

Анализ резонансных колебаний жидкости в срезанных конических баках *

А. В. Солодун

*Институт математики НАН Украины, Киев;
solodun@imath.kiev.ua*

Nonlinear resonant sloshing of an ideal incompressible liquid in a rigid truncated conical tank due to a horizontal harmonic excitation is studied. The excitation frequency is close to the lowest natural liquid frequency. Using an asymptotic modal system with Moiseev-Narimanov detuning [9], the steady-state resonance sloshing is analysed. An asymptotic periodic solution describing the so-called planar and swirling waves is derived. Utilising the method of slowly varying amplitudes makes it possible to study the solution stability. Hydrodynamic loads are estimated. The results are compared with experimental data.

Вивчаються нелінійні резонансні коливання ідеальної нестисливої рідини в жорсткому зрізаному конічному баку, що перебуває під дією горизонтальних гармонічних збурень з частотою, близькою до основної власної частоти коливань рідини. За допомогою асимптотичної модальної системи з настройками Моїсєєва-Наріманова [9] проаналізовано усталені резонансні рухи рідини. Побудовано асимптотичні періодичні за часом розв'язки, що описують плоскі та кругові хвилі. Використовуючи метод повільно змінних амплітуд, досліджено стійкість періодичних розв'язків системи. Оцінено силовий вплив рідини на стінки баку та проведено порівняння з експериментом.

* Работа выполнена при частичной поддержке НИР № 0112U001015.

1. Введение

Наличие жидкости со свободной поверхностью в инженерных конструкциях может приводить к возникновению целого комплекса проблем, в первую очередь связанных с их безопасной эксплуатацией. Основной среди них является проблема силового взаимодействия между стенками бака и жидкостью. Исследования динамического поведения конструкций при воздействии на них различных внешних возмущающих факторов (вибрационного, сейсмического, ветрового и прочего происхождения) диктуется необходимостью их надежного функционирования.

В последнее время мультимодальный метод стал, пожалуй, самым широко применимым аналитически-ориентированным методом, используемым для описания нелинейных колебаний жидкости в подвижных баках. Он обладает рядом существенных преимуществ, таких, как аналитичность, робастность, численная эффективность (можно рассчитать плескания жидкости в реальном времени с учетом сложных переходных процессов).

При теоретических предположениях, что потенциальные течения идеальной несжимаемой жидкости безвихревые и нет опрокидывания гребня волны, мультимодальные методы обеспечивают подходящее с инженерной точки зрения приближения основных “интегральных” гидродинамических характеристик, включая результирующие силы и моменты. Кроме того, рассмотрение нелинейных модальных уравнений и их решений позволяет получить представление о поведении жидкости, например, анализируя передачу энергии между модами колебаний, бифуркации областей стационарных решений. Мультимодальные методы позволяют изучать всевозможные сценарии возмущений гидродинамически неустойчивых режимов плесканий жидкости без больших вычислительных затрат. Асимптотические модальные уравнения помогают избежать физически нереалистичных поведений решений, описывающих колебания жидкости при учете высших гармоник, которые могут давать заметный вклад в отклик жидкости.

Благодаря теоретическим трудам Нариманова, Моисеева, Рабиновича, Луковского, Майлса, Тимохи [1, 3, 7–9, 14, 20], а также многих других, нелинейный модальный метод был хорошо развит для задач о колебаниях жидкости. Соответствующие модальные системы можно относительно легко импортировать в общие уравнения динамики

конструкции за счет модальных формул Луковского для результирующих гидродинамических сил и моментов.

Поначалу основное внимание было уделено вертикальным цилиндрическим резервуарам кругового поперечного сечения, для которых существуют точные аналитические решения базовых спектральных задач колебаний. Однако в случае резервуаров с невертикальными стенками нужны были иные аналитические решения, такие, которые бы точно удовлетворяли базовые спектральные задачи на этих стенках. Используя технику неконформных отображений Луковского (см. [2]), были построены такие решения для баков с невертикальными стенками (коническими, усеченными коническими, сферическими) [6, 11, 15, 16, 18]. Основы мультимодальных методов изложены в работах [3, 14, 19] и, в некоторых деталях, для прямоугольных [13], конических [2, 6, 18], срезанных конических [17] и сферических баков [15].

В работе [9] впервые было построено нелинейную асимптотическую модальную систему для срезанного конического бака кругового сечения, которая базируется на асимптотике Моисеева-Нариманова и связывает, кроме двух доминантных форм, все теоретически необходимые (бесконечный набор) собственные формы второго и третьего порядков. Такая система является полной, ее невозможно обобщить (улучшить) в рамках асимптотики Моисеева-Нариманова третьего порядка. Большим преимуществом перед численноориентированными алгоритмами вывода модальных систем является то, что удается определить все нулевые коэффициенты такой модальной системы, а также получить аналитические выражения для ненулевых гидродинамических коэффициентов.

