Збірник праць Інституту математики НАН України 2006, т.3, N 2, 31–38

УДК 517.9

Нелокальні формули розмноження розв'язків рівняння синус-Гордона

Л.М. БЛАЖКО

Полтавський нац. технічний університет ім. Юрія Кондратюка
E-mail: lblazhko@ukr.net

Одержаний ланцюжок односолітонних розв'язків рівняння синус-Гордона за допомогою автоперетворень Беклунда.

Using Bäcklund autotransformations the chain of one-soliton solutions of sine-Gordon equation is obtained.

1. Вступ. Розглянемо нелінійне хвильове рівняння

$$u_{00} - u_{11} + \sin u = 0, \tag{1}$$

де $u = u(x_0, x_1)$, яке в літературі відоме як рівняння синус-Гордона (СГ). Дане рівняння виникло в диференціальній геометрії при описі поверхонь від'ємної кривизни [1]. Потім його почали використовувати у фізиці [2,3]. Особливо інтенсивно рівняння СГ застосовується в теорії солітонів [4,5].

Добре відомі симетрійні властивості рівняння СГ. Максимальною алгеброю інваріантості рівняння синус-Гордона (1) є алгебра Пуанкаре $AP(1,1)$, базисні елементи якої мають вигляд:

$$\partial_0 = \frac{\partial}{\partial x_0}, \quad \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad J_{01} = x_1\partial_0 + x_0\partial_1. \tag{2}$$

Зауваження. Оператори (2) породжують скінченні перетворення

$$x_0' = \alpha x + \theta_0, \quad x_1' = \beta x + \theta_1, \quad u' = u, \tag{3}$$

де $\alpha x = \alpha_0 x_0 - \alpha_1 x_1$, $\alpha^2 = \alpha_0^2 - \alpha_1^2$, $\alpha^2 = -\beta^2 = 1$, $\alpha\beta = 0$.

Крім того рівняння СГ (1) інваріантне відносно так званних CPT перетворень

$$C: \quad x_0 \to x_0, \quad x_1 \to x_1, \quad u \to -u,$$

$$\begin{aligned} &P: \quad x_0 \to x_0, \quad x_1 \to -x_1, \quad u \to u, \\ &T: \quad x_0 \to -x_0, \quad x_1 \to x_1, \quad u \to u, \end{aligned} \tag{4}$$

та перетворень

$$x_0 \to x_0, \quad x_1 \to x_1, \quad u \to u + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{5}$$

Тому всі викладки в цій статті будемо проводити з точністю до перетворень (3)–(5).

2. Побудова нелокальних формул розмноження розв'язків. Ще наприкінці XIX століття Беклунд [4] запропонував нелокальні перетворення вигляду:

$$\left(\frac{\overset{2}{u} + \overset{1}{u}}{2}\right)_y = \frac{1}{\lambda} \sin \frac{\overset{2}{u} - \overset{1}{u}}{2}, \quad \left(\frac{\overset{2}{u} - \overset{1}{u}}{2}\right)_z = \lambda \sin \frac{\overset{2}{u} + \overset{1}{u}}{2} \tag{6}$$

для рівняння СГ (1) записаного в конусних змінних

$$u_{yz} = \sin u, \tag{7}$$

де

$$y = \frac{x_1 + x_0}{2}, \quad z = \frac{x_1 - x_0}{2}, \tag{8}$$

$\overset{1}{u}$, $\overset{2}{u}$ – два різні розв'язки рівняння (7), λ – довільна стала, індекс біля функції внизу означає диференціювання по відповідному аргументу. Оскільки перетворення (6) зв'язують між собою два різні розв'язки рівняння СГ, то вони є автоперетворенням Беклунда (АПБ). Так як перетворення (6) задають неявний зв'язок між двома розв'язками $\overset{1}{u}$, $\overset{2}{u}$ рівняння (7), то їх важко використовувати для побудови точних розв'язків цього рівняння.

За допомогою АПБ (6) в літературі побудовані деякі точні розв'язки рівняння (7), які одержали назву солітонних розв'язків (див., наприклад, [6]). Односолітонні та двохсолітонні розв'язки відповідно мають вигляд

$$\begin{aligned} &u = 4 \arctan e^{\theta_1}, \\ &u = 4 \arctan \left(\frac{\lambda_2 + \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \frac{e^{\theta_1} - e^{\theta_2}}{1 + e^{\theta_1 + \theta_2}} \right), \end{aligned} \tag{9}$$

де $\theta_i = \lambda_i z + \frac{1}{\lambda_i} y + c_i$, $\lambda_i, c_i = \mathrm{const}$, $i = 1, 2$.

