Збірник праць Інституту математики НАН України 2019, т. 16, № 1, 66–77

УДК 517.912:512.816

Розв'язки системи пов'язаних рівнянь ейконалу

І.А. Єгорченко

Інститут математики НАН України, Київ
E-mail: iyegorch@imath.kiev.ua

Наведено короткий огляд методу отримання загального розв'язку системи пов'язаних рівнянь ейконалу, що базується на використанні перетворень годографа та контактних перетворень. Використана процедура дозволила також знайти загальний розв'язок системи рівнянь ейконалу та Гамільтона–Якобі.

We review the approach to obtaining the general solution for a coupled system of eikonal equations that based on using hodograph and contact transformations of the initial system. The procedure used allowed also finding of the general solution for a coupled system of the eikonal and Hamilton–Jacobi equation.

1. Вступ. Ми розглядаємо перевизначену систему, яка складається з двох рівнянь ейконалу для двох функцій від $(1+n)$ незалежних змінних, та ще одного рівняння, що пов'язує ці дві функції:

$$u_\mu u_\mu = 0, \quad v_\mu v_\mu = 0, \quad u_\mu v_\mu = 1, \tag{1}$$

де $u = u(x_0, x_1, \dots, x_n)$, $v = v(x_0, x_1, \dots, x_n)$.

Якщо не зазначено інше, індекси у незалежних змінних x_μ можуть приймати значення від 0 до n, $\mu = 0, 1, \dots, n$; нижні індекси у залежних змінних означають похідні за відповідними змінними x_μ, і пара індексів, що повторюються, означає підсумовування за цими індексами від 0 до n в просторі Мінковського:

$$x_\mu x_\mu = x_0 x_0 - x_1 x_1 - \dots - x_n x_n.$$

Ми також будемо вважати, що всі функції, які ми розглядаємо, є достатньо гладкими для існування та неперервності всіх потрібних похідних, та що всі залежні та незалежні змінні приймають значення у просторі дійсних чисел.

Відзначимо, що система (1) є спеціальним випадком більш загальної системи пов'язаних рівнянь ейконалу

$$u_\mu u_\mu = 0, \quad v_\mu v_\mu = 0, \quad u_\mu v_\mu = h(u,v) \tag{2}$$

з довільною функцією $h(u,v)$.

Система (2) може бути отримана в результаті локальних перетворень системи

$$u_\mu u_\mu = \rho(u,v), \quad v_\mu v_\mu = \sigma(u,v), \quad u_\mu v_\mu = \tau(u,v) \tag{3}$$

з довільними функціями ρ, σ та τ, де $\rho\sigma - \tau^2 < 0$. Така система виникла в нашій роботі [5] як частина умов редукції багатовимірного нелінійного хвильового рівняння $\Box\phi = F(\phi)$ з застосуванням анзацу з двома новими незалежними змінними $\phi = \phi(\omega_1, \omega_2)$.

Загальний вигляд системи типу (3), яка може бути редукована до системи вигляду (1), є наступним

$$\begin{aligned}
&u_\mu u_\mu = 2A_a(a,b)A_b(a,b),\\
&v_\mu v_\mu = 2B_a(a,b)B_b(a,b),\\
&u_\mu v_\mu = A_a(a,b)B_b(a,b) + B_a(a,b)A_b(a,b),
\end{aligned}$$

де $a = a(u,v)$, $b = b(u,v)$ — це довільні достатньо гладкі функції.

Прикладом системи такого вигляду є

$$u_\mu u_\mu = 1, \quad v_\mu v_\mu = -1, \quad u_\mu v_\mu = 0.$$

Проте, системи пов'язаних рівнянь ейконалу є цікавими і з точки зору безпосереднього практичного застосування у геометричній оптиці, розпізнаванні образів, механіці суцільного середовища та інших галузях.

Найменша розмірність, коли для системи (1) можна отримати нетривіальні розв'язки — це $n = 2$, тобто це буде система з однією часовою та двома просторовими змінними. У випадку однієї просторової змінної ми матимемо лише тривіальний лінійний розв'язок $u = a(x_0 \pm x_1) + c_1$, $v = 1/2a(x_0 \mp x_1) + c_2$, де $a = \mathrm{const} \neq 0$, c_1 та c_2 — довільні дійсні сталі.

