Збірник праць Інституту математики НАН України 2019, т. 16, № 1, 44–49

УДК 517.958

Точні розв'язки рівнянь Фішера з коефіцієнтами, що залежать від часової змінної

О.О. Ванєєва

Інститут математики НАН України, Київ
E-mail: vaneeva@imath.kiev.ua

Метод еквівалентності, а також метод перетворень між класами диференціальних рівнянь, запропонований у роботі [O. Vaneeva et al. *Acta Appl. Math.* **106** (2009), 1–46], застосовано для побудови точних розв'язків рівнянь Фішера з коефіцієнтами, що залежать від часової змінної.

The equivalence method and the method of mapping between classes of differential equations proposed in [O. Vaneeva et al. *Acta Appl. Math.* **106** (2009), 1–46] are used for construction of exact solutions for Fisher equations with time-dependent coefficients.

Рівняння Фішера,

$$u_t = ku_{xx} + mu(1-u), \quad km \neq 0, \tag{1}$$

запропоноване Р.Е. Фішером у 1937 році [5], є класичною детерміністичною моделлю популяційної генетики, що описує динаміку частоти появи мутантного гену у популяції, який володіє селективною перевагою. Залежна змінна u — частота появи мутантного гену у популяції, що однорідно розташована у лінійному середовищі проживання, наприклад, на береговій лінії, стала m — інтенсивність селекції на перевагу мутантного гену, k — коефіцієнт дифузії. Максимальна алгебра ліївської інваріантності рівняння (1) є двовимірною. Базисними операторами цієї алгебри є оператори зсувів за часовою та просторовою змінною ∂_t та ∂_x, що дозволяє побудувати для цього рівняння розв'язки типу біжучої хвилі. Такі розв'язки було побудовано у роботах [1, 3, 4, 8, 9]. Теореми існування та єдиності обмежених розв'язків більш загального класу рівнянь $u_t = u_{xx} + F(t,x,u)$ доведено А.М. Комогоровим, І.Г. Петровським та М.С. Піскуновим [7].

Пізніше було запропоновано розглянути узагальнену модель вигляду

$$u_t = g(t)u_{xx} + f(t)u(1-u), \quad gf \neq 0, \tag{2}$$

де дифузійний коефіцієнт g і коефіцієнт селективної переваги f залежать від часової змінної [6, 11]. Завдяки таким коефіцієнтам можна взяти до уваги вплив довготермінової зміни клімату або короткострокової сезонності.

Групову класифікацію рівнянь (2) було виконано у роботі [17], однак задача пошуку точних розв'язків таких рівнянь там не розглядалася. У цій роботі для побудови точних розв'язків рівнянь Фішера зі змінними коефіцієнтами застосовано методи, що базуються на використанні невироджених точкових перетворень, а саме метод еквівалентності та метод перетворень між класами диференціальних рівнянь. У результаті побудовано декілька сімей точних розв'язків для певних підкласів класу (2).

Метод еквівалентності. Під методом еквівалентності для побудови точних розв'язків ми розуміємо використання невироджених точкових перетворень з групи еквівалентності заданого класу та точних розв'язків, що є відомими для деяких рівнянь з цього класу. Якщо два рівняння пов'язані між собою невиродженим точковим перетворенням, то, за термінологією Л.В. Овсяннікова, вони називаються подібними [10]. Тоді подібними відносно цього ж перетворення є і відповідні набори точних розв'язків, симетрій, законів збереження цих рівнянь. Для класів зі змінними коефіцієнтами найбільш ефективне використання методу еквівалентності полягає у зведенні певного рівняння зі змінними коефіцієнтами з досліджуваного класу до рівняння зі сталими коефіцієнтами з того ж класу. Наступним кроком є побудова точних розв'язків для першого з цих рівнянь шляхом розмноження відомих розв'язків другого рівняння перетвореннями еквівалентності.

