Збірник праць Інституту математики НАН України 2019, т. 16, № 1, 78–83

УДК 517.9

Точно-розв'язні моделі гідродинамічної стійкості

О.Ю. Жалій †, ***Г.І. Бурде*** ‡

† *Інститут математики НАН України, Київ, Україна*
E-mail: zhaliy@imath.kiev.ua

‡ *Університет ім. Бен-Гуріона, Беер-Шева, Ізраїль*
E-mail: georg@bgu.ac.il

Метод відокремлення змінних застосовано до задачі визначення точно-розв'язних моделей гідродинамічної стійкості. З математичної точки зору проблема визначення стійкості даної течії представляє собою розв'язування системи рівнянь, що отримані з рівнянь Нав'є–Стокса лінеаризацією за основними течіями та знаходження множини всіх її можливих розв'язків, які дозволяють розщеплення збурень на нормальні моди. Повністю розглянуто випадок циліндричних координат.

The method of separation of variables is applied to the problem of determining exactly solvable models of hydrodynamic stability. From a mathematical point of view, the problem of determining the stability of a flow is the solving of a system of equations derived from Navier–Stokes equations by linearization along the main flows and finding a set of all possible solutions that allow splitting of perturbations into normal modes. The case of cylindrical coordinates is completely considered.

Класична теорія лінійної стійкості в'язких нестисливих потоків пов'язана з розвитком у просторі та часі нескінченно малих збурень навколо заданого основного потоку [1, 2, 3]. Сформулюємо задачу гідродинамічної стійкості, базуючись на рівнянні Нав'є–Стокса в циліндричних координатах (r, φ, z). Як це звичайно роблять у теорії стійкості, розщепимо поля швидкості і тиску $(\hat{v}_r, \hat{v}_\varphi, \hat{v}_z, \hat{p})$ на 2 складові: основної течії (V_r, V_φ, V_z, P) і збуреної (v_r, v_φ, v_z, p),

$$\hat{v}_r = V_r + v_r, \quad \hat{v}_\varphi = V_\varphi + v_\varphi, \quad \hat{v}_z = V_z + v_z, \quad \hat{p} = P + p. \tag{1}$$

Підставляючи (1) в рівняння Нав'є–Стокса, записане в термінах змінних $(\hat{v}_r, \hat{v}_\varphi, \hat{v}_z, \hat{p})$, і ігноруючи всі доданки, що містять квадрат збуреної амплітуди, а також накладаючи умову, щоб змінні основної течії (V_r, V_φ, V_z, P) самі задовольняли рівняння Нав'є–Стокса, ми отримуємо наступну систему лінеаризованих рівнянь гідродинамічної стійкості в циліндричних координатах:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial v_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\varphi}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{v_\varphi}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \varphi} \\
&\quad + V_z \frac{\partial v_r}{\partial z} + v_z \frac{\partial V_r}{\partial z} - 2\frac{V_\varphi v_\varphi}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} \\
&\quad + \nu\left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{v_r}{r^2}\right), \\
&\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + V_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + v_r \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} + \frac{V_\varphi}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_\varphi}{r}\frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} \\
&\quad + V_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + v_z \frac{\partial V_\varphi}{\partial z} + \frac{V_r v_\varphi}{r} + \frac{v_r V_\varphi}{r} = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \varphi} \\
&\quad + \nu\left(\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r^2}\right), \\
&\frac{\partial v_z}{\partial t} + V_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{V_\varphi}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \varphi} + \frac{v_\varphi}{r}\frac{\partial V_z}{\partial \varphi} + V_z\frac{\partial v_z}{\partial z} + v_z\frac{\partial V_z}{\partial z} \\
&\quad = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial r}\right), \\
&\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r} = 0.
\end{aligned} \tag{2}
$$

Введемо нову систему координат t, $\xi = \xi(t, r)$, $\gamma = \gamma(t, \varphi)$, $\eta = \eta(t, z)$.

