

Поліноміальні розв'язки моделі нелінійного середовища з КОЛИВНИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ

*С.І. Скуратівський, І.А. Скуратівська,
Г.В. Букур, О.М. Маслова*

*Інститут геофізики ім. С.І. Субботіна НАН України, Київ
E-mail: skurserg@gmail.com, inna.skurativska@gmail.com*

У статті досліджуються поліноміальні розв'язки нелінійної системи ДРЧП, яка описує динаміку складного середовища з коливними включеннями. Зокрема показано, що коефіцієнти розв'язку при старших степенях задовольняють суттєво нелінійну динамічну систему гамільтонового типу. У цій системі при зміні керуючого параметру моделі існують періодичні, квазіперіодичні та хаотичні режими, вивчення яких здійснювалось на основі аналізу перерізів Пуанкаре та спектру ляпуновських показників.

The paper considers polynomial solutions to a nonlinear system of PDE describing dynamics of complex medium with oscillating inclusions. In particular, it is shown that the coefficients of leading monomials satisfy a strongly nonlinear dynamical system of Hamiltonian type. This system may have periodic, quasiperiodic, and chaotic regimes when the model's control parameter is varied. The observed regimes were studied by means of analysis of Poincaré sections and spectra of Lyapunov exponents.

1. Вступ. З аналізу експериментальних даних стосовно протікання фізичних процесів у гетерогенних середовищах впливає необхідність удосконалення класичних моделей механіки суцільного середовища шляхом врахування внутрішніх часо-просторових масштабів та додаткових ступенів свободи. Така ситуація, зокрема, склалася з описом поширення коротких акустичних хвиль у твердих тілах та твердих полімерах, з описом поведінки полікристалічних тіл та гранульованих середовищ в умовах складного або тривалого навантаження, високих градієнтів тощо [3, 9].

Намагання описати поведінку гранульованих середовищ у континуальному наближенні чи процесі локалізації деформації у гетерогенних матеріалах показали необхідність узагальнення класичних моделей з метою врахування мікроструктури, динаміки структурних елементів та взаємодії між ними. У цій роботі розглядаються моделі, які враховують коливальну динаміку структурних елементів.

2. Врахування коливних ступенів свободи в математичних моделях структурованих середовищ. Як зазначено у роботах [9, 10], структурні елементи природних геосередовищ перебувають у постійному коливальному русі. Для врахування коливної динаміки структурних елементів геосередовища в рамках теорії суцільного середовища можна використати узагальнені рівняння стану [14, 15, 16] або безпосередньо описати динаміку коливань у додатковому рівнянні руху. До останнього випадку належать моделі у вигляді взаємно проникаючих континуумів [1, 2, 7, 11, 12, 15, 16, 17, 22]

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma}{\partial x} - m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, & \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \omega^2(w - u) &= 0, \\ \sigma &= \frac{E_1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{E_2}{\rho} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{E_3}{\rho} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^3, \end{aligned} \quad (1)$$

де u — зміщення основного середовища густини ρ , w — зміщення осцилюючого включення густини $m\rho$ з власною частотою ω .

Останнє рівняння є рівнянням стану несучого середовища. Виконуючи знерозмірення моделі (1) згідно з формулами $t = \tau \bar{t}$, $x = c_0 \tau \bar{x}$, $u = c_0 \bar{u}$, $w = c_0 \bar{w}$, $\bar{\omega} = \omega \tau$, запишемо її у такому вигляді

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{t}^2} &= \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{x}} - m \frac{\partial^2 w}{\partial \bar{t}^2}, & \frac{\partial^2 w}{\partial \bar{t}^2} + \omega^2(w - u) &= 0, \\ \sigma &= e_1 \frac{\partial u}{\partial \bar{x}} + e_2 \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{x}} \right)^2 + e_3 \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{x}} \right)^3, \end{aligned} \quad (2)$$

де $e_1 = \left(\frac{c}{c_0} \right)^2$, $e_2 = \frac{E_2}{c_0^2 \tau \rho}$, $e_3 = \frac{E_3}{c_0^2 \tau^2 \rho}$, $c^2 = \frac{E_1}{\rho}$.

Зазначимо, що кубічне рівняння стану є доволі поширеним серед моделей природних матеріалів. Зокрема, коефіцієнти e_i пов'язуються з особливостями графіка рівняння стану наступним чином [20]:

$$\sigma = A_1 \frac{\partial u}{\partial x} + A_2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + A_3 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^3,$$

де $A_1 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1} \frac{5-n}{4}$, $A_2 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1^2} \frac{1+n}{2}$, $A_3 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1^3} \frac{3+n}{4}$, $n = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} < 0$, параметри σ_1 та ε_1 вибираються із умови, що $\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} = 0$ у точці з координатами $(\varepsilon_1, \sigma_1)$. Для багатьох матеріалів $|n| \geq 1$.

