Збірник праць Інституту математики НАН України 2019, т. 16, № 1, 164–173

УДК 517.912:512.816

Симетрійні властивості та точні розв'язки (2+1)-вимірного лінійного рівняння ціноутворення азійських опціонів

С.В. Спічак [†], ***В.І. Стогній*** [‡], ***І.М. Копась*** [‡]

[†] *Інститут математики НАН України, Київ*
E-mail: spichak@imath.kiev.ua

[‡] *Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського*
E-mail: stogniyvaleriy@gmail.com, innak@net.ua

Використовуючи класичний метод Лі–Овсяннікова, знайдено максимальну алгебру інваріантності рівняння, яке випливає з рівняння ціноутворення азійських опціонів. За допомогою операторів цієї алгебри проведено симетрійну редукцію й побудовано інваріантні точні розв'язки як цього рівняння, так і, відповідно, рівняння ціноутворення азійських опціонів.

Using the classical Lie–Ovsyannikov method, a maximal invariance algebra was found for a equation that follows from the pricing equation of Asian options. Using the operators of that algebra symmetric reduction is carried out and invariant exact solutions are constructed for this equation, as well as for the pricing equation of Asian options, respectively.

1. Вступ. Традиційною моделлю в теорії фінансових ринків є модель Блека–Шоулза, яка описується лінійним диференціальним рівнянням в частинних похідних другого порядку з двома незалежними змінними [8]. Однак практичні дослідження вказують на те, що ця модель відповідно до зроблених припущень далека від адекватності реальним процесам, які відбуваються на фінансових ринках. Тому в останні десятиліття дослідники перейшли до більш складних моделей динаміки фінансових ринків, які описуються рівняннями з більшою кількістю незалежних змінних або нелінійними рівняннями. Методи дослідження таких моделей досить різні, зокрема часто використовують чисельні методи [10]. Як завжди, коли мова йде про процеси, що моделюються диференціальними рівняннями, важливо мати точні розв'язки таких рівнянь. Одним з найбільш ефективних методів, що дозволяють здійснити пошук розв'язків, є методи групового аналізу [4, 5]. Перші дослідження групових властивостей лінійного рівняння Блека–Шоулза було проведено в роботі [12]. В останні роки методами симетрійного аналізу досліджуються різні лінійні та нелінійні модифікації рівняння Блека–Шоулза [1, 9, 11, 13, 14, 15].

Ця робота присвячена симетрійному аналізу та побудові точних розв'язків лінійного рівняння ціноутворення азійських опціонів в неперервному часі $\tau \in [0;T]$ [7]:

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} + S\frac{\partial V}{\partial A} - rV = 0, \tag{1}$$

де T — термін дії контракту; $V = V(\tau, S, A)$ — функція вартості опціону; S — вартість базового активу; A — усереднене значення всіх наявних цін базових активів S до моменту часу τ; r і σ — сталі, що описують безризикову відсоткову ставку і волатильність акції відповідно. Рівняння (1) за допомогою заміни

$$V(\tau, S, A) = f(\tau, S, A)u(t(\tau, S, A), x(\tau, S, A), y(\tau, S, A)), \tag{2}$$

де функція $f(\tau, S, A)$ і нові незалежні змінні t, x, y визначаються, відповідно, формулами

$$\begin{aligned} &f = s^{-m}\mathrm{e}^{-\frac{q\sigma^2}{2}(T-\tau)}, \quad t = \frac{\sigma^2}{2}(T-\tau), \quad x = S, \\ &y = \frac{\sigma^2}{2}A, \quad m = \frac{r}{\sigma^2}, \quad q = m^2 + m, \end{aligned} \tag{3}$$

зводиться до рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\frac{\partial u}{\partial y}, \tag{4}$$

де $u = u(t, x, y)$.

2. Симетрійні властивості. Для дослідження симетрійних властивостей рівняння (4) використаємо класичний метод Лі–Овсяннікова [4]. У результаті отримаємо:

Теорема 1. *Максимальна алгебра Лі інваріантності рівняння* (4) *генерується такими диференціальними операторами:*

$$\begin{aligned}&\langle X_1 = \partial_t, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = u\partial_u, \quad X_4 = x\partial_x + y\partial_y,\\ &X_5 = xy\partial_x + \frac{1}{2}y^2\partial_y + \frac{1}{2}xu\partial_u, \quad X_\infty = \beta(t,x,y)\partial_u\rangle,\end{aligned} \tag{5}$$

де функція $\beta(t,x,y)$ *є довільним розв'язком рівняння* (4).

