Збірник праць Інституту математики НАН України 2019, т. 16, № 1, 6–15

УДК 517.912:512.816

Точні розв'язки нелінійного рівняння теплопровідності $u_t = (F(u)u_x)_x + H(u)$

А.Ф. Баранник †, ***Т.А. Баранник*** ‡, ***І.І. Юрик*** §

† *Поморська академія, Слупськ, Польща*

‡ *Полтавський національний педагогічний університет імені В.Г. Короленка*

§ *Національний університет харчових технологій, Київ*
E-mail: i.yu@ukr.net

Запропоновано метод побудови точних розв'язків нелінійного рівняння теплопровідності $u_t = (F(u)u_x)_x + H(u)$, який ґрунтується на використанні підстановки $p(x) = w_1(t)\varphi(u)$, де функція $p(x)$ є розв'язком одного з рівнянь $(p')^2 = Ap^2 + B$, $(p')^2 = Ap^4 + Bp^2 + C$, а функції $w_1(t)$ і $\varphi(u)$ знаходяться з умови, що ця підстановка редукує рівняння до звичайного диференціального рівняння з невідомою функцією $w_1(t)$.

A method for construction of exact solutions to nonlinear heat equation $u_t = (F(u)u_x)_x + H(u)$ which is based on ansätz $p(x) = w_1(t)\varphi(u)$ is proposed. Here the function $p(x)$ is a solution to one of the equations $(p')^2 = Ap^2 + B$, $(p')^2 = Ap^4 + Bp^2 + C$, and the functions $w_1(t)$ and $\varphi(u)$ can be found from the condition that this ansatz reduces the equation to an ordinary differential equation with unknown function $w_1(t)$.

1. Вступ. Робота присвячена побудові точних розв'язків нелінійного рівняння теплопровідності

$$u_t = (F(u)u_x)_x + H(u), \tag{1}$$

яке описує нестаціонарну теплопровідність в нерухомому середовищі, якщо коефіцієнт теплопровідності і швидкість реакції є довільними функціями температури. Групова класифікація рівнянь цього виду, а також точні розв'язки для різних функцій $F(u)$ і $H(u)$ описано в роботах (див. [1, 2, 3] і цитовану там літературу).

У цій статті ми використовуємо метод побудови точних розв'язків рівняння (1), який ґрунтується на класичному методі відокремлення змінних та його узагальненні, а також методі редукції, що лежить в основі симетрійного методу С. Лі. Для побудови точних розв'язків рівняння (1) застосовується підстановка

$$p(x) = w_1(t)\varphi(u), \tag{2}$$

яка містить дві невідомі функції $w_1(t)$ і $\varphi(u)$, а також функцію $p(x)$, яка задається апріорно. Детально розглядаються випадки, коли $p(x)$ є розв'язком одного з таких рівнянь:

$$(p')^2 = Ap^2 + B,$$
$$(p')^2 = Ap^4 + Bp^2 + C,$$

де A, B, C — сталі. При такому виборі функції $p(x)$ невідомі функції $w_1(t)$ і $\varphi(u)$ визначаються з умови, що підстановка (2) редукує рівняння (1) до звичайного диференціального рівняння з невідомою функцією $w_1(t)$.

Відмітимо, що такий підхід був використаний для побудови точних розв'язків рівняння типу Кортевега–де Фріза в [4, 5] і нелінійного рівняння

$$u_{tt} = F(u)u_{xx} + F'(u)u_x^2.$$

2. Розв'язки рівняння (1), що виражаються через тригонометричні функції. Введемо означення

Означення 1. Будемо говорити, що рівняння (1) допускає підстановку (2), якщо вона редукує рівняння (1) до звичайного диференціального рівняння на функцію $\omega_1(t)$.