Ми пропонуємо дещо інший підхід до знаходження розв'язків рівняння СГ за допомогою АПБ (6). Нехай для простоти $\lambda = 1$. Введемо функціональний параметр $\tau = \tau(y, z)$ за формулою:

$$\tau = \tan \frac{\overset{2}{u} - \overset{1}{u}}{4}. \tag{10}$$

Введення функціонального параметру за формулою (10) дає можливість записати зв'язок між розв'язками $\overset{1}{u}$, $\overset{2}{u}$ рівняння СГ в параметричному вигляді. Сформулюємо це у вигляді наступної теореми.

Теорема 1. *Якщо* $\overset{1}{u}$ *– розв'язок рівняння* (7)*, то його інший розв'язок* $\overset{2}{u}$ *знаходиться за формулою*

$$\overset{2}{u} = \overset{1}{u} + 4 \arctan \tau, \tag{11}$$

де $\tau = \tau(y, z)$ *– розв'язок системи диференціальних рівнянь*

$$\tau_y = -\tfrac{1}{2}(\tau^2 + 1)\overset{1}{u}_y + \tau, \quad \tau_z = -\tfrac{1}{2}(\tau^2 - 1)\sin \overset{1}{u} + \tau \cos \overset{1}{u}. \tag{12}$$

Таким чином, згідно даної теореми, побудову розв'язків рівняння СГ пропонується здійснювати в два етапи. Спочатку по відомому розв'язку $\overset{1}{u}$ потрібно знайти функціональний параметр $\tau = \tau(y, z)$, як розв'язок системи диференціальних рівнянь (12), а потім за допомогою розв'язку $\overset{1}{u}$ і знайденому по ньому параметру τ за формулою (11) знаходимо $\overset{2}{u}$ – новий розв'язок рівняння СГ.

На перший погляд формули (11), (12) спрощують знаходження розв'язку $\overset{2}{u}$, але в той же час для знаходження параметра τ потрібно проінтегрувати систему диференціальних рівнянь (12), яка є системою рівнянь Ріккаті. Добре відомо, що немає загального методу розв'язування рівнянь Ріккаті. Тому по складності формули (11), (12) напевно не поступаються формулам (6). Але нам вдалося помітити одну закономірність, яка дозволяє знаходити частинний розв'язок рівнянь Ріккаті (12) (див. лему нижче). Як відомо, наявність частинного розв'язку рівняння Ріккаті дозволяє звести його до рівняння Бернуллі, яке інтегрується в квадратурах.

Якщо для побудови розв'язків рівняння СГ формули (11), (12) використовувати послідовно декілька разів, то, в результаті, отримуємо рекурентні формули вигляду

$$\overset{n+1}{u} = \overset{n}{u} + 4 \arctan \overset{n+1}{\tau}, \tag{13}$$

$$\overset{n+1}{\tau}{}_y = -\tfrac{1}{2}((\overset{n+1}{\tau})^2 + 1)\overset{n}{u}_y + \overset{n+1}{\tau},$$
$$\overset{n+1}{\tau}{}_z = -\tfrac{1}{2}((\overset{n+1}{\tau})^2 - 1)\sin\overset{n}{u} + \overset{n+1}{\tau}\cos\overset{n}{u}, \tag{14}$$

де $\overset{n}{u}$ – розв'язок рівняння СГ на n-му кроці, $\overset{n+1}{u}$, $\overset{n+1}{\tau}$ – функції, які знайдені на $(n+1)$-му кроці. Ми помітили зв'язок між розв'язками системи рівнянь Ріккаті (14) на різних кроках. Сформулюємо цей зв'язок у вигляді наступного твердження.

Лема. *Якщо в якості початкового розв'язку в формулах* (13), (14) *вибрати тривіальний розв'язок рівняння синус-Гордона* $\overset{0}{u} = 0$, *то для системи* (14) *справедлива формула*

$$\overset{n+1}{\tau}{}_0(y,z) = \overset{n}{\tau}_3(-y,-z),$$

де $\overset{n}{\tau}_3(y,z)$ *– загальний розв'язок системи* (14) *на* n*-му кроці,* $\overset{n+1}{\tau}{}_0(y,z)$ *– частинний розв'язок системи* (14) *на* $(n+1)$*-му кроці,* $n = 1, 2, 3$.

Опишемо знаходження точних розв'язків рівняння (1).