Далі не враховуватимемо оператор симетрії $X_\infty = \beta(t,x,y)\partial_u$, який притаманний лінійним рівнянням і обумовлює принцип суперпозиції. Задача опису таких операторів еквівалентна пошуку загального роз'язку таких рівнянь. Зазначимо, що диференціальні оператори симетрії (5) X_i, $i = 1,\ldots,5$ утворюють базис 5-вимірної алгебри Лі L_5, яка є прямою сумою алгебр Лі $\langle X_1\rangle$, $\langle X_3\rangle$ і $\langle X_2, X_4, X_5\rangle$, тобто

$$L_5 = X_1 \oplus X_3 \oplus \langle X_2, X_4, X_5\rangle.$$

Алгебра L_5 ізоморфна алгебрі

$$A_5 = \langle e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\rangle = \langle e_1, e_2, e_3\rangle \oplus \langle e_4, e_5\rangle = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \oplus 2A_1,$$

яка є прямою сумою підалгебр $\langle e_1, e_2, e_3\rangle = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ та $\langle e_4, e_5\rangle = 2A_1$.

Ізоморфізм між алгебрами L_5 і A_5 встановлюється лінійними перетвореннями:

$$\begin{aligned}&e_1 = 2X_4 = 2x\partial_x + 2y\partial_y,\\ &e_2 = -2X_5 = -2xy\partial_x - y^2\partial_y - xu\partial_u,\\ &e_3 = X_2 = \partial_y, \quad e_4 = X_1 = \partial_t, \quad e_5 = X_3 = u\partial_u.\end{aligned}$$

3. Симетрійна редукція. Одним із застосувань симетрійних властивостей диференціальних рівнянь з частинними похідними є симетрійна редукція рівнянь з нетривіальною симетрією до рівнянь з меншою кількістю незалежних змінних. Метод редукції за оптимальною системою підалгебр максимальної алгебри Лі інваріантності добре відомий і достатньо алгоритмічний (див., напр., [3, 4, 5]).

Для того, щоб використати можливі редукції рівняння (4), необхідно знайти нееквівалентні підалгебри алгебри A_5. Зокрема, одновимірним підалгебрам буде відповідати редукція рівняння (4) до рівняння з частинними похідними від двох незалежних змінних. Симетрійна редукція рівняння (4) до звичайних диференціальних рівнянь передбачає наявність списку двовимірних підалгебр алгебри A_5.

У роботі [5] наведено метод класифікації підалгебр дійсних алгебр Лі з точністю до перетворень, які визначають групи внутрішніх автоморфізмів цих алгебр Лі. Згідно з цим методом одновимірні підалгебри алгебри A_5 вичерпуються алгебрами

$$\begin{aligned}&\langle e_4+\alpha e_5\rangle, \quad \langle e_5\rangle, \quad \langle e_1+\alpha e_4+\beta e_5\rangle,\\ &\langle e_2+\alpha e_4+\beta e_5\rangle, \quad \langle e_2-e_3+\alpha e_4+\beta e_5\rangle,\end{aligned} \tag{6}$$

а двовимірні підалгебри – такими алгебрами:

$$\begin{aligned}&\langle e_4, e_5\rangle, \quad \langle e_1+\alpha e_5, e_4+\beta e_5\rangle, \quad \langle e_2+\alpha e_5, e_4+\beta e_5\rangle,\\ &\langle e_1+\alpha e_4+\beta e_5, e_2\rangle, \quad \langle e_2-e_3+\alpha e_4, e_5\rangle, \quad \langle e_2+\alpha e_4, e_5\rangle,\\ &\langle e_2-e_3+\alpha e_5, e_4+\beta e_5\rangle, \quad \langle e_1+\alpha e_4, e_5\rangle, \quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}.\end{aligned} \tag{7}$$

Використаємо оператори (6) і (7) для побудови точних розв'язків рівняння (4). Одновимірним підалгебрам (6) буде відповідати редукція рівняння (4) до рівняння з частинними похідними від двох незалежних змінних. Використовуючи перелік одновимірних підалгебр (6), насамперед відбираємо ті підалгебри, які задовольняють необхідну умову існування редукції [3]. Отже, такими підалгебрами будуть

$$\begin{aligned}&\langle e_4+\alpha e_5\rangle, \quad \langle e_1+\alpha e_4+\beta e_5\rangle,\\ &\langle e_2+\alpha e_4+\beta e_5\rangle, \quad \langle e_2-e_3+\alpha e_4+\beta e_5\rangle.\end{aligned} \tag{8}$$