Казатимемо, що система (2) допускає відокремлення змінних в нестаціонарній циліндричній системі координат ξ, γ, η, якщо анзац

$$
\begin{aligned}
&v_r = T(t)\exp(a\eta + m\gamma + sS(t))f(\xi), \\
&v_\varphi = T(t)\exp(a\eta + m\gamma + sS(t))g(\xi), \\
&v_z = T(t)\exp(a\eta + m\gamma + sS(t))h(\xi), \\
&p = T_1(t)\exp(a\eta + m\gamma + sS(t))\pi(\xi)
\end{aligned} \tag{3}
$$

зводить систему рівнянь з частинними похідними (2) до системи 3-х звичайних диференціальних рівнянь другого порядку й одного звичайного диференціального рівняння першого порядку для 4-х функцій $f(\xi)$, $g(\xi)$, $h(\xi)$, $\pi(\xi)$ наступного вигляду:

$$h''(\xi) = U_{11}g'(\xi) + U_{12}h'(\xi) + U_{13}\pi'(\xi)$$

$$\begin{aligned}
&\quad + U_{14}f(\xi) + U_{15}g(\xi) + U_{16}h(\xi) + U_{17}\pi(\xi),\\
f''(\xi) &= U_{21}g'(\xi) + U_{22}h'(\xi) + U_{23}\pi'(\xi)\\
&\quad + U_{24}f(\xi) + U_{25}g(\xi) + U_{26}h(\xi) + U_{27}\pi(\xi),\\
g''(\xi) &= U_{31}g'(\xi) + U_{32}h'(\xi) + U_{33}\pi'(\xi)\\
&\quad + U_{34}f(\xi) + U_{35}g(\xi) + U_{36}h(\xi) + U_{37}\pi(\xi),\\
f'(\xi) &= U_{41}f(\xi) + U_{42}g(\xi) + U_{43}h(\xi) + U_{44}\pi(\xi).
\end{aligned} \tag{4}$$

Тут U_{ij} — це поліноми другого порядку відносно спектральних параметрів a, s, m з коефіцієнтами, які самі є гладкими функціями від ξ.

Основні кроки процедури відокремлення змінних в системі (2) є наступними:

1. Підставляємо анзац (3) в рівняння (2) і записуємо похідні $f''(\xi)$, $g''(\xi)$, $h''(\xi), f'(\xi)$ в термінах функцій $g'(\xi)$, $h'(\xi)$, $\pi'(\xi)$, $f(\xi)$, $g(\xi)$, $h(\xi)$, $\pi(\xi)$, використовуючи рівняння (4).
2. Далі розглядаємо $g'(\xi)$, $h'(\xi)$, $\pi'(\xi)$, $f(\xi)$, $g(\xi)$, $h(\xi)$, $\pi(\xi)$ як нові незалежні змінні. Оскільки функції $\xi(t,r)$, $\gamma(t,\varphi)$, $\eta(t,z)$, $T(t)$, $T_1(t)$, $S(t)$, основні течії V_r, V_φ, V_z і коефіцієнти U_{ij} (які самі є гладкими функціями від ξ) є незалежними відносно цих змінних, ми вимагатимемо, щоб отримана рівнисть перетворювалась у тотожність при довільних $g'(\xi)$, $h'(\xi)$, $\pi'(\xi)$, $f(\xi)$, $g(\xi)$, $h(\xi)$, $\pi(\xi)$. Іншими словами, ми маємо розщепити цю рівність відносно цих змінних. Після розщеплення ми отримаємо перевизначену систему нелінійних рівнянь в частинних похідних для невідомих функцій $\xi(t,r)$, $\gamma(t,\varphi)$, $\eta(t,z)$, $T(t)$, $T_1(t)$, $S(t)$, основних течій V_r, V_φ, V_z і коефіцієнтів поліномів U_{ij}.
3. Після розв'язання вищеотриманої системи ми отримаємо вичерпний опис координатних систем, в яких система рівнянь (2) допускає відокремлення змінних в рамках нашого означення.

Отже, проблема відокремлення змінних в системі рівнянь (2) зводиться до інтегрування перевизначеної системи рівнянь з частинними похідними для невідомих функцій $\xi(t,r)$, $\gamma(t,\varphi)$, $\eta(t,z)$, $T(t)$, $T_1(t)$, $S(t)$, основних течій V_r, V_φ, V_z і коефіцієнтів поліномів U_{ij}.