Варто також зазначити, що подібні моделі виникають як континуальні наближення дискретних ланцюгів частинок, зв'язаних певними силами взаємодії [8, 13]. Також такі моделі у довгохвильовому наближенні описують розповсюдження збурень у середовищах з пухирцями газу, що не розчиняється [6].

3. Поліноміальні розв'язки моделі взаємно проникаючих континуумів. Зазначимо, що у роботах [2, 11, 15, 16, 17, 22] детально вивчено хвильові розв'язки моделі (1), які описуються нелінійними автономними звичайними диференціальними рівняннями, що дозволяє використати сучасні досягнення в галузі числового та якісного аналізу динамічних систем. Натомість, інші розв'язки вказаної моделі ретельно не досліджувались.

Наразі розглянемо поліноміальні розв'язки моделі (2). У цьому випадку розв'язок системи (2) будемо шукати у наступному вигляді [18]

$$u = a_1 + a_2x + a_3x^2, \quad w = b_1 + b_2x + b_3x^2, \quad (3)$$

де коефіцієнти $a_i = a_i(t)$ та $b_i = b_i(t)$ є функціями тільки часу.

Підставимо (3) в (2) та випишемо коефіцієнти при мономах x^k . При x^0 :

$$\begin{aligned} -2a_3e_1 - 4a_2a_3e_2 - 6a_2^2a_3e_3 + \frac{d^2a_1}{dt^2} + m \frac{d^2b_1}{dt^2} &= 0, \\ \frac{d^2b_1}{dt^2} + \omega^2(b_1 - a_1) &= 0. \end{aligned}$$

При x^1 :

$$\begin{aligned} -8a_3^2e_2 - 24a_2a_3^2e_3 + \frac{d^2a_2}{dt^2} + m \frac{d^2b_2}{dt^2} &= 0, \\ \frac{d^2b_2}{dt^2} + \omega^2(b_2 - a_2) &= 0. \end{aligned}$$

При x^2 :

$$-24a_3^3e_3 + \frac{d^2a_3}{dt^2} + m \frac{d^2b_3}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2b_3}{dt^2} + \omega^2(b_3 - a_3) = 0. \quad (4)$$

Для спрощення системи (4) прийемо, що $24e_3 = -\mu < 0$, $a_3 = x$, $b_3 = y$, та виконаємо наступні масштабні перетворення

$$t = \tau \bar{t}, \quad x = \frac{\bar{x}}{q}, \quad y = \frac{\bar{y}}{q}.$$

Якщо параметри $\tau = \frac{1}{\omega}$, $q = \frac{\sqrt{\mu}}{\omega}$, то прийдемо до такої системи рівнянь (нехтуючи ризиками над змінними):

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x^3 = m(y - x), \quad \frac{d^2y}{dt^2} + (y - x) = 0,$$

яка залежить лише від одного параметру зв'язку m .

Легко показати, що отримана система є гамільтоною. Дійсно, за додаткової заміни змінної $y = \frac{\bar{y}}{\sqrt{m}}$ можна отримати систему

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x^3 = m \left(\frac{y}{\sqrt{m}} - x \right), \quad \frac{d^2y}{dt^2} + \sqrt{m} \left(\frac{y}{\sqrt{m}} - x \right) = 0,$$

яка має представлення виду

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial y},$$

де потенціал $V = \frac{x^4}{4} + \frac{m}{2} \left(\frac{y}{\sqrt{m}} - x \right)^2$, що дозволяє записати функцію Гамільтона у вигляді

$$H = \frac{1}{2}p_x^2 + \frac{1}{2}p_y^2 + V(x, y), \quad p_x = \frac{dx}{dt}, \quad p_y = \frac{dy}{dt}, \quad (5)$$

яка на траєкторіях системи набуває сталих значень, тобто $\frac{dH}{dt} = 0$, а отже, $H = h = \text{const}$.

Розглянемо структуру фазового простору системи та її зміну при варіюванні параметрів системи. Для цього використаємо техніку перерізів Пуанкаре, а у якості керуючого параметру виберемо параметр h — енергія системи. Початкові умови для інтегрування системи виберемо таким чином щоб вони задовольняли гамільтоніан H .