Для кожної з одновимірних підалгебр (8) подано, відповідно, анзац та редуковане рівняння:

1) $\langle e_4+\alpha e_5\rangle$: $u=\mathrm{e}^{\alpha t}f(\omega_1,\omega_2), \quad \omega_1=x, \quad \omega_2=y,$
$\omega_1^2 f_{\omega_1\omega_1}+\omega_1 f_{\omega_2}-\alpha f=0;$

2) $\langle e_1+\alpha e_4+\beta e_5\rangle$: якщо $\alpha\neq 0,$ то $u=\exp\left(\dfrac{\beta t}{\alpha}\right)f(\omega_1,\omega_2),$

$$\omega_1=\frac{x}{y}, \quad \omega_2=y\exp\left(\frac{-2t}{\alpha}\right),$$

$$\omega_1^2 f_{\omega_1\omega_1}+\omega_2\left(\frac{2}{\alpha}+\omega_1\right)f_{\omega_2}-\omega_1^2 f_{\omega_1}-\frac{\beta}{\alpha}f=0;$$

якщо $\alpha=0,$ то $u=y^{\beta/2}f(\omega_1,\omega_2), \quad \omega_1=t, \quad \omega_2=\dfrac{x}{y},$

$$\omega_2^2 f_{\omega_2\omega_2} - \omega_2^2 f_{\omega_2} - f_{\omega_1} + \frac{\beta}{2}\omega_2 f = 0;$$

3) $\langle e_2 + \alpha e_4 + \beta e_5\rangle$:

$$u = \exp\left(\frac{\beta + x}{y}\right) f(\omega_1, \omega_2), \quad \omega_1 = t - \frac{\alpha}{y}, \quad \omega_2 = \frac{x}{y^2},$$

$$\omega_2^2 f_{\omega_2\omega_2} + (\alpha\omega_2 - 1) f_{\omega_1} - \beta\omega_2 f = 0;$$

4) $\langle e_2 - e_3 + \alpha e_4 + \beta e_5\rangle$:

$$u = \exp\left(-\beta \operatorname{arctg} y + \frac{xy}{y^2+1}\right) f(\omega_1, \omega_2),$$

$$\omega_1 = t + \alpha \operatorname{arctg} y, \quad \omega_2 = \frac{x}{y^2+1},$$

$$\omega_2^2 f_{\omega_2\omega_2} + (\alpha\omega_2 - 1) f_{\omega_1} + (\omega_2 - \beta)\omega_2 f = 0.$$

Використовуючи інваріанти операторів симетрій рівняння (4), які відповідають знайденим двовимірним підалгебрам, можна провести редукцію цього рівняння до звичайних диференціальних рівнянь.

Для кожної із двовимірних підалгебр (7), які задовольняють необхідній умові існування редукції, подано, відповідно, анзац та редуковане рівняння:

1) $\langle e_1 + \alpha e_5, e_4 + \beta e_5\rangle$: $u = y^{\alpha/2} \mathrm{e}^{\beta t} f(\omega), \quad \omega = \dfrac{x}{y},$

$$\omega^2 \ddot{f} - \omega^2 \dot{f} + \left(\frac{\alpha}{2}\omega - \beta\right) f = 0;$$

2) $\langle e_2 + \alpha e_5, e_4 + \beta e_5\rangle$: $u = \exp\left(\beta t + \dfrac{\alpha + x}{y}\right) f(\omega), \quad \omega = \dfrac{\sqrt{x}}{y},$

$$\omega^2 \ddot{f} - \omega \dot{f} - 4(\alpha\omega^2 + \beta) f = 0;$$

3) $\langle e_1 + \alpha e_4 + \beta e_5, e_2\rangle$:

якщо $\alpha \neq 0$, то $u = \exp\left(\dfrac{\beta t}{\alpha} + \dfrac{x}{y}\right) f(\omega),$

$$\omega = \frac{x}{y^2} \exp\left(\frac{2t}{\alpha}\right), \quad \alpha\omega^2 \ddot{f} - 2\omega \dot{f} - \beta f = 0;$$

якщо $\alpha = 0$, то $u = \left(\dfrac{y}{\sqrt{x}}\right)^{\beta} \exp\left(\dfrac{x}{y}\right) f(\omega), \quad \omega = t,$

$$\dot{f} - \left(\frac{\beta^2 + 2\beta}{2}\right) f = 0;$$

4) $\langle e_2 - e_3 + \alpha e_5, e_4 + \beta e_5 \rangle$:

$$u = \exp\left(\beta t - \alpha \operatorname{arctg} y + \frac{xy}{y^2+1}\right) f(\omega), \quad \omega = \frac{x}{y^2+1},$$
$$\omega^2 \ddot{f} + (\omega^2 - \alpha\omega - \beta) f = 0,$$

де крапка визначає диференціювання функції f за змінною ω.

