України 2006, т.3, N 2, 49–62

УДК 517.912:512.816

Групова класифікація рівнянь реакції-дифузії зі змінними коефіцієнтами та квадратичною нелінійністю

О.О. ВАНЄЄВА

Інститут математики НАН України, Київ
E-mail: vaneeva@imath.kiev.ua

Виконано групову класифікацію рівнянь реакції-дифузії зі змінними коефіцієнтами та квадратичною нелінійністю. Знайдено звичайну та узагальнену розширену групи еквівалентності, що дозволяє спростити результати класифікації та подальші їх застосування. Отримані ліївські симетрії використано для відшукання точних розв'язків досліджуваного рівняння.

Group classification of variable coefficient reaction-diffusion equations with quadratic nonlinearity is carried out. Usual and generalized extended equivalence groups are also found. These allow to simplify results of classification and further applications of them. The obtained Lie symmetries are used to construct exact solutions of equations for the class under consideration.

1. Вступ. Починаючи з роботи Л.В. Овсяннікова [1], де було запропоновано метод розв'язування задачі групової класифікації та застосовано його до нелінійного рівняння теплопровідності, з'явилося багато робіт, присвячених дослідженню рівнянь дифузійного типу з симетрійної точки зору (див., наприклад, [2–8]).

Часто у якості моделей різноманітних процесів в фізиці, хімії [9, 10] та біології [11] виступають рівняння реакції-дифузії зі змінними коефіцієнтами та степеневими нелінійностями вигляду

$$f(x)u_t = (g(x)u^n u_x)_x + h(x)u^m, \tag{1}$$

де $f = f(x)$, $g = g(x)$ та $h = h(x)$ – довільні гладкі функції своїх аргументів, $f(x)g(x) \neq 0$, n та m – довільні константи.

Нещодавно в [12] було виконано вичерпну групову класифікацію рівнянь (1) з $n \neq 0$, а також здійснено класифікацію допустимих перетворень та законів збереження цього класу.

При дослідженні групових властивостей рівнянь з класу (1) з лінійним дифузійним коефіцієнтом (тобто з параметром $n = 0$) виділяється підклас з квадратичною нелінійністю $m = 2$, а саме клас

$$f(x)u_t = (g(x)u_x)_x + h(x)u^2, \quad h(x) \neq 0. \tag{2}$$

Він має більш широку, у порівнянні з іншими значеннями параметра m, групу еквівалентності, а також вирізняється під час групової класифікації більш складними визначальними рівняннями на коефіцієнти інфінітезимального оператора та довільні елементи класу.

В цій роботі розв'язана задача групової класифікації рівнянь виду (2). При цьому використано підхід, пов'язаний з калібруванням довільних елементів та наступним відображенням отриманого класу в інший, для якого задача групової класифікації спрощується. Також побудовано точні розв'язки рівнянь, що допускають розширення алгебри ліївських симетрій.

2. Перетворення еквівалентності та вибір досліджуваного класу. Звичайну групу еквівалентності $G^{\sim}$ класу (2) складають невироджені точкові перетворення в просторі змінних (t, x, u, f, g, h) вигляду

$$\begin{aligned}
\tilde{t} &= T^t(t,x,u), & \tilde{f} &= T^f(t,x,u,f,g,h),\\
\tilde{x} &= T^x(t,x,u), & \tilde{g} &= T^g(t,x,u,f,g,h),\\
\tilde{u} &= T^u(t,x,u), & \tilde{h} &= T^h(t,x,u,f,g,h),
\end{aligned}$$

які перетворюють будь-яке рівняння з класу (2) на функцію $u = u(t, x)$ з довільними елементами (f, g, h) в рівняння з того ж класу на функцію $\tilde{u} = \tilde{u}(\tilde{t}, \tilde{x})$ з новими довільними елементами $(\tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{h})$.

Теорема 1. *Група $G^{\sim}$ складається з перетворень*

$$\tilde{t} = \delta_1 t + \delta_2, \quad \tilde{x} = \varphi(x), \quad \tilde{u} = \delta_3 u,$$
$$\tilde{f} = \frac{\delta_0\delta_1}{\delta_3\varphi_x} f, \quad \tilde{g} = \frac{\delta_0\varphi_x}{\delta_3}\, g, \quad \tilde{h} = \frac{\delta_0}{\delta_3^2\varphi_x} h,$$

де δ_j $(j = 0, 1, 2, 3)$ – довільні сталі, $\delta_0\delta_1\delta_3 \neq 0$, φ – довільна гладка функція змінної x, $\varphi_x \neq 0$.