Рівняння $H = h = \text{const}$ являє собою гіперповерхню в 4-вимірному фазовому просторі динамічної системи, на якій інтегральна траєкторія лишається увесь наступний час. Ця траєкторія формує тривимірний фазовий портрет, який можна вивчати за допомогою

перерізів Пуанкаре, наприклад, площиною $x = 0$. Тоді у цій площині точки перетину траєкторії з січною площиною формують переріз Пуанкаре.

Зафіксуємо значення параметру $m = 0,01$ та значення змінної x у початковий момент часу $x(0) = x_0 = 0,45$. Інші початкові умови виберемо у формі $y(0) = \frac{dy}{dt}(0) = 0$ та $\frac{dx}{dt}(0) = \sqrt{2h - mx_0^2 - x_0^4/2}$.

У якості керуючого параметра виберемо h . При малих h коливання близькі до гармонічних, але при зростанні h їх форма починає усе більше відрізнятися від гармонічних під впливом нелінійності. Типовий переріз Пуанкаре, який відповідає квазіперіодичній траєкторії, зображено на рис. 1а. Подальше зростання h спричиняє ускладнення геометричної структури перерізів, що супроводжується розділенням замкнутої кривої на фрагменти, утворення на місці цих фрагментів нових замкнутих кривих і, нарешті, появою областей з хаотично заповненими точками. Зокрема, на рис. 1б представлено такий переріз Пуанкаре з хаотичною областю, побудований при $h = 0,79$.

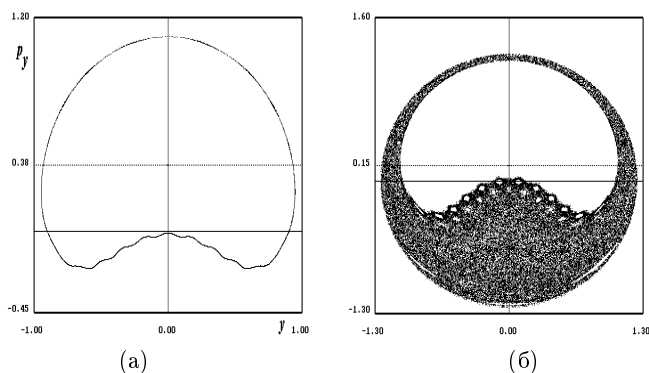


Рис. 1. Переріз Пуанкаре при $h = 0,705$ (а) та $h = 0,79$ (б).

4. Алгоритм обчислення СЛП. Для встановлення характеру виявлених режимів використаємо ляпуновські показники [5], які є узагальненням власних значень стаціонарних точок динамічної системи та мультиплікаторів граничних циклів на випадок більш загальних траєкторій. Вони характеризують стійкість цієї траєкторії, тобто структуру фазового простору поблизу виділеної траєкторії. Тому аналіз цієї частини фазового простору можна робити у лінійному наближенні, яке задовольняє варіаційне рівняння $\frac{d\Phi}{dt} = DF\Phi$.

Зокрема, для стаціонарної точки, коли траєкторією є сталий розв'язок, рівняння у варіаціях є системою із сталими коефіцієнтами з розв'язком, що є суперпозицією частинних розв'язків $m_i = \exp(\lambda_i t)$, де λ_i — власні значення матриці лінеаризації.

Тоді ляпуновський показник $\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln(|m_i|)$. В інших випадках $m_i(t)$ не є строго експоненційною функцією, але завдяки осередненню за великий проміжок часу ця величина збігається до експоненційної майже завжди (для майже всіх початкових умов).

Зазначимо, що визначення показників Ляпунова зіштовхується із проблемами числового характеру [21], оскільки не зберігається лінійна незалежність при числовому інтегруванні. Для вирішення цієї проблеми використовують процедуру ортогоналізації Грама–Шмідта [21]. У якості перевірки правильності обчислення показників використаємо той факт, що сума показників дорівнює середньому за часом значенню сліду матриці лінеаризації.

Зокрема, виберемо значення параметра $h = 0,705$ та початкову точку $\{0,45; 0; 1,1779; 0\}$ на профілі досліджуваної траєкторії, фазовий портрет якої зображено на рис. 1(а). У результаті роботи програми отримаємо спектр $\lambda = \{\pm 3 \cdot 10^{-4}; \pm 5 \cdot 10^{-4}\}$.

Оскільки система гамільтонова, то сума показників повинна бути нульовою, що для цієї системи забезпечується з точністю $\sim 10^{-6}$.

Для траєкторії рис. 1(б), побудованої при значенні параметра $h = 0,79$ з початкової точки $\{0,45; 0; 1,2479; 0\}$, спектр показників Ляпунова $\lambda = \{\pm 0,0176; \pm 7 \cdot 10^{-4}\}$. Наявність додатного показника вказує на нестійкість траєкторії, що супроводжується появою хаотичного перерізу Пуанкаре.