Нижче наводимо результати. Для наявності фізичного змісту ми наклали додаткову умову, щоб основні течії самі точно задовольняли рівняння Нав'є–Стокса.

Тривимірні збурення. Загальна форма збурень v_r, v_φ, v_z і p є такою:

$$v_r = T(t)\exp\left(a\eta + m\varphi + s\int T(t)^2\,\mathrm{d}t\right) f(\xi),$$
$$v_\varphi = T(t)\exp\left(a\eta + m\varphi + s\int T(t)^2\,\mathrm{d}t\right) g(\xi),$$
$$v_z = T(t)\exp\left(a\eta + m\varphi + s\int T(t)^2\,\mathrm{d}t\right) h(\xi),$$
$$p = \rho T(t)^2\exp\left(a\eta + m\varphi + s\int T(t)^2\,\mathrm{d}t\right) \pi(\xi), \tag{5}$$

де

$$\xi = T(t)r, \quad \eta = T(t)z + c(t).$$

Цим збуренням відповідають два класи основних течій, що задовольняють рівняння Нав'є–Стокса. Поля швидкостей для обох класів визначено наступним чином:

$$V_z = A(\xi)T(t) - \frac{zT'(t)}{T(t)} - \beta(t), \quad \beta(t) = \frac{c'(t)}{T(t)},$$
$$V_r = B(\xi)T(t) - r\frac{T'(t)}{T(t)}, \quad V_\varphi = C(\xi)T(t),$$

де функції $T(t)$ і $B(\xi)$ визначаються різним чином для кожного з цих двох класів:

$$\text{Class I:} \quad T(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}, \quad B(\xi) = -\frac{3\xi}{4} + \frac{k}{\xi},$$

де функції $A(\xi)$ і $C(\xi)$ задовольняють рівняння

$$(4k + 3\xi^2 - 4\nu)A'(\xi) + \xi(-4k + 3\xi^2 + 4\nu)A''(\xi) + 4\xi^2\nu A'''(\xi) = 0,$$
$$-4\nu k_0\xi + (-4k + 3\xi^2 - 4\nu)C(\xi)$$
$$\quad + \xi(-4k + 3\xi^2 + 4\nu)C'(\xi) + 4\nu\xi^2 C''(\xi) = 0 \tag{6}$$

і розподіл тисків дано наступним чином:

$$\frac{P}{\rho} = \frac{\nu k_0\varphi}{t} + \frac{x^2}{8t^2}$$

$$
+ x\left[\beta'(t) + \frac{\beta(t)}{2t} + t^{-3/2}\left(\nu A''(\xi) - \frac{4k - 3\xi^2 - 4\nu}{4\xi}A'(\xi)\right)\right]
+ \frac{1}{t}\int \frac{16k^2 - 5\xi^2 + 16\xi^2 C^2(\xi)}{16\xi^3}\,\mathrm{d}\xi + p_0(t).
$$

ЗДР (6) можуть бути явним чином розв'язані в термінах неповних гамма-функцій.

$$
\text{Class II:}\quad T(t) = 1,\quad B(\xi) = \frac{k}{\xi},
$$

де $A(\xi)$ і $C(\xi)$ задовольняють рівняння

$$
\begin{aligned}
&(k-\nu)A'(\xi) + \xi(\nu - k)A''(\xi) + \xi^2\nu A'''(\xi) = 0,\\
&\nu k_0\xi + (k+\nu)C(\xi) + \xi(k-\nu)C'(\xi) - \xi^2\nu C''(\xi) = 0
\end{aligned}
\tag{7}
$$

і відповідний розподіл тисків дано наступним чином:

$$
\frac{P}{\rho} = \nu k_0\varphi + x\left(\beta'(t) + \nu A''(\xi) + \frac{\nu - k}{\xi}A'(\xi)\right)
+ \int \frac{k^2 + \xi^2 C^2(\xi)}{\xi^3}\,\mathrm{d}\xi + p_0(t).
$$

ЗДР (7) можуть бути явним чином розв'язані в елементарних функціях.