Виявляється, що клас (2) допускає перетворення еквівалентності, що не належать до групи $G^\sim$ і складають разом зі звичайними перетвореннями еквівалентності *узагальнену розширену групу еквівалентності.* Обмеження на перетворення з групи еквівалентності можуть бути послаблені в двох напрямках. По-перше, допускається, що перетворення змінних t, x, u можуть залежати від довільних елементів f, g та h (префікс "узагальнена" [13]). По-друге, явна форма нових довільних елементів $(\tilde f, \tilde g, \tilde h)$ може визначатися через (t, x, u, f, g, h) якимось нелокальним способом (префікс "розширена"). Повну (у цьому сенсі) узагальнену розширену групу еквівалентності $\hat G^\sim$ класу (2) побудовано, використовуючи прямий метод [14].

Теорема 2. *Група $\hat G^\sim$ складається з перетворень*

$$\tilde t = \delta_1 t + \delta_2, \quad \tilde x = \varphi(x), \quad \tilde u = \psi(x)u + \chi(x),$$

$$\tilde f = \frac{\delta_0\delta_1}{\varphi_x\psi^2} f, \quad \tilde g = \frac{\delta_0\varphi_x}{\psi^2}\, g, \quad \tilde h = \frac{\delta_0}{\varphi_x\psi^3} h,$$

де δ_j $(j = 0, 1, 2)$ – довільні сталі, $\delta_0\delta_1 \neq 0$; $\psi(x)$ – гладкий розв'язок нелінійного звичайного диференціального рівняння (ЗДР) четвертого порядку

$$\left[\frac{g}{\psi^2}\left(\frac{\psi^2}{2h}\left(\frac{g\psi_x}{\psi^2}\right)_x\right)_x\right]_x = \frac{\psi}{4h}\left[\left(\frac{g\psi_x}{\psi^2}\right)_x\right]^2 \tag{3}$$

та $\chi = -\dfrac{\psi^2}{2h}\left(\dfrac{g\psi_x}{\psi^2}\right)_x$.

Рівняння (3) має частинний розв'язок $\psi(x) = \left(\delta_3 \int \frac{dx}{g(x)} + \delta_4\right)^{-1}$ з відповідним $\chi(x) = 0$, завдяки чому можна побудувати підгрупу групи $\hat G^\sim$ з перетвореннями у явному вигляді. Ця підгрупа є ширшою за звичайну групу еквівалентності $G^\sim$.

Наявність довільної функції $\varphi(x)$ в перетвореннях еквівалентності з груп $G^\sim$ та $\hat G^\sim$ дозволяє спростити задачу групової класифікації класу (2), зменшивши в ньому кількість довільних елементів.

Наприклад, перетворення

$$\tilde t = t, \quad \tilde x = \int \frac{dx}{g(x)}, \quad \tilde u = u$$

з групи $G^\sim$ відображує (2) в клас $\tilde f(\tilde x)\tilde u_{\tilde t} = \tilde u_{\tilde x\tilde x} + \tilde h(\tilde x)\tilde u^2$ з новими довільними елементами $\tilde f(\tilde x) = f(x)g(x)$, $\tilde g(\tilde x) = 1$ та $\tilde h(\tilde x) = g(x)h(x)$.

Взагалі кажучи, перетвореннями з $G^{\sim}$ можна відкалібрувати будь-який довільний елемент класу (2) в одиницю. Незважаючи на те, що найбільш вдалою здається калібровка $g=1$, задача групової класифікації класу $f(x)u_t = u_{xx} + h(x)u^2$ залишається складною. Виходом з даної ситуації є відображення класу (2) деяким невиродженим перетворенням, що не належить до груп еквівалентності $G^{\sim}$ та $\hat{G}^{\sim}$, в клас, для якого задача групової класифікації є більш легкою. Для цього спочатку перетворенням з групи $G^{\sim}$ відкалібруємо довільні елементи класу (2) таким чином, щоб коефіцієнт $g(x)$ в новому класі співпадав з $f(x)$. З теореми 1 випливає, що це можна зробити перетворенням

$$\tilde{t} = t, \quad \tilde{x} = \int \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right|^{\frac{1}{2}} dx, \quad \tilde{u} = u. \tag{4}$$

Таким чином, не втрачаючи загальності, можна обмежитися дослідженням класу

$$f(x)u_t = (f(x)u_x)_x + h(x)u^2 \tag{5}$$

з $h(x) \neq 0$, оскільки всі результати (симетрії, точні розв'язки) отримані для цього класу можна поширити для класу (2) перетворенням (4).

Узагальнену розширену групу еквівалентності класу (5) можна знайти з теореми 2, поклавши у формулах перетворень довільних елементів $\tilde{f} = \tilde{g}$ та $f = g$. Отриманий результат сформульовано у вигляді наступної теореми.