5. Випадок слабо зв'язаної системи. Розглянемо детально випадок системи, коли параметр $m = \varepsilon t \ll 1$ малий і систему

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + x^3 &= m\varepsilon(y - x), \\ \frac{d^2y}{dt^2} + (y - x) &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

можна вважати слабо зв'язаною.

Для дослідження розв'язків такої системи використаємо результати робіт [19, 23]. Виконаємо у системі (6) наступну заміну змінних

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \dot{x} + ix, & \psi_2 &= \dot{y} + iy, \\ \psi_1^* &= \dot{x} - ix, & \psi_2^* &= \dot{y} - iy, & i &= \sqrt{-1}. \end{aligned}$$

У нових змінних система набуде вигляду

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 - \frac{i}{2}(\psi_1 + \psi_1^*) + \frac{i}{8}(\psi_1 - \psi_1^*)^3 + m\varepsilon \frac{i}{2}(\psi_2 - \psi_2^* - \psi_1 + \psi_1^*) &= 0, \\ \dot{\psi}_2 - i\psi_2 + \frac{i}{2}(\psi_1 - \psi_1^*) &= 0. \end{aligned}$$

Наближений розв'язок отриманої системи шукатимемо у вигляді

$$\psi_1 = \varphi_1 e^{it}, \quad \psi_2 = \varphi_2 e^{it},$$

який описує резонансний випадок коливань поблизу відповідної частоти. У результаті осереднення за швидкою змінною отримуємо амплітудне рівняння

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_1 + \frac{i}{2}(1 - m\varepsilon)\varphi_1 - \frac{3i}{8}|\varphi_1|^2\varphi_1 + \frac{i}{2}m\varepsilon\varphi_2 &= 0, \\ \dot{\varphi}_1^* - \frac{i}{2}(1 - m\varepsilon)\varphi_1^* + \frac{3i}{8}|\varphi_1|^2\varphi_1^* - \frac{i}{2}m\varepsilon\varphi_2^* &= 0, \\ \dot{\varphi}_2 + \frac{i}{2}\varphi_1 &= 0, \quad \dot{\varphi}_2^* - \frac{i}{2}\varphi_1^* &= 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Легко переконатись, що отримана система має перший інтеграл

$$|\varphi_1|^2 + m\varepsilon|\varphi_2|^2 = N = \text{const.}$$

Це дозволяє ввести нові змінні згідно із співвідношеннями

$$\varphi_1 = N \sin \theta e^{i\delta_1}, \quad \varphi_2 = \frac{N}{\sqrt{m\varepsilon}} \sin \theta e^{i\delta_2},$$

підстановка яких у (7) приводить до системи відносно θ та δ :

$$\begin{aligned} \dot{\theta} + \frac{1}{2}(1 - m\varepsilon) - \frac{3}{8}N^2 \sin^2 \theta + \sqrt{m\varepsilon} \operatorname{ctg} 2\theta \cos \delta &= 0, \\ \dot{\delta} + \frac{1}{2}\sqrt{m\varepsilon} \sin \delta &= 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Отримана система має стаціонарні точки з координатами $\delta = 0$ та θ , що задовольняє рівняння

$$G(\theta) \equiv \frac{1}{2}(1 - m\varepsilon) - \frac{3}{8}N^2 \sin^2 \theta + \sqrt{m\varepsilon} \operatorname{ctg} 2\theta = 0.$$

Аналізуючи графіки функції $G(\theta)$ (рис. 2) протягом її періоду π можна переконатись, що кількість стаціонарних точок і їх тип залежать від величини N . Дійсно, при $N = 1,1$ функція $G(\theta)$ має два корені, які є центрами, оточеними замкнутими траєкторіями

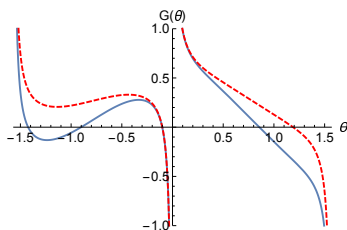


Рис. 2. Графіки функції $G(\theta)$ при $N = 1,1$ (пунктирна лінія) та $N = 1,5$ (суцільна крива).

системи (8). При зростанні N спостерігається деформування графіка, що спричинює появу додаткових двох коренів. Корінь, в якому похідна $G'_\theta(\theta) > 0$, відповідає сідловій стаціонарній точці, через яку проходять її сепаратриси. Наявність у фазовому просторі системи (8) сідлової точки служить ознакою того, що в системі (6) можуть реалізуватись хаотичні режими, що виникають унаслідок утворення стохастичного шару [4].