У роботі [7] нами був знайдений параметричний загальний розв'язок для системи (1) та двох просторових змінних (ми виключали спеціальні випадки в процесі знаходження)

$$u = \frac{x_1 + \frac{x_2 z}{\sqrt{1-z^2}} - k'(z)}{g'(z)},$$

$$v=\frac{gx_2}{\sqrt{1-z^2}}+\frac{p(z)}{g'(z)}\left[x_1+\frac{x_2z}{\sqrt{1-z^2}}-k'(z)\right]+r(z),$$
$$0=x_0-x_1z+x_2\sqrt{1-z^2}$$
$$+\frac{g(z)}{g'(z)}\left(x_1+\frac{x_2z}{\sqrt{1-z^2}}-k'(z)\right)-k(z).$$

Тут

$$r'=-k''\big(zg+(1-z^2)g'\big),\quad p=\tfrac{1}{2}\big(-g'^2+(g-zg')^2\big).$$

Метод, який ми використовуємо, був розроблений на основі ідей, представлених в роботах Р.З. Жданова, І.В. Ревенка та В.І. Фущича [3, 4] щодо загального розв'язку системи д'Аламбера–Гамільтона.

2. Застосування перетворень годографа та контактних перетворень. У цьому параграфі розглянемо лише частковий випадок $n=2$, і функції

$$u=u(x_0,x_1,x_2),\quad v=v(x_0,x_1,x_2) \tag{4}$$

та будемо вважати, що $u_{x_0}\neq 0$ (в іншому випадку перше рівняння системи (1) матиме лише сталі розв'язки).

Ми переходимо від початкової пари (4) до нової пари залежних змінних w та v, та нових незалежних змінних y_0, y_1, y_2:

$$u=y_0,\quad x_0=w,\quad x_1=y_1,\quad x_2=y_2. \tag{5}$$

Вирази для похідних початкової пари функцій:

$$u_{x_0}=\frac{1}{w_{y_0}},\quad u_{x_1}=-\frac{w_{y_1}}{w_{y_0}},\quad u_{x_2}=-\frac{w_{y_2}}{w_{y_0}},$$
$$v_{x_0}=\frac{v_{y_0}}{w_{y_0}},\quad v_{x_1}=v_{y_1}-v_{y_0}\frac{w_{y_1}}{w_{y_0}},\quad v_{x_2}=v_{y_2}-v_{y_0}\frac{w_{y_2}}{w_{y_0}}. \tag{6}$$

Зазначимо, що у нових рівняннях, отриманих після застосування перетворення годографа, ми будемо позначати похідні за змінними y_μ як v_{y_μ} та w_{y_μ}.

Підстановка формул для похідних (6) до першого рівняння системи (1) дає наступні вирази:

$$-\frac{w_{y_1}^2}{w_{y_0}^2}-\frac{w_{y_2}^2}{w_{y_0}^2}+\frac{1}{w_{y_0}^2}=0.$$

Ми використовуємо припущення $w_{y_0} \neq 0$, і тому знайдене рівняння є еквівалентним наступному:

$$w_{y_1}^2 + w_{y_2}^2 = 1.$$

Підстановка формул для похідних до другого рівняння системи (1) дає

$$v_{y_1}^2 + v_{y_0}^2 \frac{w_{y_1}^2}{w_{y_0}^2} - 2\frac{v_{y_0} v_{y_1} w_{y_1}}{w_{y_0}} + v_{y_2}^2 + v_{y_0}^2 \frac{w_{y_2}^2}{w_{y_0}^2} - 2\frac{v_{y_0} v_{y_2} w_{y_2}}{w_{y_0}} = \frac{v_{y_0}^2}{w_{y_0}^2},$$

і в результаті отримуємо

$$v_{y_1}^2 + v_{y_2}^2 - 2(v_{y_1} w_{y_1} + v_{y_2} w_2)\frac{v_{y_0}}{w_{y_0}} = 0. \tag{7}$$