Теорема 3. *Клас рівнянь* (5) *допускає узагальнену розширену групу еквівалентності* $\hat{G}_1^{\sim}$*, що складається з перетворень*

$$\tilde{t} = {\delta_1}^2 t + \delta_2, \quad \tilde{x} = \delta_1 x + \delta_3, \quad \tilde{u} = \psi(x)u + \chi(x),$$

$$\tilde{f} = \frac{\delta_0\delta_1}{\psi^2} f, \quad \tilde{h} = \frac{\delta_0}{\delta_1\psi^3} h,$$

де δ_j $(j = 0,1,2,3)$ *– довільні сталі,* $\delta_0\delta_1 \neq 0$. $\psi(x)$ *– гладкий розв'язок нелінійного ЗДР четвертого порядку*

$$\left[\frac{f}{\psi^2} \left(\frac{\psi^2}{2h} \left(\frac{f\psi_x}{\psi^2} \right)_x \right)_x \right]_x = \frac{\psi}{4h} \left[\left(\frac{f\psi_x}{\psi^2} \right)_x \right]^2,$$

а функція χ визначається за формулою $\chi = -\dfrac{\psi^2}{2h}\left(\dfrac{f\psi_x}{\psi^2}\right)_x$.

Використання перетворень з групи $\hat{G}_1^{\sim}$ дозволяє суттєво спростити результати групової класифікації рівнянь (5).

Далі в класі (5) зробимо заміну залежної змінної

$$v(t,x) = \sqrt{|f(x)|}u(t,x) - \frac{(\sqrt{|f(x)|})_{xx}|f(x)|}{2h(x)}. \tag{6}$$

При цьому (5) відображується в клас

$$v_t = v_{xx} + H(x)v^2 + G(x), \tag{7}$$

де довільні елементи $H(x)$ та $G(x)$ виражаються через функції $f(x)$ та $h(x)$ за формулами

$$H(x) = h(x)|f(x)|^{-\frac{3}{2}}, \tag{8}$$

$$G(x) = \left(\frac{(\sqrt{|f(x)|})_{xx}|f(x)|}{2h(x)}\right)_{xx} - \frac{((\sqrt{|f(x)|})_{xx})^2\sqrt{|f(x)|}}{4h(x)}. \tag{9}$$

Таким чином, задачу групової класифікації рівнянь реакції-дифузії (2) зведено до отримання такої класифікації для рівняння (7), група еквівалентності $G^{\sim}_{HG}$ якого складається з перетворень

$$\tilde{t} = {\delta_1}^2 t + \delta_2, \quad \tilde{x} = \delta_1 x + \delta_3, \quad \tilde{v} = \delta_4 v,$$
$$\tilde{H} = \frac{H}{{\delta_1}^2\delta_4}, \quad \tilde{G} = \frac{\delta_4 G}{{\delta_1}^2}.$$

Тут δ_j $(j = 1,2,3,4)$ – довільні сталі, $\delta_1\delta_4 \neq 0$.

В наступному параграфі наведено результати класифікації рівнянь (7) та за ними відновлено групову класифікацію класу (5).

3. Ліївські симетрії. Групову класифікацію класу рівнянь (7) виконаємо за класичним алгоритмом [15, 16]. Нехай інфінітезимальний оператор

$$Q = \tau(t,x,v)\partial_t + \xi(t,x,v)\partial_x + \eta(t,x,v)\partial_v$$

породжує групу симетрій рівняння (7). Тоді з інфінітезимального критерію інваріантності після переходу на многовид, заданий в продовженому просторі рівнянням (7), та розщеплення за незв'язаними змінними отримаємо такі визначальні рівняння на коефіцієнти оператора Q:

$$\tau_x = \tau_v = \xi_v = \eta_{vv} = 0, \quad \tau_t = 2\xi_x, \quad \xi_t = \xi_{xx} - 2\eta_{xv}, \tag{10}$$

$$\eta_t = \eta_{xx} - (\eta_v - \tau_t)(Hv^2 + G) + 2\eta Hv + \xi H_x v^2 + \xi G_x. \tag{11}$$

Розв'язуючи рівняння (10), знаходимо $\tau = \tau(t)$,

$$\xi = \tfrac{1}{2}\tau_t x + \sigma(t), \quad \eta = \left(-\tfrac{1}{8}\tau_{tt}x^2 - \tfrac{1}{2}\sigma_t x + \zeta(t)\right) v + \eta^0(t,x).$$

Підставляючи отримані форми коефіцієнтів τ, ξ, η в рівняння (11) і розщеплюючи його за змінною v, отримуємо класифікуючи умови,

$$\begin{aligned}
&\left(\tfrac{1}{2}\tau_t x + \sigma\right) H_x = \left(\tfrac{1}{8}\tau_{tt}x^2 + \tfrac{1}{2}\sigma_t x - \zeta - \tau_t\right) H,\\
&2\eta^0 H = -\tfrac{1}{8}\tau_{ttt}x^2 - \tfrac{1}{2}\sigma_{tt}x + \zeta_t + \tfrac{1}{4}\tau_{tt},\\
&\left(\tfrac{1}{2}\tau_t x + \sigma\right) G_x = -\left(\tfrac{1}{8}\tau_{tt}x^2 + \tfrac{1}{2}\sigma_t x - \zeta + \tau_t\right) G + {\eta^0}_t - {\eta^0}_{xx},
\end{aligned}$$