Для побудови точних розв'язків рівняння (1) використовується підстановка

$$p(x) = w_1(t)\varphi(u), \tag{3}$$

де $p(x)$ є розв'язком рівняння

$$(p')^2 = Ap^2 + B, \quad A \neq 0, \quad B \neq 0.$$

Підставимо (3) в рівняння (1):

$$-\frac{w_1'}{w_1}\frac{\varphi}{\varphi'} = \frac{1}{w_1^2}\left(-FB\frac{\varphi''}{(\varphi')^3} + F'B\frac{1}{(\varphi')^2}\right) + \left(-FA\frac{\varphi^2\varphi''}{(\varphi')^3} + F'A\frac{\varphi^2}{(\varphi')^2} + FA\frac{\varphi}{\varphi'} + H\right). \tag{4}$$

Для визначення функцій $F(u)$ і $\varphi(u)$ отримаємо таку систему рівнянь:

$$-F\frac{\varphi''}{(\varphi')^3} + F'\frac{1}{(\varphi')^2} = \lambda_1\frac{\varphi}{\varphi'}, \tag{5}$$

$$-FA\frac{\varphi^2\varphi''}{(\varphi')^3} + F'A\frac{\varphi^2}{(\varphi')^2} + FA\frac{\varphi}{\varphi'} + H = \lambda_2\frac{\varphi}{\varphi'}, \tag{6}$$

де $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Нехай $F'(u) \neq 0$. Інтегруючи рівняння (5), яке є лінійним відносно функції $F = F(u)$, знаходимо

$$F = \left(\lambda_1 \int \varphi du + C_1\right)\varphi, \tag{7}$$

де тут і далі $C, C_1, C_2, \ldots$ — довільні сталі інтегрування. Підставивши (5), (6) в рівняння (4), отримуємо рівняння для визначення функції $w_1(t)$:

$$\frac{w_1'}{w_1} + \lambda_1 B\frac{1}{w_1^2} + \lambda_2 = 0. \tag{8}$$

З рівнянь (5), (6) знаходимо

$$H = \frac{1}{\varphi'}(-\lambda_1 A\varphi^3 - AF\varphi + \lambda_2\varphi). \tag{9}$$

У підсумку отримаємо таку теорему:

Теорема 1. *Якщо рівняння* (1) *допускає підстановку вигляду* (3) *і* $F'(u) \neq 0$, *то функції* $F(u)$ *і* $H(u)$ *визначаються формулами* (7) *і* (9) *відповідно, а функція* $w_1(t)$ *є розв'язком рівняння* (8).

Отримані розв'язки рівняння (1) можна узагальнити, використовуючи підстановки:

$$\varphi(u) = w_1(t)\,\mathrm{ch}(k\,(x + C_3)) + w_2(t)\,\mathrm{sh}(k\,(x + C_3)), \tag{10}$$

якщо $A = k^2 > 0$,

$$\varphi(u) = w_1(t)\cos(k\,(x + C_3)) + w_2(t)\sin(k\,(x + C_3)), \tag{11}$$

якщо $A = -k^2 < 0$.

Розглянемо, наприклад, підстановку (10). Якщо функції $F(u)$ і $H(u)$ визначаються за формулами (7) і (9) відповідно і $A = k^2 > 0$, то підстановка (10) редукує рівняння (1) до системи

$$w_1' = \left(-\lambda_1 k^2 w_1^2 + \lambda_1 k^2 w_2^2\right) w_1 + \lambda_2 w_1, \tag{12}$$

$$w_2' = \left(-\lambda_1 k^2 w_1^2 + \lambda_1 k^2 w_2^2\right) w_2 + \lambda_2 w_2. \tag{13}$$

Нехай $w_1 \neq 0$. З рівнянь (12), (13) випливає, що $w_2 = C w_1$. Рівняння (12) набуває вигляду

$$w_1' = \lambda_1 k^2 \left(C^2 - 1\right) w_1^3 + \lambda_2 w_1. \tag{14}$$

Якщо $\lambda_2 \neq 0$, то розв'язком рівняння (14) є функція

$$w_1^2 = \left(\frac{C_2}{\lambda_2}\exp(-2\lambda_2 t) - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} k^2 \left(C^2 - 1\right)\right)^{-1},$$