4. Точні розв'язки лінійного рівняння ціноутворення азійських опціонів. Побудуємо інваріантні розв'язки рівняння (4). Розглянемо одновимірну підалгебру $\langle e_2 + \alpha e_4 + \beta e_5 \rangle$, якій відповідає редуковане рівняння

$$\omega_2^2 f_{\omega_2\omega_2} + (\alpha\omega_2 - 1) f_{\omega_1} - \beta\omega_2 f = 0.$$

Якщо $\alpha = \beta = 0$, рівняння має вигляд

$$\omega_2^2 f_{\omega_2\omega_2} - f_{\omega_1} = 0,$$

частинними розв'язками якого будуть функції [6]

$$f_(\omega_1, \omega_2) = (C_1 \ln \omega_2 + C_2)\sqrt{\omega_2} \exp\left(-\frac{\omega_1}{4}\right),$$
$$f_(\omega_1, \omega_2) = \left(2\omega_1 + \ln^2 \omega_2\right)\sqrt{\omega_2} \exp\left(-\frac{\omega_1}{4}\right),$$
$$f_(\omega_1, \omega_2) = \omega_2^\mu \exp\left((\mu^2 - \mu)\omega_1\right),$$

де $C_1, C_2, \mu \in \mathbb{R}$.

Підставляючи ці функції у відповідний анзац для залежної змінної u, отримаємо розв'язки рівняння (4):

$$u = \left(C_1 \ln \frac{x}{y^2} + C_2\right) \frac{\sqrt{x}}{y} \exp\left(\frac{x}{y} - \frac{t}{4}\right),$$
$$u = \left(2t + \ln^2 \frac{x}{y^2}\right) \frac{\sqrt{x}}{y} \exp\left(\frac{x}{y} - \frac{t}{4}\right), \tag{9}$$
$$u = \left(\frac{x}{y^2}\right)^\mu \exp\left(\frac{x}{y} + (\mu^2 - \mu)t\right).$$

Використовуючи заміну змінних (2), (3) для функцій (9) отримаємо точні розв'язки рівняння (1):

$$V(\tau, S, A) = \left(C_1 \ln \frac{4S}{\sigma^4 A^2} + C_2\right) \frac{2S^{-r\sigma^{-2}}\sqrt{S}}{\sigma^2 A}$$

$$\times \exp\left(\frac{2S}{\sigma^2 A} - \frac{\sigma^2(T-\tau)}{8} + \left(r^2\sigma^{-2}+r\right)\frac{(\tau-T)}{2}\right),$$

$$V(\tau,S,A) = \left(\sigma^2(T-\tau) + \ln^2\frac{4S}{\sigma^4 A^2}\right)\frac{2S^{-r\sigma^{-2}}\sqrt{S}}{\sigma^2 A}$$

$$\times \exp\left(\frac{2S}{\sigma^2 A} - \frac{\sigma^2(T-\tau)}{8} + \left(r^2\sigma^{-2}+r\right)\frac{(\tau-T)}{2}\right),$$

$$V(\tau,S,A) = S^{-r\sigma^{-2}}\left(\frac{4S}{\sigma^4 A^2}\right)^{\mu}\exp\left(\frac{2S}{\sigma^2 A} + \left(\mu^2-\mu\right)\frac{\sigma^2(T-\tau)}{2}\right.$$

$$\left. + \left(r^2\sigma^{-2}+r\right)\frac{(\tau-T)}{2}\right).$$

Далі, розглянемо двовимірну підалгебру $\langle e_1+\alpha e_4+\beta e_5, e_2\rangle$.