6. Висновки. Таким чином, у роботі показано, що модель складного середовища має поліноміальні розв'язки, поведінка яких у часі може бути як періодичною, квазіперіодичною так і хаотичною. Хаотичні режими пов'язані з утворенням стохастичного шару в околі сепаратрисних контурів сідлових точок системи.

- [1] Даниленко В.А., Скуратівський С.І., Резонансні режими поширення нелінійних хвильових полів у середовищах з коливними включеннями, *Доп. НАН України* (2008), по. 11, 108–112.
- [2] Даниленко В.А., Скуратівський С.І., Хвильові розв'язки моделі середовища з осциляторами Ван дер Поля, *Динам. системи* **2** (2012), 227–239.
- [3] Ерофеев В.И., Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой, Изд-во Моск. ун-та, Москва 1999.
- [4] Заславский Г.М., Сагдеев Р.З., Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса, Наука, Москва 1988.
- [5] Кузнецов С.П., Динамический хаос (курс лекций), Изд-во Физ.-мат. лит., Москва 2001.
- [6] Нигматулин Р.И., Динамика многофазных сред, Ч. 2, Наука, Москва, 1987.
- [7] Пальмов В.А., Об одной модели среды сложной структуры, *Приклад. матем. мех.* **33** (1969), 768–773.

- [8] Потапов А.И., Волны деформации в среде с внутренней структурой, Нелинейные волны '2004, Отв. ред. А.В. Гапонов-Грехов, В.И. Некоркин, ИПФ РАН, Нижний Новгород, 2005, 125–140.
- [9] Родионов В.Н., Очерк геомеханики, Науч. мир, Москва, 1996.
- [10] Садовский М.А. Автомоделность геодинамических процессов, *Вестн. АН СССР* (1986), no. 8, 3–11.
- [11] Скуратовский С.И., Скуратовская И.А., Локализованные автоволновые решения нелинейной модели сложной среды, *Техн. акустика* **2010** (2010), 6, 9 с.
- [12] Слепян Л.И., Волна деформаций в стержне с амортизированными массами, *Мех. тверд. тела* (1967), no. 5, 34–40.
- [13] Akhatov I.Sh., Baikov V.A., Khusnutdinova K.R., Nonlinear dynamics of coupled chains of particles, *J. Appl. Math. Mech.* **59** (1995), 353–361.
- [14] Danylenko V.A., Danevych T.B., Makarenko O.S., Skurativskiy S.I., Vladimirov V.A., Self-organization in nonlocal non-equilibrium media, Subbotin Institute of Geophysics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2011.
- [15] Danylenko V.A., Skurativskiy S.I., Peculiarities of wave fields in nonlocal media, *Nonlinear Dyn. Syst. Theory* **16** (2016), 165–178.
- [16] Danylenko V.A., Skurativskiy S.I., Peculiarities of wave dynamics in media with oscillating inclusions, *Int. J. Non-Linear Mech.* **84** (2016), 31–38.
- [17] Danylenko V.A., Skurativskiy S.I., Dynamics of waves in the cubically nonlinear model for mutually penetrating continua, *Discontinuity Nonlinearity Complexity* **6** (2017), 425–433.
- [18] Galaktionov V.A., Svirshchevskii S.R., Exact solutions and invariant subspaces of nonlinear partial differential equations in mechanics and physics, Chapman & Hall/CRC, Taylor & Francis Group, Boca Raton, 2007.
- [19] Gendelman O., Manevitch L.I., Vakakis A.F., M'Closkey R., Energy pumping in nonlinear mechanical oscillators: part i-dynamics of the underlying hamiltonian systems, *J. Appl. Mech.* **68** (2000), 34–41.
- [20] Ponomarev B.V., Flexure of rectangular plates for nonlinear elastic materials of asymmetric behavior in tension and compression, *Appl. Mech.* **4** (1968), 20–27.
- [21] Ramasubramanian K., Sriram M.S., A comparative study of computation of Lyapunov spectra with different algorithms, *Phys. D* **139** (2000), 72–86.
- [22] Skurativskiy S.I., Chaotic wave solutions in a nonlocal model for media with vibrating inclusions, *J. Math. Sci.* **198** (2014), 54–61.
- [23] Vakakis A.F., Rand R.H., Non-linear dynamics of a system of coupled oscillators with essential stiffness non-linearities, *Int. J. Non-Linear Mech.* **39** (2004), 1079–1091.