де $C_2 \neq 0$. Маємо такий розв'язок рівняння (1):

$$\varphi(u) = \pm\left(\frac{C_2}{\lambda_2}\exp(-2\lambda_2 t) - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} k^2 \left(C^2 - 1\right)\right)^{-1/2} \times [\operatorname{ch}(k\,(x + C_3)) + w_2(t)\operatorname{sh}(k\,(x + C_3))].$$

Якщо $\lambda_2 = 0$, то розв'язком рівняння (14) є функція

$$w_1^2 = [-2\lambda_1 k^2 \left(C^2 - 1\right) t + C_2]^{-1}, \quad \lambda_2 \neq 0.$$

У підсумку отримуємо такий розв'язок рівняння (1):

$$\varphi(u) = [-2\lambda_1 k^2 \left(C^2 - 1\right) t + C_2]^{-1/2} \times [\operatorname{ch}(k(x + C_3)) + w_2(t)\operatorname{sh}(k(x + C_3))].$$

Випадок $w_1 = 0$ зводиться до інтегрування рівняння

$$w_2' = \lambda_1 k^2 w_2^3 + \lambda_2 w_2.$$

Отже, якщо $\lambda_2 \neq 0$, то маємо такий розв'язок рівняння (1):

$$\varphi(u) = \left(\frac{C_2}{\lambda_2}\exp(-2\lambda_2 t) - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}k^2\right)^{-1/2} \operatorname{sh}(k(x + C_3)),$$

де $C_2 \neq 0$, а у випадку $\lambda_2 = 0$ — розв'язок

$$\varphi(u) = \left(-2\lambda_1 k^2 \left(C^2 - 1\right) t + C_2\right)^{-1/2} \operatorname{sh}(k\,(x + C_3)).$$

Аналогічно, підстановка (11) редукує рівняння (1) до системи

$$w_1' = (\lambda_1^2 k^2 w_1^2 + \lambda_1^2 k^2 w_2^2) w_1 + \lambda_2 w_1, \tag{15}$$
$$w_2' = (\lambda_1^2 k^2 w_1^2 + \lambda_1^2 k^2 w_2^2) w_2 + \lambda_2 w_2. \tag{16}$$

Проінтегрувавши (15), (16), отримуємо такі розв'язки рівняння (1):

$$\varphi(u) = \left(\frac{C_2}{\lambda_2}\exp(-2\lambda_2 t) - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}k^2\left(1 + C^2\right)\right)^{-1/2} \times [\cos(k\,(x + C_3)) + C\sin(k\,(x + C_3))],$$

де $C_2 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$;

$$\varphi(u) = (-2\lambda_1 k^2 \left(C^2 + 1\right) t + C_2)^{-1/2} \times [\cos(k(x + C_3)) + C\sin(k(x + C_3))],\ \ \lambda_1 \neq 0,$$

де $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$;

$$\varphi(u) = \left(\frac{C_2}{\lambda_2}\exp(-2\lambda_2 t) - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}k^2\right)^{-1/2} \sin(k\,(x + C_3)),$$

де $C_2 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$;

$$\varphi(u) = (-2\lambda_1 k^2 t + C_2)^{-1/2} \sin(k(x + C_3)),$$

де $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$.

3. Розв'язки рівняння (1), що виражаються через еліптичні функції Якобі. Опишемо рівняння виду (1) і їх точні розв'язки, які допускають підстановку

$$p(x) = w_1(t)\varphi(u), \tag{17}$$

де $p(x)$ є розв'язком рівняння

$$(p')^2 = Ap^4 + Bp^2 + C, \quad A \neq 0, \quad C \neq 0. \tag{18}$$

Підставивши в рівняння (1), отримуємо

$$\begin{aligned} -\frac{w_1'}{w_1}\frac{\varphi}{\varphi'} = w_1^2 \left(2AF\frac{\varphi^3}{\varphi'} - AF\frac{\varphi^4\varphi''}{(\varphi')^3} + AF'\frac{\varphi^4}{(\varphi')^2}\right) \\ + \frac{1}{w_1^2}\left(-CF\frac{\varphi''}{(\varphi')^3} + CF'\frac{1}{(\varphi')^2}\right) \\ + \left(-BF\frac{\varphi^2\varphi''}{\varphi'^3} + BF'\frac{\varphi^2}{\varphi'^2} + BF\frac{\varphi}{\varphi'} + H(u)\right). \end{aligned} \tag{19}$$