1-крок. $n = 1$:

$$\overset{0}{u} = 0, \quad \text{тоді} \quad \overset{1}{u} = 4\arctan\overset{1}{\tau},$$

де функціональний параметр $\overset{1}{\tau}$ є розв'язком наступної системи диференціальних рівнянь із відокремлюваними змінними

$$\overset{1}{\tau}_y = \overset{1}{\tau}, \quad \overset{1}{\tau}_z = \overset{1}{\tau},$$

розв'язавши яку, одержимо

$$\overset{1}{\tau} = e^{y+z+c_1}. \tag{15}$$

Тоді

$$\overset{1}{u} = 4\arctan e^{y+z+c_1}, \tag{16}$$

c_1 – стала інтегрування. Цей розв'язок в літературі відомий як односолітонний розв'язок рівняння СГ.

Враховуючи перетворення (3), сталу інтегрування c_1 у формулах (15), (16) можна опустити. Отже,

$$\overset{1}{\tau} = e^{y+z}, \quad \overset{1}{u} = 4\arctan e^{y+z}.$$

2-крок. $n = 2$:

$$\overset{1}{u} = 4 \arctan e^{y+z}, \tag{17}$$

$$\overset{2}{u} = \overset{1}{u} + 4 \arctan \overset{2}{\tau}, \tag{18}$$

де параметр $\overset{2}{\tau}$ є розв'язком системи рівнянь Ріккаті наступного вигляду:

$$\overset{2}{\tau}_y = M((\overset{2}{\tau})^2 + 1) + \overset{2}{\tau}, \quad \overset{2}{\tau}_z = N((\overset{2}{\tau})^2 - 1) + L\overset{2}{\tau}, \tag{19}$$

де

$$M = -\frac{1}{\cosh(y+z)}, \quad N = \frac{\sinh(y+z)}{\cosh^2(y+z)}, \quad L = 2\tanh^2(y+z) - 1.$$

Використавши лему, маємо

$$\overset{2}{\tau}_0(y,z) = \overset{1}{\tau}_3(-y,-z) = e^{-(y+z)}.$$

Зробивши заміну

$$\overset{2}{\tau} = w + e^{-(y+z)},$$

де $w = w(y,z)$ – нова невідома функція, систему (19) зводимо до системи рівнянь Бернуллі

$$\begin{aligned} &\cosh(y+z)w_y = (\sin(y+z) - 1)w - w^2, \\ &\cosh^2(y+z)w_z = (\sin^2(y+z) - 1)w + \sinh(y+z)w^2. \end{aligned} \tag{20}$$

Загальний розв'язок системи (20) має вигляд

$$w = \frac{2\cosh^2(y+z)}{e^{y+z}(y-z+c_2) - \cosh(y+z)}. \tag{21}$$

Отже, використавши (21), одержуємо, що

$$\overset{2}{\tau} = \frac{(y-z+c_2)e^{-(y+z)} + \cosh(y+z)}{y-z+c_2 - e^{-(y+z)}\cosh(y+z)}, \tag{22}$$

де c_2 – стала інтегрування. Підставивши $\overset{2}{\tau}$, $\overset{1}{u}$, що задані формулами (22), (17) відповідно, у формулу (18), одержуємо

$$\overset{2}{u} = 4\arctan\frac{-(y-z+c_2)}{\cosh(y+z)}.$$

Аналогічно, як і у формулах (15), (16), врахувавши перетворення (3), можна вважати $c_2 = 0$. Отже,

$$\begin{aligned}
\overset{2}{\tau} &= \frac{(y-z)e^{-(y+z)} + \cosh(y+z)}{y-z-e^{-(y+z)}\cosh(y+z)},\\
\overset{2}{u} &= 4\arctan\frac{-(y-z)}{\cosh(y+z)}.
\end{aligned}\tag{23}$$

Зауважимо, що розв'язок (23) одержаний в [7] із двохсолітонного розв'язку (9), якщо в ньому перейти до границі при $\lambda_2 \longrightarrow \lambda_1$.