У роботі [17] отримано критерій звідності рівнянь зі змінними коефіцієнтами з класу (2) до рівняння Фішера зі сталими коефіцієнтами (1). Рівняння з класу (2) можна звести до рівняння вигляду (1) тоді і тільки тоді, коли для деякої додатної сталої λ коефіцієнти f і g задовольняють умову

$$\lambda g^2 - 2\frac{g_{tt}}{g} + 3\frac{g_t^2}{g^2} = f^2 - 2\frac{f_{tt}}{f} + 3\frac{f_t^2}{f^2}. \tag{3}$$

Умова (3) виконується тоді і тільки тоді, коли функцію g можна виразити через функцію f за формулою:

$$g(t) = \frac{\lambda\Delta f(t)\mathrm{e}^{\int f(t)\,\mathrm{d}t}}{\left(\alpha\mathrm{e}^{\int f(t)\,\mathrm{d}t} + \beta\right)\left(\gamma\mathrm{e}^{\int f(t)\,\mathrm{d}t} + \delta\right)},$$

де λ — додатна стала, а пари сталих (α, β) і (γ, δ) визначено з точністю до ненульового сталого множника, при цьому $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. Для компактності запису введемо позначення $h(t) = \mathrm{e}^{\int f(t)\,\mathrm{d}t}$.

Отже, клас рівнянь Фішера зі змінними коефіцієнтами вигляду

$$u_t = \frac{\lambda\Delta f(t)h(t)}{(\alpha h(t) + \beta)(\gamma h(t) + \delta)} u_{xx} + f(t)u(1 - u), \tag{4}$$

що є підкласом класу (2), зводиться точковими перетвореннями до класичного рівняння Фішера зі сталими коефіцієнтами,

$$u_t = u_{xx} + u(1 - u). \tag{5}$$

Для того, щоб знайти точкові перетворення, що реалізують подібність рівнянь (4) та (5), знайдемо спочатку групу еквівалентності.

Теорема 1. *Репараметризований клас (2) з новим довільним елементом $h(t)$, що задовольняє рівняння $h_t = fh$, є нормалізованим відносно своєї узагальненої групи еквівалентності $\hat{G}^{\sim}$. Група $\hat{G}^{\sim}$ складається з перетворень*

$$\tilde{t} = T(t), \quad \tilde{x} = \delta_1 x + \delta_2, \quad \tilde{u} = \frac{(\alpha h + \beta)(\gamma h + \delta)}{h\Delta} u - \gamma\frac{\alpha h + \beta}{\Delta},$$

$$\tilde{f} = \frac{h\Delta}{T_t(\alpha h + \beta)(\gamma h + \delta)} f, \quad \tilde{g} = \frac{{\delta_1}^2}{T_t} g, \quad \tilde{h} = \frac{\alpha h + \beta}{\gamma h + \delta},$$

де $T(t)$ — довільна гладка функція, що задовольняє умову $T_t \neq 0$, δ_1 і δ_2 — довільні сталі, причому $\delta_1 \neq 0$, пари сталих (α, β) і (γ, δ) є визначеними з точністю до ненульового сталого множника і $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

Узагальнена група еквівалентності $\hat{G}^{\sim}$ для репараметризованого класу (2), набір довільних елементів якого формально містить функцію $h(t)$, є розширеною узагальненою групою еквівалентності для вихідного класу (2). Означення узагальненої та розширеної узагальненої груп еквівалентності і нормалізованості класу наведено, зокрема, у [13, 14].

З теореми 1 знаходимо перетворення, що відображають рівняння (4) у рівняння (5). Такі перетворення мають вигляд

$$\tilde{t} = \ln\frac{\alpha h(t)+\beta}{\gamma h(t)+\delta} + c_1, \quad \tilde{x} = \frac{x}{\sqrt{\lambda}} + c_2, \tag{6}$$

$$\tilde{u} = \frac{(\alpha h(t)+\beta)(\gamma h(t)+\delta)}{h(t)\Delta}u - \gamma\frac{\alpha h(t)+\beta}{\Delta},$$