Підстановка до третього рівняння (1) дає

$$\frac{v_{y_0}}{w_{y_0}^2} + \frac{w_{y_1}}{w_{y_0}}\left(v_{y_1} + v_{y_0}\frac{w_{y_1}}{w_{y_0}}\right) + \frac{w_{y_2}}{w_{y_0}}\left(v_{y_2} + v_{y_0}\frac{w_{y_2}}{w_{y_0}}\right) = 1.$$

Враховуючи, що $w_{y_0} \neq 0$, ми приходимо до виразу

$$v_{y_1} w_{y_1} + v_{y_2} w_{y_2} = w_{y_0}.$$

Рівняння (7) перетворюється на наступне:

$$v_{y_1}^2 + v_{y_2}^2 = 2v_{y_0}.$$

У результаті перетворень отримуємо таку систему рівнянь:

$$\begin{aligned} &w_{y_1}^2 + w_{y_2}^2 = 1, \\ &v_{y_1}^2 + v_{y_2}^2 = 2v_{y_0}, \\ &v_{y_1} w_{y_1} + v_{y_2} w_{y_2} = w_{y_0}. \end{aligned} \tag{8}$$

Зазначимо, що система (8) включає рівняння ейконалу та рівняння Гамільтона–Якобі, подібні до умов редукції для рівняння Шрьодінгера, які розглядались в роботі [6].

Для застосування контактних перетворень, розглядаємо наступний набір нових незалежних змінних $z_0 = y_0$, $z_1 = w_{y_1}$, $z_2 = y_2$.

Розглянемо нові залежні змінні

$$H(z_0, z_1, z_2) = y_1 w_{y_1} - w, \quad v = v(z_0, z_1, z_2) \tag{9}$$

та випишемо співвідношення для похідних за новими незалежними змінними:

$$
\begin{aligned}
&H_{z_0} = -w_{y_0}, \quad H_{z_1} = y_1, \quad H_{z_2} = -w_{y_2},\\
&v_{y_0} = v_{z_0} + v_{z_1} w_{y_0 y_1}, \quad v_{y_1} = v_{z_1} + w_{y_1 y_1}, \quad v_{y_2} = v_{z_2} + v_{z_1} w_{y_1 y_2},\\
&w_{y_1 y_1} = \frac{1}{H_{z_1 z_1}}, \quad w_{y_1 y_2} = -\frac{H_{z_1 z_2}}{H_{z_1 z_1}}, \quad w_{y_0 y_1} = -\frac{H_{z_0 z_1}}{H_{z_1 z_1}},\\
&w_{y_0 y_2} = -\frac{\begin{vmatrix} H_{z_1 z_1} & H_{z_1 z_2} \\ H_{z_0 z_1} & H_{z_0 z_2} \end{vmatrix}}{H_{z_1 z_1}}.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Після відповідної підстановки у систему (8) приходимо до наступної системи рівнянь:

$$
z_1^2 + H_{z_2}^2 = 1, \tag{11}
$$

$$
\left(\frac{v_{z_1}}{H_{z_1 z_1}}\right)^2 + \left(v_{z_2} - v_{z_1}\frac{H_{z_1 z_2}}{H_{z_1 z_1}}\right)^2 = 2\left(v_{z_0} - v_{z_1}\frac{H_{z_1 z_2}}{H_{z_1 z_1}}\right), \tag{12}
$$

$$
v_{z_1}\frac{z_1}{H_{z_1 z_1}} - H_{z_2}\left(v_{z_2} - v_{z_1}\frac{H_{z_1 z_2}}{H_{z_1 z_1}}\right) = -H_{z_0}. \tag{13}
$$

Перше рівняння (11) цієї системи має загальний розв'язок для функції H:

$$
H = z_2\sqrt{1 - z_1^2} + G(z_0, z_1), \tag{14}
$$

де G — функція своїх аргументів, явний вигляд якої ми знайдемо нижче з інших рівнянь цієї системи.