Рівняння з відокремленими змінними можуть бути записані для обох класів таким чином:

$$
\begin{aligned}
&f(\xi)\big(\xi^2 s + \nu - m^2\nu - a^2\xi^2\nu + a\xi^2 A(\xi) + m\xi C(\xi) + \xi^2 B'(\xi)\big)\\
&\quad + 2(m\nu - \xi C(\xi))g(\xi) + \xi((-\nu + \xi B(\xi))f'(\xi)\\
&\quad + \xi(\pi'(\xi) - \nu f''(\xi))) = 0,\\
&\big(\xi^2 s + \nu - m^2\nu - a^2\xi^2\nu + a\xi^2 A(\xi) + \xi B(\xi) + m\xi C(\xi)\big)g(\xi)\\
&\quad + f(\xi)\big(-2m\nu + \xi C(\xi) + \xi^2 C'(\xi)\big)\\
&\quad + \xi(m\pi(\xi) + (-\nu + \xi B(\xi))g'(\xi) - \xi\nu g''(\xi)) = 0,\\
&\big(\xi^2 s - m^2\nu - a^2\xi^2\nu + a\xi^2 A(\xi) + m\xi C(\xi)\big)h(\xi)\\
&\quad + \xi(a\xi\pi(\xi) + \xi f(\xi)A'(\xi) - \nu h'(\xi) + \xi B(\xi)h'(\xi) - \xi\nu h''(\xi)) = 0,\\
&f(\xi) + mg(\xi) + \xi(ah(\xi) + f'(\xi)) = 0.
\end{aligned}
$$

Двовимірні збурення. Загальна форма збурень є такою:

$$v_r = T(t)\exp\left(m\varphi + s\int T(t)^2\,\mathrm{d}t\right) f(\xi),$$

$$v_\varphi = T(t)\exp\left(m\varphi + s\int T(t)^2\,\mathrm{d}t\right) g(\xi), \quad v_z = 0,$$

$$p = \rho T(t)^2\exp\left(m\varphi + s\int T(t)^2\,\mathrm{d}t\right) \pi(\xi), \quad \xi = T(t)r,$$

яка є частинним випадком (5) для $a = 0$.

Цим збуренням відповідає, зокрема, така основна течія:

$$V_z = -kz + \beta(t), \quad V_r = kr/2 + q/r, \quad V_\varphi = \nu B(\xi)T(t),$$

$$\frac{P}{\rho} = -\frac{1}{2}k^2x^2 + x\left(k\beta(t) - \beta'(t)\right) - \frac{4q^2 + k^2r^4}{8r^2} + T^2(t)\left(\nu^2\int\frac{B^2(\xi)}{\xi}\,\mathrm{d}\xi - \frac{1}{2}\nu k_0\varphi\right) + p_0(t),$$

де функції $T(t)$ і $B(\xi)$ задовольняють систему рівнянь

$$T'(t) - \frac{1}{2}\big(QT^3(t) - kT(t)\big) = 0,$$

$$k_0\xi - \big(2q + 2\nu + Q\xi^2\big)B(\xi) - \xi\big(2q - 2\nu + Q\xi^2\big)B'(\xi) + 2\nu\xi^2B''(\xi) = 0,$$

яка приводить до наступних випадків

$$T(t) = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^{kt} + 1}} \quad \left(\frac{Q}{k} = 1\right), \quad T(t) = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^{kt} - 1}} \quad \left(\frac{Q}{k} = -1\right),$$

$$T(t) = 1 \quad \left(\frac{Q}{k} = 1\right), \quad T(t) = \mathrm{e}^{-kt/2} \quad (Q = 0)\,.$$

[1] Drazin P.G., Reid W.H., Hydrodynamic stability, Cambridge University Press, 1995.

[2] Reed H.L., Saric W.S., Linear stability theory applied to boundary layers, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **28** (1996), 389-428.

[3] Saric W.S., Reid H.L., White E.B., Stability and transition of three-dimensional boundary layers, *Ann. Rev. Fluid. Mech.* **35** (2003), 413-440.