З рівняння (19) отримуємо систему

$$-F\frac{\varphi''}{(\varphi')^3} + F'\frac{1}{(\varphi')^2} = \lambda_1\frac{\varphi}{\varphi'}, \tag{20}$$

$$2AF\frac{\varphi^3}{\varphi'} + A\varphi^4\left(-F\frac{\varphi''}{\varphi'^3} + F'\frac{1}{(\varphi')^2}\right) = \lambda_2\frac{\varphi}{\varphi'}, \tag{21}$$

$$-BF\frac{\varphi^2\varphi''}{(\varphi')^3} + BF'\frac{\varphi^2}{(\varphi')^2} + BF\frac{\varphi}{\varphi'} + H(u) = \lambda_3\frac{\varphi}{\varphi'}, \tag{22}$$

де $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$. Підставивши (20) в (21), знаходимо

$$F = \frac{\lambda_2}{2A}\frac{1}{\varphi^2} - \frac{\lambda_1}{2}\varphi^2. \tag{23}$$

З рівняння (22)

$$H = -B\varphi^2\left(-F\frac{\varphi''}{\varphi'^3} + F'\frac{1}{(\varphi')^2}\right) - BF\frac{\varphi}{\varphi'} + \lambda_3\frac{\varphi}{\varphi'},$$

а тому на підставі (20) і (23):

$$H(u) = -\frac{\lambda_1 B}{2}\frac{\varphi^3}{\varphi'} + \lambda_3\frac{\varphi}{\varphi'} - \frac{\lambda_2 B}{2A}\frac{1}{\varphi\varphi'}. \tag{24}$$

Підставивши (23) в (20), знаходимо рівняння для визначення функції $\varphi = \varphi(u)$:

$$\varphi'' = \left(\frac{\lambda_2}{A} + 2\lambda_1\varphi^4\right)\left(\frac{\lambda_1}{2}\varphi^5 - \frac{\lambda_2}{2A}\varphi\right)^{-1}(\varphi')^2. \tag{25}$$

Підставивши (20)–(22) в (19), отримуємо рівняння для визначення функції $w_1 = w_1(t)$:

$$\frac{w_1'}{w_1} + \lambda_2 w_1^2 + \frac{\lambda_1 C}{w_1^2} + \lambda_3 = 0. \tag{26}$$

У підсумку отримаємо таку теорему:

Теорема 2. *Якщо рівняння* (1) *допускає підстановку* (17), *то функції* $F(u)$ *і* $H(u)$ *визначаються формулами* (23) *і* (24) *відповідно, а функції* φ *та* $w_1(t)$ *є розв'язками звичайних диференціальних рівнянь* (25) *та* (26).

Таким чином, побудову точних розв'язків виду (17) рівняння (1) зведено до інтегрування рівнянь (25), (26).

Розглянемо два випадки.

I) Випадок $\boldsymbol{\lambda_2 = 0}$. Рівняння (25) набуває вигляду

$$\varphi'' = \frac{4}{\varphi}(\varphi')^2. \tag{27}$$

Інтегруючи рівняння (27), знаходимо

$$\varphi = (C_1 u + C_2)^{-1/3},$$

$C_1 \neq 0$, і на підставі (23), (25)

$$F = -\frac{\lambda_1}{2}(C_1 u + C_2)^{-2/3},$$
$$H = \frac{3\lambda_1 B}{2C_1}(C_1 u + C_2)^{1/3} - \frac{3\lambda_3}{C_1}(C_1 u + C_2).$$

Рівняння (1) набуває вигляду

$$u_t = \left(-\frac{\lambda_1}{2}(C_1 u + C_2)^{-2/3} u_x\right)_x + \frac{3\lambda_1 B}{2C_1}(C_1 u + C_2)^{1/3} - \frac{3\lambda_3}{C_1}(C_1 u + C_2), \tag{28}$$