Випадок

$$
z_1 = w_{y_1} = -\frac{u_{x_1}}{u_{x_0}} = \pm 1
$$

— це спеціальний випадок, який дає тривіальний розв'язок, і ми будемо його розглядати окремо.

З виразу для функції H (14) ми отримуємо, що

$$
\begin{aligned}
&H_{z_0} = G_{z_0}, \quad H_{z_1} = -\frac{z_1 z_2}{\sqrt{1 - z_1^2}}, \quad H_{z_2} = \sqrt{1 - z_1^2},\\
&H_{z_0 z_1} = G_{z_0 z_1}, \quad H_{z_1 z_2} = -\frac{z_1}{\sqrt{1 - z_1^2}},
\end{aligned}
\tag{15}
$$

$$H_{z_1z_1} = -\frac{z_2}{\sqrt{1-z_1^2}} - \frac{z_1^2 z_2}{\left(1-z_1^2\right)^{\frac{3}{2}}} + G_{z_1z_1} = -\frac{z_2}{\left(1-z_1^2\right)^{\frac{3}{2}}} + G_{z_1z_1}.$$

Далі, підстановка виразу для контактних перетворень (15) та виразу для похідних функції H у рівняння (12) дає

$$v_{z_1}z_1 + \left(G_{z_1z_1} - \frac{z_2}{\left(1-z_1^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right)\left(G_{z_0} - v_{z_2}\sqrt{1-z_1^2}\right.$$
$$\left. + v_{z_1}\sqrt{1-z_1^2}\right)\left(-\frac{z_1}{\sqrt{1-z_1^2}}\right)$$
$$= \left(G_{z_1z_1} - \frac{z_2}{\left(1-z_1^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right)\left(G_{z_0} - v_{z_2}\sqrt{1-z_1^2}\right) = 0.$$

Враховуючи, що

$$G_{z_1z_1} - \frac{z_2}{\left(1-z_1^2\right)^{\frac{3}{2}}} \neq 0,$$

отримуємо

$$G_{z_0} - v_{z_2}\sqrt{1-z_1^2} = 0,$$

що дає нам вираз для функції v:

$$v = \frac{G_{z_0}z_2}{\sqrt{1-z_1^2}} + P(z_0, z_1), \tag{16}$$

де $P(z_0, z_1)$ — це деяка функція від своїх аргументів, яка має бути знайдена нижче.

З (16) ми обчислюємо вирази для похідних функції v:

$$v_{z_0} = \frac{G_{z_0z_0}z_2}{\sqrt{1-z_1^2}} + P_{z_0}, \quad v_{z_1} = \frac{G_{z_0z_1}z_2}{\sqrt{1-z_1^2}} + \frac{G_{z_0}z_1z_2}{\left(1-z_1^2\right)^{\frac{3}{2}}} + P_{z_1},$$
$$v_{z_2} = \frac{G_{z_0}}{\sqrt{1-z_1^2}}. \tag{17}$$

Підстановка (15), (16), (17) у (12) дає

$$v_{z_1}^2 + (v_{z_2}H_{z_1z_1} - v_{z_1}H_{z_1z_2})^2 = 2H_{z_1z_1}(v_{z_0}H_{z_1z_1} - v_{z_1}H_{z_0z_1}),$$

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{G_{z_0 z_1} z_2}{\sqrt{1-z_1^2}} + \frac{G_{z_0} z_1 z_2}{\left(1-z_1^2\right)^{\frac{3}{2}}} P_{z_1}\right)^2 + \left(\frac{G_{z_0}}{\sqrt{1-z_1^2}} \left(G_{z_1 z_1} - \frac{z_2}{\left(1-z_1^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right)\right.\\
&\qquad \left. + \frac{z_1}{\sqrt{1-z_1^2}} \left(P_{z_1} + \frac{G_{z_0 z_1} z_2}{\sqrt{1-z_1^2}} + \frac{G_{z_0} z_1 z_2}{\left(1-z_1^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right)\right)^2\\
&\quad = 2\left(G_{z_1 z_1} - \frac{z_2}{\left(1-z_1^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right)\\
&\qquad \times \left(\left(G_{z_1 z_1} - \frac{z_2}{\left(1-z_1^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right)\left(\frac{G_{z_0 z_0} z_2}{\sqrt{1-z_1^2}} + P_{z_0}\right)\right.\\
&\qquad \left. - G_{z_0 z_1}\left(\frac{G_{z_0 z_1} z_2}{\sqrt{1-z_1^2}} + \frac{G_{z_0} z_1 z_2}{\left(1-z_1^2\right)^{\frac{3}{2}}} + P_{z_1}\right)\right).
\end{aligned} \tag{18}
$$