де c_1, c_2 — довільні сталі. З допомогою цих перетворень отримуємо розв'язки рівняння (4) з відомих розв'язків класичного рівняння Фішера (5). Побудовано сім'ю точних розв'язків рівнянь (4):

$$u = \frac{h\Delta\exp\left(\frac{5}{3}\tilde{t} + \frac{\sqrt{6}}{3}\tilde{x}\right)\wp\left(\exp\left(\frac{5}{6}\tilde{t} + \frac{\sqrt{6}}{6}\tilde{x}\right) + \tilde{C}, 0, \hat{C}\right)}{(\alpha h+\beta)(\gamma h+\delta)} + \frac{\gamma h}{\gamma h+\delta},$$

частинний випадком якої в елементарних функціях є

$$u = \frac{h\Delta}{(\alpha h+\beta)(\gamma h+\delta)}\frac{1}{\left(C\exp\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\tilde{x} - \frac{5}{6}\tilde{t}\right) \pm 1\right)^2} + \frac{\gamma h}{\gamma h+\delta}.$$

В отриманих розв'язках $\tilde{t}$ та $\tilde{x}$ визначено у (6), $\wp(z, k_1, k_2)$ — еліптична функція Вейєрштраса, c_1, c_2, C, $\tilde{C}$, $\hat{C}$ — довільні сталі, $C \neq 0$.

Оскільки рівняння Фішера допускають дискретне перетворення симетрії $x \mapsto -x$, всі отримані розв'язки з протилежними знаками x також задовольняють рівняння (4). Ще одне перетворення симетрії $u \mapsto 1-u$ також дозволяє додатково розмножити знайдені розв'язки.

Метод перетворень між класами диференціальних рівнянь. Окрім перетворень еквівалентності, що не змінюють структуру класу диференціальних рівнянь, а лише переводять одне рівняння з класу в інше рівняння з цього ж класу, можливо також розглянути невироджені точкові перетворення між класами диференціальних рівнянь. Цей метод було запропоновано у роботі [16] для виконання групової класифікації квазілінійних рівнянь реакції-дифузії зі змінними коефіцієнтами та степеневою нелінійністю. Пізніше цим методом було досліджено з симетрійної точки зору й інші класи рівнянь (див., [15], а також [18] та наведені там посилання). У цій роботі метод перетворень між класами диференціальних рівнянь застосовано для побудови точних розв'язків.

Доведено, що сім'я точкових перетворень, параметризованих довільним елементом $f(t)$ класу (2),

$$\tilde{t} = \int f(t)\mathrm{e}^{\int f(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}t, \quad \tilde{x} = x, \quad \tilde{u} = -\mathrm{e}^{-\int f(t)\mathrm{d}t}u, \tag{7}$$

відображає клас (2) у клас квазілінійних рівнянь реакції–дифузії з квадратичною нелінійністю та одним довільним елементом, що залежить від змінної часу:

$$\tilde{u}_{\tilde{t}} = \tilde{g}(\tilde{t})\tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}} + \tilde{u}^2, \quad \tilde{g} \neq 0. \tag{8}$$

Довільні елементи класів (2) та (8) пов'язані формулою

$$\tilde{g} = \frac{g(t)}{f(t)}\mathrm{e}^{-\int f(t)\mathrm{d}t}.$$

Для рівняння $u_t = u_{xx} + u^2$ відомі декілька точних розв'язків (див. [2, 9] та [12, с. 157]). Використовуючи їх та перетворення (7), знаходимо нові точні розв'язки рівняння Фішера зі змінними коефіцієнтами

$$u_t = f(t)\mathrm{e}^{\int f(t)\mathrm{d}t}u_{xx} + f(t)u(1-u)\colon$$

$$u = \frac{12\big(4\pm\sqrt{6}\big)x(x+c_1) + 120(12\pm 5\sqrt{6})\Theta + 12\big(2\pm\sqrt{6}\big)c_2 + 6c_1^2}{\mathrm{e}^{-\int f(t)\mathrm{d}t}\big(x^2 + c_1x + 10(3\pm\sqrt{6})\Theta + c_2\big)^2},$$

$$u = \mathrm{e}^{\int f(t)\mathrm{d}t}\wp\left(\frac{x}{\sqrt{6}}, 0, \hat{C}\right),$$

де $\Theta = \int f(t)\mathrm{e}^{\int f(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$, c_1, c_2, $\hat{C}$ — довільні сталі.