і підстановкою

$$v = \varphi(u) = (C_1 u + C_2)^{-1/3}$$

зводиться до виду

$$v_t = -\frac{\lambda_1}{2} v^2 v_{xx} + \lambda_1 v (v_x)^2 - \frac{\lambda_1}{2} B v^3 + \lambda_3 v. \tag{29}$$

Інтегруючи рівняння (26) у випадку $\lambda_2 = 0$, знаходимо

$$w_1^2 = C_3 \exp(-2\lambda_3 t) - \frac{\lambda_1}{\lambda_3} C, \quad C_3 \neq 0, \quad \text{якщо } \lambda_3 \neq 0,$$
$$w_1^2 = -2\lambda_1 C t + C_3, \quad \text{якщо } \lambda_3 = 0.$$

У підсумку отримуємо такі розв'язки рівнянь (28), (29):

а) Якщо $A = k^2$, $B = -\left(1 + k^2\right)$, $C = 1$, то

$$v = \varphi(u) = \left(C_3 \exp(-2\lambda_3 t) - \frac{\lambda_1}{\lambda_3} \right)^{-1/2} \operatorname{sn}(x; k), \ \lambda_3 \neq 0,$$
$$v = \varphi(u) = (-2\lambda_1 t + C_3)^{-1/2} \operatorname{sn}(x; k), \ \lambda_3 = 0.$$

б) Якщо $A = -k^2$, $B = 2k^2 - 1$, $C = 1 - k^2$, то

$$v = \varphi(u) = \left(C_3 \exp(-2\lambda_3 t) - (1 - k^2) \frac{\lambda_1}{\lambda_3} \right)^{-1/2} \operatorname{cn}(x; k), \ \lambda_3 \neq 0,$$
$$v = \varphi(u) = \left(-2\lambda_1 \left(1 - k^2\right) t + C_3 \right)^{-1/2} \operatorname{cn}(x; k), \ \lambda_3 = 0.$$

в) Якщо $A = -1$, $B = 2 - k^2$, $C = -1 + k^2$, то

$$v = \varphi(u) = \left(C_3 \exp(-2\lambda_3 t) - (-1 + k^2) \frac{\lambda_1}{\lambda_3} \right)^{-1/2} \operatorname{dn}(x; k), \ \lambda_3 \neq 0,$$
$$v = \varphi(u) = \left(-2\lambda_1 (-1 + k^2) t + C_3 \right)^{-1/2} \operatorname{dn}(x; k), \ \lambda_3 = 0.$$

II) Випадок $\boldsymbol{\lambda_1 = 0}$. Рівняння (25) набуває вигляду

$$\varphi'' = -\frac{2}{\varphi} (\varphi')^2. \tag{30}$$

Інтегруючи рівняння (30), знаходимо

$$\varphi = (C_1 u + C_2)^{1/3},$$

де $C_1 \neq 0$, і на підставі (23), (25)

$$F = \frac{\lambda_2}{2A} (C_1 u + C_2)^{-2/3},$$

$$H=\frac{3\lambda_3}{2A}(C_1u+C_2)-\frac{3\lambda_2 B}{2AC_1}(C_1u+C_2)^{1/3}.$$

Рівняння (1) набуває вигляду

$$u_t=\left(\frac{\lambda_2}{2A}(C_1u+C_2)^{-2/3}u_x\right)_x+\frac{3\lambda_3}{C_1}(C_1u+C_2)$$
$$-\frac{3\lambda_2 B}{2AC_1}(C_1u+C_2)^{1/3}, \qquad (31)$$

і підстановкою

$$v=\varphi(u)=(C_1u+C_2)^{1/3}$$

зводиться до виду

$$v_t=\frac{\lambda_2}{2A}v^{-2}v_{xx}+\lambda_3 v-\frac{\lambda_2 B}{2A}\frac{1}{v}. \qquad (32)$$