Далі ми можемо розкласти ці вирази за степенями змінної z_2. З вимоги рівності нулю суми коефіцієнтів при z_2^3 ми отримуємо умову

$$
-2\frac{G_{z_0 z_0}}{\left(1-z_1^2\right)^{\frac{7}{2}}} = 0, \tag{19}
$$

звідки можна зробити висновок, що $G_{z_0 z_0} = 0$. З вимоги рівності нулю суми коефіцієнтів при z_2^2 ми отримуємо умови

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{G_{z_0 z_1}}{\sqrt{1-z_1^2}} + \frac{G_{z_0} z_1}{\left(1-z_1^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right)^2\\
&\quad + \left(-\frac{G_{z_0}}{\left(1-z_1^2\right)^2} + \frac{G_{z_0 z_1} z_1}{1-z_1^2} + \frac{G_{z_0} z_1^2}{\left(1-z_1^2\right)^2}\right)^2\\
&= -\frac{2}{\left(1-z_1^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(-\frac{P_{z_0}}{\left(1-z_1^2\right)^{\frac{3}{2}}} - G_{z_0 z_1}\left(\frac{G_{z_0 z_1}}{\sqrt{1-z_1^2}} + \frac{G_{z_0} z_1^2}{\left(1-z_1^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right)\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&G_{z_0 z_1}^2\left(1-z_1^2\right)^2 + 2G_{z_0 z_1} G_{z_0} z_1\left(1-z_1^2\right) + G_{z_0}^2 z_1^2\\
&\quad + \left(1-z_1^2\right)\left(z_1^2 G_{z_0 z_1}^2 - 2z_1 G_{z_0 z_1} G_{z_0} + G_{z_0}^2\right)\\
&= 2\left(P_{z_0} + G_{z_0 z_1}^2\left(1-z_1^2\right) + G_{z_0 z_1} G_{z_0} z_1\right),
\end{aligned}
$$

$$(G_{z_0} - z_1 G_{z_0 z_1})^2 = 2P_{z_0} + G^2_{z_0 z_1}. \tag{20}$$

З вимоги рівності нулю суми коефіцієнтів при z_2 ми отримуємо умови

$$\begin{aligned}
&P_{z_1}\left(\frac{G_{z_0 z_1}}{\sqrt{1-z_1^2}} + \frac{G_{z_0} z_1}{\left(1-z_1^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right) + \left(\frac{G_{z_0} G_{z_1 z_1} + z_1 P_{z_1}}{\sqrt{1-z_1^2}}\right)\\
&\qquad \times \left(-\frac{G_{z_0}}{\left(1-z_1^2\right)^2} + \frac{G_{z_0 z_1} z_1}{1-z_1^2} + \frac{G_{z_0} z_1^2}{\left(1-z_1^2\right)^2}\right)\\
&\quad = G_{z_1 z_1}\left(-\frac{P_{z_0} + G_{z_0 z_1} G_{z_0} z_1}{\left(1-z_1^2\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{G^2_{z_0 z_1}}{\sqrt{1-z_1^2}}\right)\\
&\qquad - \frac{P_{z_0} G_{z_1 z_1} - G_{z_0 z_1} P_{z_1}}{\left(1-z_1^2\right)^{\frac{3}{2}}},\\
&P_{z_1}\left(G_{z_0 z_1}\left(1-z_1^2\right) + G_{z_0} z_1\right) + (G_{z_0} G_{z_1 z_1} + z_1 P_{z_1})(G_{z_0 z_1} z_1 - G_{z_0})\\
&\qquad + G_{z_1 z_1} G^2_{z_0 z_1}\left(1-z_1^2\right) + G_{z_1 z_1}(P_{z_0} + G_{z_0 z_1} G_{z_0} z_1) + P_{z_0} G_{z_1 z_1}\\
&\qquad - G_{z_0 z_1} P_{z_1} = 0,\\
&G_{z_1 z_1}(G_{z_0}(G_{z_0 z_1} z_1 - G_{z_0}) + G^2_{z_0 z_1}\left(1-z_1^2\right)\\
&\qquad + 2P_{z_0} + G_{z_0 z_1} G_{z_0} z_1) = 0.
\end{aligned} \tag{21}$$