Авторка вдячна професору Р.О. Поповичу за цінні поради.

[1] Ablowitz M.J., Zeppetella A., Explicit solutions of Fisher's equation for a special wave speed, *Bull. Math. Biology* **41** (1979), 835–840.

[2] Barannyk T., Symmetry and exact solutions for systems of nonlinear reaction–diffusion equations, in *Proceedings of Fourth International Conference "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics" (9–15 July, 2001, Kyiv)*, *Proceedings of Institute of Mathematics* **43** (2002), Part 1, 184–193.

[3] Cariello F., Tabor M., Similarity reductions from extended Painlevé expansions for nonintegrable evolution equations, *Phys. D* **53** (1991), 59–70.

[4] Danilov V.G., Subochev P.Yu., Wave solutions of semilinear parabolic equations, *Theoret. and Math. Phys.* **89** (1991), 1029–1046.

[5] Fisher R.A., The wave of advance of advantageous genes, *Ann. Eugenics* **7** (1937), 353–369.

[6] Hammond J.F., Bortz D.M., Analytical solutions to Fisher's equation with time-variable coefficients, *Appl. Math. Comput.* **218** (2011), 2497–2508.

[7] Колмогоров А. Н., Петровский И. Г., Пискунов Н. С., Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием вещества, и его применение к одной биологической проблеме, *Бюллетень МГУ Сер. А мат. мех.*, **1** (1937), no. 6, 1–26.

[8] Kudryashov N.A., Exact solutions of a family of Fisher equations, *Theoret. and Math. Phys.* **94** (1993), 211–218.

[9] Nikitin A.G., Barannyk T.A., Solitary wave and other solutions for nonlinear heat equations, *Cent. Eur. J. Math.* **2** (2005), 840–858, arXiv:math-ph/0303004.

[10] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений, Москва, Наука, 1978.

[11] Öğün A., Kart C., Exact solutions of Fisher and generalized Fisher equations with variable coefficients, *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)* **23** (2007), 563–568.

[12] Polyanin A.D., Zaitsev V.F., Handbook of nonlinear partial differential equations, 2nd ed., Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2012.

[13] Popovych R.O., Bihlo A., Symmetry preserving parameterization schemes, *J. Math. Phys.* **53** (2012), 073102, 36 pp., arXiv:1010.3010.

[14] Popovych R.O., Kunzinger M., Eshraghi H., Admissible transformations and normalized classes of nonlinear Schrödinger equations, *Acta Appl. Math.* **109** (2010), 315–359, arXiv:math-ph/0611061.

[15] Vaneeva O.O., Group classification via mapping between classes: an example of semilinear reaction-diffusion equations with exponential nonlinearity, in Proc. of the 5th Math. Phys. Meeting: Summer School and Conf. on Modern Mathematical Physics (Belgrade, Serbia, 2008), Belgrade, 2009, 463–471, arXiv:0811.2587.

[16] Vaneeva O.O., Popovych R.O., Sophocleous C., Enhanced group analysis and exact solutions of variable coefficient semilinear diffusion equations with a power source, *Acta Appl. Math.* **106** (2009), 1–46, arXiv:0708.3457.

[17] Vaneeva O.O., Popovych R.O., Sophocleous C., Group classification of the Fisher equation with time-dependent coefficients, in Proceedings of 6th International Workshop "Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems" (Protaras, Cyprus, June 17–21, 2012), University of Cyprus, Nicosia, 2013, 225–237.

[18] Vaneeva O.O., Pošta S., Sophocleous C., Enhanced group classification of Benjamin–Bona–Mahony–Burgers equations, *Appl. Math. Lett.* **65** (2017), 19–25.