Підставивши (20)–(22) в (19), отримуємо рівняння для визначення функції $w_1=w_1(u)$:

$$\frac{w_1'}{w_1}+\lambda_2 w_1^2+\lambda_3=0. \qquad (33)$$

Інтегруючи рівняння (33), знаходимо

$$w_1^{-2}=C_3\exp(2\lambda_3 t)-\frac{\lambda_2}{\lambda_3},\ C_3\neq 0, \text{якщо } \lambda_3\neq 0;$$
$$w_1^{-2}=2\lambda_2 t+C_3, \text{якщо } \lambda_3=0.$$

У підсумку отримуємо такі розв'язки рівнянь (31), (32):

а) Якщо $A=k^2$, $B=-\left(1+k^2\right)$, $C=1$, то рівняння (32) має вигляд

$$v_t=\frac{\lambda_2}{2k^2}v^{-2}v_{xx}+\lambda_3 v+\frac{\lambda_2\left(1+k^2\right)}{2k^2}\frac{1}{v}. \qquad (34)$$

Розв'язки рівняння (34):

$$v=\left(C_3\exp(2\lambda_3 t)-\frac{\lambda_2}{\lambda_3}\right)^{1/2}\operatorname{sn}(x;k),\ \text{якщо } \lambda_3\neq 0;$$

$$v = (2\lambda_2 t + C_3)^{1/2}\,\mathrm{sn}(x;k), \text{ якщо } \lambda_3 = 0.$$

б) Якщо $A = -k^2$, $B = 2k^2 - 1$, $C = 1 - k^2$, то рівняння (32) має вигляд

$$v_t = -\frac{\lambda_2}{2k^2} v^{-2} v_{xx} + \lambda_3 v + \frac{\lambda_2(2k^2-1)}{2k^2}\frac{1}{v}. \tag{35}$$

Розв'язки рівняння (35):

$$v = \left(C_3 \exp(2\lambda_3 t) - \frac{\lambda_2}{\lambda_3}\right)^{1/2} \mathrm{cn}(x;k), \text{ якщо } \lambda_3 \neq 0;$$
$$v = (2\lambda_2 t + C_3)^{1/2}\,\mathrm{cn}(x;k), \text{ якщо } \lambda_3 = 0.$$

в) Якщо $A = -1$, $B = 2 - k^2$, $C = -1 + k^2$, то рівняння (32) має вигляд

$$v_t = -\frac{\lambda_2}{2} v^{-2} v_{xx} + \lambda_3 v + \frac{\lambda_2(2-k^2)}{2}\frac{1}{v}. \tag{36}$$

Розв'язки рівняння (36):

$$v = \left(C_3 \exp(2\lambda_3 t) - \frac{\lambda_2}{\lambda_3}\right)^{1/2} \mathrm{dn}(x;k), \text{ якщо } \lambda_3 \neq 0;$$
$$v = (2\lambda_2 t + C_3)^{1/2}\,\mathrm{dn}(x;k), \text{ якщо } \lambda_3 = 0.$$

[1] Polyanin A.D., Zaitsev V.F., Handbook of nonlinear partial differential equations, *Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL*, 2004.

[2] Galaktionov V.A., Svirshchevskii S.R., Exact solutions and invariant subspaces of nonlinear partial differential equations in mechanics and physics, *Chapman & Hall/CRC Applied Mathematics and Nonlinear Science Series, Boca Raton, FL*, 2007.

[3] Nikitin A.G., Barannyk T.A., Solitary wave and other solutions for nonlinear heat equations. *Cent. Eur. J. Math.* **2** (2004), no. 5, 840–858.

[4] Barannyk A.F., Barannyk T.A., Yuryk I.I., Separation of variables for nonlinear equations of hyperbolic and Korteweg–de Vries type, *Rep. Math. Phys.* **68** (2011), no. 1, 92–105.

[5] Barannyk A.F., Barannyk T.A., Yuryk I.I., Generalized separation of variables for nonlinear equation $u_{tt} = F(u)u_{xx} + aF'(u)u_x^2$, *Rep. Math. Phys.* **71** (2013), no. 1, 1–13.