З умови (21) знаходимо, що

$$G_{z_1 z_1}\left[2P_{z_0} + G^2_{z_0 z_1} - (G_{z_0} - G_{z_0 z_1} z_1)^2\right] = 0. \tag{22}$$

Рівність нулю виразу у квадратних дужках рівняння (22) еквівалентна умові, яка була визначена в результаті збирання коефіцієнтів при z_2^2 (20). Таким чином, з коефіцієнтів при z_2 ми не отримали ніяких нових умов.

З вимоги рівності нулю суми коефіцієнтів при z_2^0 отримуємо

$$\begin{aligned}
&P^2_{z_1} + \frac{(G_{z_0} G_{z_1 z_1} + z_1 P_{z_1})^2}{1-z_1^2} = 2G_{z_1 z_1}(P_{z_0} G_{z_1 z_1} - G_{z_0 z_1} P_{z_1}),\\
&P^2_{z_1}\left(1-z_1^2\right) + \left(G^2_{z_0} G^2_{z_1 z_1} + 2z_1 P_{z_1} G_{z_0} G_{z_1 z_1} + z_1^2 P^2_{z_1}\right)\\
&\quad = 2G_{z_1 z_1}(P_{z_0} G_{z_1 z_1} - G_{z_0 z_1} P_{z_1}) \qquad (23)\\
&\qquad - 2z_1^2\left(P_{z_0} G^2_{z_1 z_1} - G_{z_0 z_1} G_{z_1 z_1} P_{z_1}\right),\\
&P^2_{z_1} + G^2_{z_0} G^2_{z_1 z_1} + 2z_1 P_{z_1} G_{z_0} G_{z_1 z_1}
\end{aligned}$$

$$= 2\big(1 - z_1^2\big)G_{z_1z_1}(P_{z_0}G_{z_1z_1} - P_{z_1}G_{z_0z_1}). \tag{24}$$

З (18) випливає, що $G_{z_0z_0} = 0$, з (20) робимо висновок, що $P_{z_0z_0} = 0$.

Таким чином, шукані функції G та P повинні мати наступну форму

$$G = g(z_1)z_0 + k(z_1), \quad P = p(z_1)z_0 + r(z_1), \tag{25}$$

де g, k, p, r — певні функції від змінної z_1, умови на які будуть знайдені далі.

Після підстановки (25) у (20) ми отримали

$$2p + g'^2 = (g - z_1g')^2. \tag{26}$$

Після підстановки (25) у (24) ми приходимо до рівняння

$$\begin{aligned}&(p'z_0 + r')^2 + g^2(g''z_0 + k'')^2 + 2z_1(p'z_0 + r')g(g''z_0 + k'')\\ &\quad = 2\big(1 - z_1^2\big)(g''z_0 + k'')(p(g''z_0 + k'') - g'(p'z_0 + r')).\end{aligned} \tag{27}$$

Далі ми групуємо коефіцієнти біля степенів z_0. При z_0^2 отримуємо

$$p'^2 + g^2g''^2 + 2z_1p'gg'' = 2\big(1 - z_1^2\big)\big(g''^2p - g''g'p'\big). \tag{28}$$