що дають подальші обмеження на коефіцієнти оператора Q в залежності від вигляду функцій H та G. Якщо не фіксувати функції H та G, то, розщеплюючи в останніх рівняннях за цими функціями та їх похідними, отримуємо $\tau_t = 0$, $\sigma = \zeta = \eta^0 = 0$. З цього випливає, що ядром основних груп рівнянь з класу (7) є група Лі, алгебра Лі якої $A^{\ker} = \langle \partial_t \rangle$. Всі можливі випадки розширення ядра основних груп класу (7) перераховано в табл. 1 з точністю до перетворень еквівалентності з групи $G^{\sim}_{HG}$.

Перетворення (6) є невиродженим точковим перетворенням класу (5) в (7). При цьому базисні елементи алгебри Лі інваріантності рівнянь (5) отримуються з відповідних елементів алгебри Лі рівняння (7) за формулою

$$\tilde{Q} = \tau\partial_t + \xi\partial_x + \left[\xi\left(\left(\frac{(\sqrt{|f|})_{xx}\sqrt{|f|}}{2h}\right)_x - \frac{vf_x}{2f\sqrt{f}}\right) + \frac{\eta}{\sqrt{|f|}}\right]\partial_u, \tag{12}$$

в яку треба підставити v з (6). Тут τ, ξ та η – коефіцієнти операторів з табл. 1 при ∂_t, ∂_x та ∂_v.

Відображення (6) не є взаємооднозначним, бо прообразом кожного рівняння з (7) є чотирипараметрична сім'я рівнянь з класу (5). Кожна така сім'я складається з рівнянь, що еквівалентні між собою відносно перетворень еквівалентності класу (5) наведених у теоремі 3. Для того, щоб розв'язати задачу групової класифікації класу (5)

Таблиця 1. Результати групової класифікації класу рівнянь
$v_t = v_{xx} + H(x)v^2 + G(x), \quad H(x) \neq 0.$

№	$H(x)$	$G(x)$	Базис $A^{\max}$
0	$\forall$	$\forall$	∂_t
1	δe^{qx}	$a_1 e^{-qx}$	$\partial_t,\ \partial_x - qv\partial_v$
2	δe^{qx}	$\frac{q^4}{4\delta} e^{-qx}$	$\partial_t,\ \partial_x - qv\partial_v,$ $2t\partial_t + (x+2qt)\partial_x - \left((qx + 2q^2t + 2)v + \dfrac{q^2}{\delta e^{qx}}\right)\partial_v$
3	δx^k	$a_2 x^{-(k+4)}$	$\partial_t,\ 2t\partial_t + x\partial_x - (k+2)v\partial_v$
4	$\delta x^k e^{px^2}$	$G_1(x)$	$\partial_t,\ e^{8pt}\Big[\partial_t + 4px\partial_x$ $-4p\Big((2px^2 + k + 2)v + \frac{2p(4px^2+2k+3)}{\delta x^k e^{px^2}}\Big)\partial_v\Big]$
5	δe^{px^2}	$G_2(x)$	$\partial_t,\ e^{4pt}\Big[\partial_x - 2px\Big(v + \frac{2p}{\delta e^{px^2}}\Big)\partial_v\Big],$ $e^{8pt}\Big[\partial_t + 4px\partial_x - 8p\Big((px^2+1)v + \frac{p(4px^2+3)}{\delta e^{px^2}}\Big)\partial_v\Big]$

$\delta = \pm 1 \bmod G^{\sim}_{HG}; \quad k \neq 0,\ p \neq 0,\ a_1 \neq \frac{q^4}{4\delta}; \quad a_2,\ q -$ довільні сталі.

У випадку 2 $q \neq 0$, якщо $a_1 = 0$. У випадку 4 k може бути 0, якщо $a_2 \neq 0$.

$$G_1(x) = \frac{p^2(2px^2+1)(2px^2-11) + 8kp^3x^2 + 2k(3k-5)p^2}{\delta x^k e^{px^2}} +$$
$$\frac{k(k+1)(2k+3)px^2 + a_2}{\delta x^{k+4} e^{px^2}}; \quad G_2(x) = \frac{p^2(2px^2+1)(2px^2-11)}{\delta e^{px^2}}.$$

Таблиця 2. Частинні розв'язки рівняння (13).