У випадку $\alpha = 0$ редуковане рівняння має вигляд $\dot{f} - \left(\frac{\beta^2+2\beta}{2}\right)f = 0$. Підставляючи розв'язок цього рівняння у анзац для залежної змінної, отримаємо розв'язок рівняння (4):

$$u = C\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right)^{\beta}\exp\left(\frac{x}{y} + \frac{\beta^2+2\beta}{2}t\right), \tag{10}$$

де C — довільна стала. Після підстановки (10) в (2) отримаємо точні розв'язки рівняння (1):

$$V(\tau,S,A) = CS^{-r\sigma^{-2}}\left(\frac{\sigma^2 A}{2\sqrt{S}}\right)^{\beta}$$

$$\times \exp\left(\frac{2S}{\sigma^2 A} + \left(\frac{(\beta^2+\beta)\sigma^2}{4} - \frac{r^2}{\sigma^2} - r\right)(T-\tau)\right).$$

Якщо $\alpha \neq 0$, тоді двовимірній підалгебрі відповідає редуковане рівняння

$$\omega^2\ddot{f} - \frac{2\omega}{\alpha}\dot{f} - \frac{\beta}{\alpha}f = 0. \tag{11}$$

Рівняння (11) є рівнянням Ейлера і воно має такі розв'язки [2]:

а) якщо $\left(1+\dfrac{2}{\alpha}\right)^2 > -\dfrac{4\beta}{\alpha}$, то

$f(\omega) = \omega^{(\alpha+2)/2\alpha}\left(C_1\omega^{\mu} + C_2\omega^{-\mu}\right);$

b) якщо $\left(1+\dfrac{2}{\alpha}\right)^2 = -\dfrac{4\beta}{\alpha}$, то

$f(\omega) = \omega^{(\alpha+2)/2\alpha}(C_1 + C_2 \ln\omega)$;

c) якщо $\left(1+\dfrac{2}{\alpha}\right)^2 < -\dfrac{4\beta}{\alpha}$, то

$f(\omega) = \omega^{(\alpha+2)/2\alpha}(C_1 \sin(\mu\ln\omega) + C_2\cos(\mu\ln\omega))$,

де $\mu = \frac{1}{2}\sqrt{\left|\left(1+\frac{2}{\alpha}\right)^2 + \frac{4\beta}{\alpha}\right|}$; C_1 і C_2 — довільні сталі.

Наведемо частині точні розв'язкі, які відповідають випадкам a), b), c).

Якщо $\alpha = \beta = -2$ (випадок a)), маємо розв'язок

$$f(\omega) = C_1\omega + C_2\omega^{-1}.$$

Підставляючи цю функцію у відповідний анзац для залежної змінної, отримаємо розв'язок рівняння (4):

$$u = \left(C_1\frac{x}{y^2\mathrm{e}^t} + C_2\frac{y^2\mathrm{e}^t}{x}\right)\exp\left(\frac{x}{y}+t\right). \tag{12}$$

Після підстановки (12) в (2) отримаємо точний розв'язок рівняння (1):

$$\begin{aligned} V(\tau,S,A) = \exp&\left(\frac{2S}{\sigma^2 A} + \frac{\sigma^2(T-\tau)}{2} + \left(r^2\sigma^{-2}+r\right)\frac{\tau-T}{2}\right)\\ &\times\left(4C_1 S^{-r\sigma^{-2}+1}\sigma^{-4}A^{-2}\exp\left(\frac{\sigma^2(\tau-T)}{2}\right)\right.\\ &\left.+\frac{C_2}{4}S^{-r\sigma^{-2}-1}\sigma^4 A^2\exp\left(\frac{\sigma^2(T-\tau)}{2}\right)\right), \end{aligned}$$

де C_1 і C_2 — довільні сталі.

Якщо $\alpha = 2$, $\beta = -2$ (випадок b)), маємо розв'язок

$$f(\omega) = \omega(C_1 + C_2\ln\omega).$$

Підставляючи цю функцію у відповідний анзац для залежної змінної, отримаємо розв'язок рівняння (4):

$$u = \left(C_1 + C_2\left(\ln\frac{x}{y^2}+t\right)\right)\frac{x}{y^2}\exp\left(\frac{x}{y}\right). \tag{13}$$

Після підстановки (13) в (2) отримаємо точний розв'язок рівняння (1):

$$V(\tau,S,A) = 4\sigma^{-4}A^{-2}S^{1-r\sigma^{-2}}\exp\left(\frac{2S}{\sigma^2 A} + \left(r^2\sigma^{-2}+r\right)\frac{\tau-T}{2}\right)$$
$$\times\left(C_1 + C_2\ln\left(4S\sigma^{-4}A^{-2}\exp\left(\frac{\sigma^2(T-\tau)}{2}\right)\right)\right),$$

де C_1 і C_2 — довільні сталі.