З рівняння (26) ми можемо знайти вираз для функції p через функцію g:

$$p = \tfrac{1}{2}\big(g^2 - 2z_1gg' + \big(z_1^2 - 1\big)g'^2\big). \tag{29}$$

Звідси

$$p' = g''\big(\big(z_1^2 - 1\big)g' - z_1g\big). \tag{30}$$

Після підстановки виразів для p та p' до (28) ми отримуємо, що

$$\begin{aligned}&g''^2\Big[\big(\big(z_1^2 - 1\big)g' - z_1g\big)^2 + g^2g''^2 + 2z_1g\big(\big(z_1^2 - 1\big)g' - z_1g\big)\\ &\qquad - \big(1 - z_1^2\big)\big(\big(g^2 - 2z_1gg' + \big(z_1^2 - 1\big)g'^2\big)\\ &\qquad - g'\big(\big(z_1^2 - 1\big)g' - z_1g\big)\big)\Big] = 0.\end{aligned} \tag{31}$$

У квадратних дужках рівняння (31) ми маємо тотожний нуль, тому нові умови на функції G та P можна знайти лише з коефіцієнтів при z_0^2.

Групування коефіцієнтів при z_0 дає наступну умову:

$$2p'r' + 2g^2g''k'' + 2z_1g(p'k'' + r'g'') \\ = 2\big(1 - z_1^2\big)(g''(pk'' - r'g') + k''(pg'' - p'g')).$$

Підстановка виразів (29) та (30) для p та p' призводить до виразів

$$2g''\big[(r' + z_1gk'')\big(\big(z_1^2 - 1\big)g' - z_1g\big) + \big(r'z_1g + k''g^2\big)\big] \\ = 2\big(1 - z_1^2\big)g''\big[k''\big(g^2 - 2z_1gg' + \big(z_1^2 - 1\big)g'^2\big) - r'g' \\ - k''g'\big(\big(z_1^2 - 1\big)g' - z_1g\big)\big],$$

які дають тотожну рівність, тобто ми знову не отримуємо нових умов порівняно зі знайденими раніше.

З вимоги рівності нулю суми коефіцієнтів при z_0^0 ми маємо, що

$$r'^2 + g^2k''^2 + 2z_1r'gk'' - 2\big(1 - z_1^2\big)k''(pk'' - g'r') \\ = \big(r' - k''\big(\big(z_1^2 - 1\big)g' - z_1g\big)\big)^2 = 0, \tag{32}$$

та з (32) випливає, що

$$r' = k''\big(\big(z_1^2 - 1\big)g' - z_1g\big),$$

і тоді, якщо $g'' \neq 0$, це буде еквівалентне умові

$$r'g'' - p'k'' = 0.$$

Таким чином, ми знайшли явний вигляд функцій G та P:

$$G = g(z_1)z_0 + k(z_1), \quad P = p(z_1)z_0 + r(z_1), \tag{33}$$

де

$$p = \tfrac{1}{2}\big(g^2 - 2z_1gg' + \big(z_1^2 - 1\big)g'^2\big), \\ r' = k''\big(\big(z_1^2 - 1\big)g' - z_1g\big). \tag{34}$$

3. Застосування обернених контактних перетворень та перетворень годографа. Функція H має вигляд

$$H = z_2\sqrt{1 - z_1^2} + G(z_0, z_1),$$

де $G(z_0, z_1)$ має вигляд (33) з довільними g та k, та

$$v = \frac{G_{z_0} z_2}{\sqrt{1-z_1^2}} + P(z_0, z_1),$$

де $P(z_0, z_1)$ має вигляд (33), де функції p та r знаходяться у відповідності до (34).