№	$H(x)$	$G(x)$	$F(x)$
1	δe^{qx}	$a_1 e^{-qx}$	b_1
2	δe^{qx}	$\frac{q^4}{4\delta}\, e^{-qx}$	$-q^2$
3	δx^k	$a_2\, x^{-(k+4)}$	$b_2\, x^{-2}$
4	$\delta x^k e^{px^2}$	$G_1(x)$	$-(2px^2(2px^2+2k+3) - b_3)\, x^{-2}$
5	δe^{px^2}	$G_2(x)$	$-4p^2x^2 - 6p$

$b_1 = -q^2 \pm \sqrt{q^4 - 4\delta a_1},$
$b_2 = -(k+2)(k+3) \pm \sqrt{(k+2)^2(k+3)^2 - 4\delta a_2},$
$b_3 = -(k+2)(k+3) \pm \sqrt{(k+2)^2(k+3)^2 - 4a_2}.$

з точністю до перетворень еквівалентності з групи $\hat{G}_1^{\sim}$ достатньо знайти по одному представникові з сімей рівнянь, що перетворенням (6) відображаються до рівнянь класу (7) з коефіцієнтами $H(x)$ та $G(x)$ наведеними у табл. 1. Тобто для кожної пари $(H(x), G(x))$ з табл. 1. достатньо знайти пару функцій $(f(x), h(x))$, що задовольняють умовам (8) та (9).

Виразивши з (8) функцію $h(x)$ та підставивши її в диференціальне рівняння (9), отримуємо нелінійне ЗДР четвертого порядку на невідому функцію $f(x)$. Для того, щоб спростити задачу відшукання частинних розв'язків отриманого рівняння, зведемо його до ЗДР другого порядку

$$\left(\frac{F}{2H}\right)_{xx} + \frac{F^2}{4H} + G(x) = 0 \qquad (13)$$

заміною $F(x) = -\dfrac{(\sqrt{|f(x)|})_{xx}}{\sqrt{|f(x)|}}$. Частинні розв'язки рівняння (13) для відповідних $H(x)$ та $G(x)$ з табл. 1 наведено у табл. 2.

Тепер задача відшукання функції $f(x)$ зводиться до розв'язання ЗДР другого порядку

$$(\sqrt{|f(x)|})_{xx} + F\sqrt{|f(x)|} = 0 \qquad (14)$$

для кожного значення функції $F(x)$ з табл. 2. Нижче наведено загальні розв'язки рівняння (14) для відповідних функцій $F(x)$.

1. $F = b_1$:

$$f(x) = \begin{cases} (c_1x + c_2)^2, & b_1 = 0, \\ (c_1 \sin\sqrt{b_1}x + c_2\cos\sqrt{b_1}x)^2, & b_1 > 0, \\ (c_1\sinh\sqrt{-b_1}x + c_2\cosh\sqrt{-b_1}x)^2, & b_1 < 0. \end{cases}$$

2. $F = -q^2$:

$$f(x) = \begin{cases} (c_1x + c_2)^2, & q = 0, \\ (c_1\sinh|q|x + c_2\cosh|q|x)^2, & q \neq 0. \end{cases}$$

3. $F = \dfrac{b_2}{x^2}$:

$$f(x) = \begin{cases} (c_1 x + c_2)^2, \quad b_2 = 0, \\ x(c_1 + c_2 \ln|x|)^2, \quad b_2 = \frac{1}{4}, \\ x(c_1 \sin(\alpha \ln|x|) + c_2 \cos(\alpha \ln|x|))^2, \quad b_2 > \frac{1}{4}, \\ x(c_1 |x|^{\alpha} + c_2 |x|^{-\alpha})^2, \quad b_2 < \frac{1}{4}, \quad b_2 \neq 0, \end{cases}$$

де $\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{|1 - 4b_2|}$.

4. $F = -4p^2x^2 - 2p(2k+3) + \dfrac{b_3}{x^2}$:

$$f(x) = \frac{1}{x}\Big(C_1 M_{\kappa,\mu}(2px^2) + C_2 W_{\kappa,\mu}(2px^2)\Big)^2,$$

де $\kappa = -\dfrac{2k+3}{4}$, $\mu = \dfrac{\sqrt{1-4b_3}}{4}$; $M_{\kappa,\mu}$, $W_{\kappa,\mu}$ – функції Уіттекера (див., наприклад, [17]). Якщо $b_3 = -(k+2)(k+3)$, то для рівняння (14) відомий частинний розв'язок $f(x) = x^{-2(k+2)}e^{-2px^2}$.

5. $F = -4p^2x^2 - 6p$:

$$f(x) = \left[C_1\, x\, e^{px^2} + C_2\left(\sqrt{2p\pi}\, x\, e^{px^2} \operatorname{Erf}\left(\sqrt{2p}x\right) + e^{-px^2}\right)\right]^2,$$

де $\operatorname{Erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-t^2}dt$ – функція помилок (див., наприклад, [17]).