3-крок. $n = 3$:

$$\overset{2}{u} = 4\arctan\frac{-(y-z)}{\cosh(y+z)}, \quad \text{тоді} \quad \overset{3}{u} = \overset{2}{u} + 4\arctan\overset{3}{\tau}.$$

Система рівнянь Ріккаті для знаходження $\overset{3}{\tau}$ має вигляд

$$\begin{aligned}
\overset{3}{\tau}_y &= -\frac{2((y-z)\sinh(y+z) - \cosh(y+z))}{B}((\overset{3}{\tau})^2+1) + \overset{3}{\tau},\\
\overset{3}{\tau}_z &= \frac{2(y-z)\cosh(y+z)A}{B^2}((\overset{3}{\tau})^2-1) +\\
&\quad + \frac{A^2 - 4(y-z)^2\cosh^2(y+z)}{B^2}\overset{3}{\tau},
\end{aligned}\tag{24}$$

де

$$A = \cosh^2(y+z) - (y-z)^2, \quad B = \cosh^2(y+z) + (y-z)^2.$$

Використавши лему, маємо

$$\overset{3}{\tau}_0(y,z) = \overset{2}{\tau}_3(-y,-z) = \frac{(y-z)e^{y+z} - \cosh(y+z)}{y-z+e^{y+z}\cosh(y+z)}.$$

Зробивши заміну

$$\overset{3}{\tau} = w + \frac{(y-z)e^{y+z} - \cosh(y+z)}{y-z+e^{y+z}\cosh(y+z)},$$

де $w = w(y, z)$ – нова невідома функція, систему (24) зводимо до системи рівнянь Бернуллі

$$\begin{aligned} w_y &= \frac{\beta B - 4\alpha C}{\beta B} w - \frac{2C}{B} w^2, \\ w_z &= \frac{4(y-z)\alpha A \cosh(y+z) + \beta(A^2 - 4(y-z)^2)\cosh^2(y+z)}{\beta B^2} w + \\ &\quad + \frac{2(y-z)A\cosh(y+z)}{B^2} w^2, \end{aligned} \tag{25}$$

де

$$\begin{aligned} &\alpha = (y-z)e^{y+z} - \cosh(y+z), \quad \beta = y - z + e^{y+z}\cosh(y+z), \\ &C = (y-z)\sinh(y+z) - \cosh(y+z). \end{aligned}$$

Розв'язавши (25), одержуємо

$$\overset{3}{\tau} = \frac{-2B^2 + \alpha K}{\beta K}, \quad \overset{3}{u} = 4\arctan e^{-(y+z)} \frac{P+B}{P-B},$$

де

$$\begin{aligned} K &= (y - z + e^{y+z}\cosh(y+z))((y-z)^2 e^{-(y+z)} - \\ &\quad - 2(y-z)\cosh(y+z) + f) - 4e^{y+z}\cosh^4(y+z), \\ f &= \cosh(y+z)(e^{2(y+z)} + 2) + (y+z+c)e^{-(y+z)}, \\ P &= c + y + z + \cosh(y+z)\cdot\sinh(y+z). \end{aligned}$$

Враховуючи зв'язок (8) між змінними y, z та x_0, x_1, випишемо одержаний нами ланцюжок розв'язків рівняння СГ (1):

$$\begin{aligned} &0 \to 4\arctan e^{x_1} \to 4\arctan\frac{-x_0}{\cosh x_1} \to \\ &\quad \to 4\arctan\left(e^{-x_1}\frac{c + x_1 + \cosh x_1 \sinh x_1 + \cosh^2 x_1 + x_0^2}{c + x_1 + \cosh x_1 \sinh x_1 - \cosh^2 x_1 - x_0^2}\right). \end{aligned}$$

Оскільки графіки розв'язків $\overset{2}{u}$, $\overset{3}{u}$ зберігають форму єдиної хвилі з ростом часової змінної x_0, то можна припустити, що ці розв'язки, як і $\overset{1}{u}$, є односолітонними розв'язками рівняння синус-Гордона.

3. Висновки. Таким чином, нами побудований алгоритм знаходження розв'язків рівняння синус-Гордона та за його допомогою одержаний ланцюжок односолітонних розв'язків даного рівняння.

[1] Eisenhart L.P. A treatise on the differential geometry of curves and surfaces. – New York: Dover, 1960. – 247 p.

[2] Френкель Я., Конторова Т. О теории пластической деформации и двойникования // Физ. жур. – 1939. – № 1. – С. 137.

[3] Perring J.K., Skyrme T.H.R. A model unified theory // Nucl. Phys. – 1961. – **31**. – P. 550–555.

[4] Bäcklund A.V. Om ytor med konstant negativ krökning // Lund Universitets Arsskrift. – 1883. – № 19. – P. 24–38.

[5] Zabusky N.J., Kruskal M.D. Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states // Phys. Rev. Lett. – 1965. – **15**. – P. 240–243.

[6] Новокшенов В.Ю. Математические модели в естествознании. – Уфа: УГАТ ун-та, 1999. – 98 с.

[7] Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов. Метод обратной задачи. – Москва: Наука, 1980. – 324 с.