Якщо $\alpha=-2$, $\beta=2$ (випадок c)), маємо розв'язок

$$f(\omega) = C_1\sin(\ln\omega) + C_2\cos(\ln\omega).$$

Підставляючи цю функцію у відповідний анзац для залежної змінної, отримаємо розв'язок рівняння (4):

$$u = \left(C_1\sin\left(\ln\frac{x}{y^2}-t\right) + C_2\cos\left(\ln\frac{x}{y^2}-t\right)\right)\exp\left(\frac{x}{y}-t\right). \quad (14)$$

Після підстановки (14) в (2) отримаємо точний розв'язок рівняння (1):

$$V(\tau,S,A) = S^{-r\sigma^{-2}}\left(C_1\sin\left(\ln\left(4S\sigma^{-4}A^{-2}\right)+\sigma^2(\tau-T)/2\right)\right.$$
$$\left.+\,C_2\cos\left(\ln\left(4S\sigma^{-4}A^{-2}\right)+\sigma^2(\tau-T)/2\right)\right)$$
$$\times\exp\left(\frac{2S}{\sigma^2 A} - \frac{\sigma^2(T-\tau)}{2} + (r^2\sigma^{-2}+r)\frac{\tau-T}{2}\right),$$

де C_1 і C_2 — довільні сталі.

Висновки. У роботі лінійне рівняння ціноутворення азійських опціонів за допомогою заміни змінних було зведено до рівняння, яке є простішим у використанні. Досліджено симетрійні властивості отриманого рівняння. Симетрійні властивості використані для побудови інваріантних анзаців, які редукують рівняння до диференціальних рівнянь відносно меншої кількості незалежних змінних. У результаті розв'язування деяких редукованих рівнянь побудовано точні розв'язки рівняння. Виконуючи зворотну заміну змінних, отримані точні розв'язки лінійного рівняння ціноутворення азійських опціонів. У майбутньому планується більш детально дослідити властивості отриманих розв'язків щодо їх можливого застосування.

[1] Дышаев М.М., Фёдоров В.Е., Симметрии и точные решения одного нелинейного уравнения ценообразования опционов, *Уфимск. матем. журн.* **9** (2017), 29–41.

[2] Зайцев В.Ф., Полянин А.Д., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, Физматлит, Москва, 2001.

[3] Лагно В.І., Спічак С.В., Стогній В.І., Симетрійний аналіз рівнянь еволюційного типу, Інститут математики НАН України, Київ, 2002.

[4] Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, Наука, Москва, 1978.

[5] Олвер П., Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям, Мир, Москва, 1989.

[6] Полянин А.Д., Справочник по линейным уравнениям математической физики, Физматлит, Москва, 2001.

[7] Barucci E., Polidoro S., Vespri V., Some results on partial differential equations and Asian options, *Math. Models Methods Appl. Sci.* **11** (2001), 475–497.

[8] Black F., Scholes M., The pricing of options and corporate liabilities, *J. Polit. Econ.* **81** (1973), 637–659.

[9] Bordag L.A., Chmakova A.Y., Explicit solutions for a nonlinear model of financial derivatives, *Int. J. Theor. Appl. Finance* **10** (2007), 1–21.

[10] Brandimarte P., Numerical methods in finance and economics. A MATLAB®-based introduction, Wiley-Interscience, Hoboken, NJ, 2006.

[11] Caister N.C., Govinder K.S., O'Hara J.G., Optimal system of Lie group invariant solutions for the Asian option PDE, *Math. Methods Appl. Sci.* **34** (2011), 1353–1365.

[12] Gazizov R.K., Ibragimov N.H., Lie symmetry analysis of differential equations in finance, *Nonlinear Dynam.* **17** (1998), 387–407.

[13] Leach P.G.L., Andriopoulos K., Nonlocal symmetries past, present and future, *Appl. Anal. Discrete Math.* **1** (2007), 150–171.

[14] Patsiuk O., Kovalenko S., Symmetry reduction and exact solutions of the nonlinear Black–Scholes equation, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **62** (2018), 164–173.

[15] Taylor S.M., Glasgow S.A., A novel reduction of the simple asian option and Lie-group invariant solutions, *Int. J. Theor. Appl. Finance* **12** (2009), 1197–1212.