Зауваження 1. Вище наголошувалось, що для повної групової класифікації потрібні лише частинні розв'язки рівняння (14), але наведено загальні розв'язки цього рівняння. Це зумовлено тим, що узагальнена розширена група еквівалентності $\hat{G}_1^{\sim}$ досить складна і еквівалентність окремих рівнянь з класу (5) не завжди очевидна. З загальних розв'язків цей зв'язок легко бачити. Наприклад, значенню $F(x) = -1$ (випадок 1, $b_1 = -1$) відповідають, зокрема, значення $f(x) = \sinh^2 x$ та $f(x) = \cosh^2 x$. Це означає, що рівняння

$$\sinh^2 x\, u_t = (\sinh^2 x\, u_x)_x + \delta e^{qx} \sinh^3 x\, u^2$$

еквівалентно рівнянню

$$\cosh^2 \tilde{x}\, \tilde{u}_{\tilde{t}} = (\cosh^2 \tilde{x}\, \tilde{u}_{\tilde{x}})_{\tilde{x}} + \delta e^{q\tilde{x}} \cosh^3 \tilde{x}\, \tilde{u}^2.$$

З теореми 3 знаходимо перетворення

$$\tilde{t} = t, \quad \tilde{x} = x, \quad \tilde{u} = \tanh x\, u,$$

яке дозволяє з симетрій (див. табл. 3) та точних розв'язків другого з цих рівнянь знайти подібні результати для першого.

Таблиця 3. Результати групової класифікації класу рівнянь $f(x)u_t = (f(x)u_x)_x + h(x)u^2$, $f(x)h(x) \neq 0$.

№	$f(x)$	$h(x)$	Базис $A^{\max}$
0	$\forall$	$\forall$	∂_t
1.1	1	δe^{qx}	$\partial_t,\ \partial_x - qu\partial_u$
1.2	$\cos^2 x$	$\delta e^{qx}\cos^3 x$	$\partial_t,\ \partial_x - (q - \tan x)\, u\partial_u$
1.3	$\cosh^2 x$	$\delta e^{qx}\cosh^3 x$	$\partial_t,\ \partial_x - (q + \tanh x)\, u\partial_u$
2.1	1	δ	$\partial_t,\ \partial_x,\ 2t\partial_t + x\partial_x - 2u\partial_u$
2.2	$\cosh^2 qx$	$\delta e^{qx}\cosh^3 qx$	$\partial_t,\ \partial_x - q\,(1 + \tanh qx)\, u\partial_u,$ $2t\partial_t + (x + 2qt)\partial_x -$ $(2 + q(x+2qt)(1 + \tanh qx))\, u\partial_u$
3.1	x^β	δx^γ	$\partial_t,\ 2t\partial_t + x\partial_x - (2 - \beta + \gamma)u\partial_u$
3.2	$x\cos^2(\alpha\ln\|x\|)$	$\delta x^\gamma\cos^3(\alpha\ln\|x\|)$	$\partial_t,\ 2t\partial_t + x\partial_x -$ $(\gamma + 1 - \alpha\tan(\alpha\ln\|x\|))\, u\partial_u$
4.1	$x^\beta e^{-rx^2}$	$\delta x^{\beta-2}e^{-rx^2}$	$\partial_t,\ e^{4rt}\,(\partial_t + 2rx\partial_x)$
4.2	$x^{-1}f_1(x)^2$	$\dfrac{\delta e^{px^2}f_1(x)^3}{x^{\frac{3}{2}-k}}$	$\partial_t,\ e^{8pt}\Big[\partial_t + 4px\partial_x - 4p\Big(4px^2 +$ $2k + 3 + \frac{f_2(x)}{f_1(x)}\Big(2\mu - k - \frac{1}{2}\Big)\Big)\, u\partial_u\Big]$
5	$x^2e^{rx^2}$	$\delta x^3e^{2rx^2}$	$\partial_t,\ e^{2rt}\Big(\partial_x - \frac{2rx^2+1}{x}u\partial_u\Big),$ $e^{4rt}\Big(\partial_t + 2rx\partial_x - 2r(2rx^2+3)u\partial_u\Big)$

$\delta = \pm 1$; $\alpha,\ \beta, \gamma,\ p,\ r \neq 0$; $q,\ k$ – довільні сталі. У випадках 1.1 та 2.2 $q \neq 0$.

У випадку 1.3 $q \neq 1$. У випадку 3.1 $(\beta, \gamma) \neq \{(-6, -9),\ (0, 0),\ (2, 3),\ (8, 12)\}$.

$f_1(x) = M_{\kappa,\mu}(2px^2)$, $\quad f_2(x) = M_{\kappa+1,\mu}(2px^2)$ – функції Уіттекера,

де $\kappa = -\dfrac{2k+3}{4}$, $\mu = \dfrac{\sqrt{1-4b_3}}{4}$.

Вибираючи найбільш прості частинні розв'язки рівняння (14) з вищенаведених загальних та знаходячи відповідні їм функції $h(x)$ з алгебраїчного рівняння (8), отримуємо усі нееквівалентні відносно групи $\hat{G}_1^{\sim}$ випадки розширення ядра основних груп в класі рівнянь (5). Базисні оператори максимальної алгебри інваріантності для цих випадків відновлено з відповідних операторів, наведених у табл. 1, за формулою (12). Ядром основних груп рівнянь з класу (5) є група зсувів за змінною t.