Функція w може бути визначена з виразу для H шляхом використання перетворень, обернених до (5) та (6):

$$w = z_1 H_{z_1} - H.$$

Далі ми можемо знову перепозначити z_1 як z, таким чином, ми отримуємо параметричний загальний розв'язок для системи (8), $n = 2$:

$$\begin{aligned}
v &= \frac{G_{z_0} z_2}{\sqrt{1-z^2}} + p(z)z_0 + r(z),\\
w &= y_1 z - y_2\sqrt{1-z^2} - g(z)y_0 - k(z),\\
0 &= y_1 + \frac{y_2 z}{\sqrt{1-z^2}} - g'(z)y_0 - k'(z).
\end{aligned}$$

Застосування перетворень, обернених до (5) та (6), дає можливість знайти параметричний загальний розв'язок для системи пов'язаних рівнянь ейконалу (1) для початкових функцій u та v та $n = 2$:

$$\begin{aligned}
u &= \frac{x_1 + \frac{x_2 z}{\sqrt{1-z^2}} - k'(z)}{g'(z)},\\
v &= \frac{g x_2}{\sqrt{1-z^2}} + \frac{p(z)}{g'(z)}\left[x_1 + \frac{x_2 z}{\sqrt{1-z^2}} - k'(z)\right] + r(z),\\
0 &= x_0 - x_1 z + x_2\sqrt{1-z^2}\\
&\quad + \frac{g(z)}{g'(z)}\left\{x_1 + \frac{x_2 z}{\sqrt{1-z^2}} - k'(z)\right\} - k(z),
\end{aligned}$$

де

$$r' = -k''\bigl(zg + \bigl(1-z^2\bigr)g'\bigr), \quad p = \tfrac{1}{2}\bigl(-g'^2 + (g - zg')^2\bigr),$$

де g та k — довільні функції.

4. Особливі випадки. Ми розглядали знаходження загального параметричного розв'язку системи (1) для $n = 2$ з припущеннями, що $u_0 \neq 0$, $v_0 \neq 0$, $w_{y_0} \neq 0$. Остання умова у відповідності до визначення змінних (5) буде виконуватися завжди і не становитиме спеціального випадку для початкової системи.

У випадку, якщо $u_0 = 0$, перше рівняння системи (1) матиме вигляд $-u_1^2 - u_2^2 = 0$, звідки $u_1 = u_2 = 0$, тобто тоді функція u буде сталою, а відповідний розв'язок системи (1) буде тривіальним.

Ще один особливий випадок

$$z_1 = w_{y_1} = -\frac{u_{x_1}}{u_{x_0}} = \pm 1,$$

тобто $u_{x_1} \pm 1 u_{x_0} = 0$, $u = u(x_0 \pm x_1, x_2)$, і початкова система зводиться до системи з двома незалежними змінними та тривіальними розв'язками.

5. Висновки. У цій статті ми навели огляд процедури, яка дозволяє побудувати загальні розв'язки системи (1) для загального та особливих випадків. Ці результати дозволять, зокрема, описати всі анзаци, які редукують багатовимірне рівняння ейконалу до рівнянь з меншим числом просторових змінних, що дасть можливість узагальнити результати, отримані в роботах [1] та [2].

[1] Fushchych W.I., Serov N.I., The symmetry and some exact solutions of the nonlinear many-dimensional Liouville, d'Alembert and eikonal equation, *J. Phys. A: Math. Gen.* **16** (1983), 3645–3656.

[2] Fushchych W.I., Shtelen W.M., Serov N.I., Symmetry analysis and exact solutions of nonlinear equations of mathematical physics, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1993.

[3] Fushchych W.I., Zhdanov R.Z., Revenko I.V., Compatibility and solution of nonlinear d'Alembert-Hamilton equations, Preprint 90.39, Institute of Mathematics of Acad.Sci. Ukr. SSR, Kyiv, 1990, 65 pp.

[4] Fushchych W.I., Zhdanov R.Z., Revenko I.V., On the general solution of the d'Alembert equation with a nonlinear eikonal constraint and its applications, *J. Math. Phys.* **36** (1995), 7109–7127.

[5] Yehorchenko I.A., Reduction of non-linear d'Alembert equations to two-dimensional equations, in Proceedings of the 4th Workshop "Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems" (October 26–30, 2008, Protaras, Cyprus), University of Cyprus, Nicosia, 2009, 243–253.

[6] Yehorchenko I.A., Ansatzes and exact solutions for nonlinear Schrödinger equations, arXiv:1412.1889.

[7] Yehorchenko I.A., General solution for a coupled system of eikonal equations in two space variables, arXiv:1712.01948.