Результати групової класифікації представлено у табл. 3. Нумерація випадків табл. 3 показує, з яких випадків табл. 1 їх отримано. Для зручності у деяких випадках табл. 3 введено нові сталі, а саме, у випадку 3.2 $k+\frac{3}{2}$ позначено через γ, а у випадку 4.1 $\beta=-2(k+2)$. У випадках 4.1 та 5 $r=2p$.

Зауваження 2. Всі випадки, отримані з випадку 3 табл. 1 за умови $b_2 \le \frac{1}{4}$, об'єднано в один випадок 3.1 табл. 3. Параметри (β,γ) не дорівнюють $(0,0)$, оскільки при цих значеннях маємо тривимірну максимальну алгебру інваріантності (випадок 2.1 табл. 3.). Також $(\beta,\gamma) \ne \{(-6,-9), (2,3), (8,12)\}$, оскільки ці випадки еквівалентні 2.1 відносно перетворень з групи $\hat{G}_1^{\sim}$.

3. Точні розв'язки. Оператори симетрії, отримані при розв'язанні задачі групової класифікації, можна використовувати для побудови точних розв'язків рівнянь з класів (5) та (7). Метод редукції за оптимальною системою підалгебр максимальної алгебри Лі інваріантності добре відомий і достатньо алгоритмічний (див., наприклад, [15, 16]). За допомогою цього методу побудовано наступні точні розв'язки рівнянь з класу (7).

1. $H=\delta e^{qx}, \quad G=a_1e^{-qx}\colon \quad v=-\dfrac{q^2+2\theta\tanh(\theta t)}{2\delta e^{qx}},$

$$v=-\frac{q^2+2\theta\coth(\theta t)}{2\delta e^{qx}}, \quad v=\frac{-q^2\pm 2\theta}{2\delta e^{qx}}, \quad \text{де } \theta=\frac{1}{2}\sqrt{q^4-4a_1\delta}.$$

2. $H=\delta e^{qx}, \quad G=\dfrac{q^4}{4\delta}e^{-qx}\colon \quad v=-\dfrac{q^2t+2}{2\delta t e^{qx}}, \quad v=-\dfrac{q^2}{2\delta e^{qx}}.$

3. $H=\delta x^k, \quad G=\dfrac{a_2}{x^{k+4}}\colon \quad v=\dfrac{b_2}{2\delta x^{k+2}}.$

4. $H=\delta x^k e^{px^2}, \quad G=G_1(x)\colon \quad v=-\dfrac{2px^2(2px^2+2k+3)-b_3}{2\delta x^{k+2}e^{px^2}}.$

5. $H=\delta e^{px^2}$, $\quad G=G_2(x)$: $\quad v=-\dfrac{p(2px^2+3)}{\delta e^{px^2}}$,

$$v=-\frac{px^2(2px^2+3)+6}{\delta x^2 e^{px^2}},\quad v=-\frac{p\left((2px^2-5)e^{-8pt}+2px^2+3\right)}{\delta(e^{-8pt}+1)e^{px^2}}.$$

Визначення функцій $G_1(x)$, $G_2(x)$ та сталих b_2, b_3 наведено після таблиць 1 та 2 відповідно.

Частинні розв'язки рівняння (5) можна знайти, як перетворюючи відповідні розв'язки рівнянь з класу (7), так і безпосередньо методом редукції. Нижче наведено деякі точні розв'язки рівнянь з класу (5), отримані в рамках цих підходів.

1.1. $f=1$, $\quad h=\delta e^{qx}$: $\quad u=-\dfrac{q^2}{\delta}e^{-qx}$,

$$u=-\frac{\theta(1+\tanh(\theta\, t))}{\delta e^{qx}},\quad u=-\frac{\theta(1+\coth(\theta\, t))}{\delta e^{qx}},\quad \text{де } \theta=\frac{q^2}{2}.$$

1.2. $f=\cos^2 x$, $\quad h=\delta e^{qx}\cos^3 x$: $\quad u=-\dfrac{2\theta}{\delta e^{qx}\cos x}$,

$$u=-\frac{\theta(1+\tanh(\theta\, t))}{\delta e^{qx}\cos x},\quad u=-\frac{\theta(1+\coth(\theta\, t))}{\delta e^{qx}\cos x},\quad \text{де } \theta=\frac{q^2+1}{2}.$$

1.3. $f=\cosh^2 x$, $\quad h=\delta e^{qx}\cosh^3 x$: $\quad u=-\dfrac{2\theta}{\delta e^{qx}\cosh x}$,

$$u=-\frac{\theta(1+\tanh(\theta\, t))}{\delta e^{qx}\cosh x},\quad u=-\frac{\theta(1+\coth(\theta\, t))}{\delta e^{qx}\cosh x},\quad \text{де } \theta=\frac{q^2-1}{2}.$$

2.1. $f=1$, $\quad h=\delta$: $\quad u=-\dfrac{1}{\delta t}$, $\quad u=-\dfrac{6}{\delta x^2}$.

2.2. $f=\cosh^2 qx$, $\quad h=\delta e^{qx}\cosh^3 qx$: $\quad u=-\dfrac{e^{-qx}}{\delta t\cosh(qx)}$.

3.1. $f=x^\beta$, $\quad h=\delta x^\gamma$: $\quad u=\dfrac{(2\beta-3-\gamma)(2-\beta+\gamma)}{\delta x^{2-\beta+\gamma}}$.

3.2. $f=x\cos^2(\alpha\ln|x|)$, $\quad h=\delta x^\gamma\cos^3(\alpha\ln|x|)$:

$$u=-\frac{(\gamma+1)^2+\alpha^2}{\delta\cos(\alpha\ln|x|)}\,x^{-(\gamma+1)}.$$

4.1. $f=x^{\beta}e^{-rx^2}$, $\quad h=\delta x^{\beta-2}e^{-rx^2}$: $\quad u=z(\omega)$, $\quad$ де $\quad \omega=xe^{-2rt}$,

а z задовольняє рівняння $\omega^2 z_{\omega\omega}+\beta\omega z_\omega+\delta z^2=0$.

Якщо $\beta = 1$, то $u = -\dfrac{6}{\delta(\ln|x| - 2rt)^2}$.

5. $f = x^2 e^{rx^2}$, $h = \delta x^3 e^{2rx^2}$: $u = \dfrac{4re^{-rx^2}}{\delta x\left(e^{4rt}+1\right)}$, $u = -\dfrac{6e^{-rx^2}}{\delta x^3}$.

Використовуючи перетворення еквівалентності, з вищенаведених розв'язків можна отримати точні розв'язки для складніших рівнянь реакції-дифузії з квадратичною нелінійністю.

Авторка вдячна Р.О. Поповичу за корисні дискусії та ідею використання перетворень класів рівнянь для спрощення задачі групової класифікації. Робота була частково підтримана грантом Президента України для підтримки наукових досліджень молодих вчених GP/F11/0061.

[1] Овсянников Л.В. Групповые свойства уравнений нелинейной теплопроводности // Докл. АН СССР. – 1959. – **125**, № 3. – С. 492–495.

[2] Дородницын В.А. Об инвариантных решениях уравнений нелинейной теплопроводности с источником // Журн. выч. мат. и мат. физ. – 1982. – **22**, № 6. – С. 1393–1400.

[3] Cherniha R., Serov M. Symmetries, ansätze and exact solutions of nonlinear second-order evolution equations with convection terms // Euro. J. of Appl. Math. – 1998. – **9**. – P. 527–542.

[4] Basarab-Horwath P., Lahno V., Zhdanov R. The structure of Lie algebras and the classification problem for partial differential equation // Acta Appl. Math. – 2001. – **69**. – P. 43–94.

[5] Лагно В.І., Спічак С.В., Стогній В.І. Симетрійний аналіз рівнянь еволюційного типу. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2002. – 360 с.

[6] Popovych R.O., Ivanova N.M. New results on group classification of nonlinear diffusion–convection equations // J. Phys. A: Math. Gen. – 2004. – **37**. – P. 7547–7565.

[7] Nikitin A.G. Group classification of systems of non-linear reaction-diffusion equations // Ukr. Mat. Visn. – 2005. – **2**. – P. 149–200.

[8] Ivanova N.M., Sophocleous C. On the group classification of variable coefficient nonlinear diffusion–convection equations // J. Comp. Appl. Math. – 2006. – **197**. – P. 322–344.

[9] Crank J. The mathematics of diffusion. – London: Oxford, 1979. – 414 p.

[10] Kamin S., Rosenau P. Nonlinear thermal evolution in an inhomogeneous medium // J. Math. Phys. – 1982. – **23**. – P. 1385–1390.

[11] Murray J.D. Mathematical biology I: An introduction. – New York: Springer, 2002. – 551 p.

[12] Vaneeva O.O., Johnpillai A.G., Popovych R.O., Sophocleous C. Enhanced group analysis and conservation laws of variable coefficient reaction-diffusion equations with power nonlinearities // J. Math. Anal. Appl. – 2007. – in press.

[13] Мелешко С.В. Однородные автономные системы с тремя независимыми переменными // Прикл. мат. мех. – 1994. – **58**. – С. 97–102.

[14] Kingston J.G., Sophocleous C. On form-preserving point transformations of partial differential equations // J. Phys. A: Math. Gen. – 1998. – **31**. – P. 1597–1619.

[15] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – Москва: Наука, 1978. – 400 с.

[16] Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. – Москва: Мир, 1989. – 639 с.

[17] Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н. Курс современного анализа II: Трансцендентные функции. – Москва: Физматгиз, 1963. – 516 с.