В данной работе получены периодические решения построенной ранее бесконечномерной модальной системы [9], описывающей резонансные колебания жидкости в срезанных конических полостях. Основные исследования нелинейных движений жидкости в баках проведены для случая резонансных гармонических возмущений с частотой, близкой к первой наименьшей собственной частоте колебаний жидкости. Это связывается с тем, что именно такие возмущения порождают максимальные гидродинамические нагрузки на стенки бака и поэтому являются важнейшими при исследованиях совместных движений бака и жидкости. Рассматриваются области устойчивости-неустойчивости полученных решений в случае гармонических горизонтальных колебаний бака с малой амплитудой. А также выводятся

ся формулы для расчета резонансных гидродинамических нагрузок на стенки бака и сравниваются полученные данные с экспериментом [12].

2. Постановка задачи

Рассмотрим поступательное движение твердого тела, которое содержит полость (бак) в форме обратного вертикального срезанного кругового конуса с углом полураствора θ_0 . Бак частично заполнен идеальной несжимаемой жидкостью плотности ρ и совершает поступательные перемещения со скоростью $\vec{v}_0(t)$. Движение жидкости рассматривается в связанной с баком системе координат $Oxyz$. Начало координат размещено в условной вершине конуса O . Ось Ox направлена вдоль оси конуса в направлении, противоположном вектору ускорения сил земного тяготения \vec{g} в статическом (неподвижном) положении бака.

Для описания колебаний идеальной несжимаемой жидкости в рамках потенциальных течений необходимо решить известную нелинейную краевую задачу со свободной границей (1) [9] относительно двух неизвестных – мгновенной формы свободной поверхности и потенциала скоростей. Согласно концепции мультимодальных методов мгновенная форма свободной поверхности может быть представлена в виде разложения в обобщенный ряд Фурье с неизвестными зависящими от времени коэффициентами $\beta_i(t)$ (обобщенными координатами) в криволинейной системе координат (после применения техники неконформных отображений Луковского [2, 9] $xyz \rightarrow x_1x_2x_3$)

$$f^*(x_2, x_3, t) = x_{10} + \beta_0(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i(t) f_i(x_2, x_3), \quad (1)$$

где $f_i(x_2, x_3)$ являются так называемыми собственными формами. Аналогично и потенциал скоростей допускает подобное разложение

$$\Phi^*(x_1, x_2, x_3, t) = \vec{v}_0 \cdot \vec{r} + \sum_{j=1}^{\infty} R_j(t) \phi_j(x_1, x_2, x_3), \quad (2)$$

где $\phi_j(x_1, x_2, x_3)$ являются собственными модами, а $R_j(t)$ характеризуют возмущения потенциала скоростей.

Такая процедура позволяет получить полные бесконечномерные уравнения, в общем случае не пригодные для анализа. Соответственно, такие системы необходимо редуцировать к некоторому минимальному размеру, используя, к примеру, известные асимптотики Моисеева-Нариманова третьего порядка, которые связывают две доминантные собственные формы, три собственные формы второго порядка и четыре формы третьего порядка. В то же время, асимптотики Моисеева-Нариманова для кругового сечения приводят к необходимости учитывать, помимо двух доминантных форм, также бесконечный набор обобщенных координат второго и третьего порядка малости вследствие возможности возникновения внутренних резонансов высшего порядка для некоторых глубин заполнения жидкости и углов полураствора конических полостей (см. анализ работы [5]). В работе [9] были построены соответствующие нелинейные асимптотические модальные системы, учитывающие полный набор обобщенных координат второго и третьего порядка малости для срезанного конического бака кругового сечения. При этом использовались следующие асимптотики для обобщенных координат β_i , которые были расщеплены на симметричные p_{Mi} и антисимметричные r_{mi} ($M = 0, 1, 2, 3$, $m = 1, 2, 3$, $i > 0$, $j > 1$, а ϵ – безразмерная амплитуда внешнего гармоничного возмущения):

$$p_{11} \sim r_{11} \sim \epsilon, p_{0i} \sim p_{2i} \sim r_{2i} \sim \epsilon^2, p_{1j} \sim r_{1j} \sim p_{3i} \sim r_{3i} \sim \epsilon^3. \quad (3)$$

Здесь и далее будем придерживаться обозначений работы [9].

Подставляя переписанные в новых обозначениях представления свободной поверхности в базовую задачу со свободной границей и используя вариационную схему Луковского [3], была получена бесконечномерная модальная система относительно обобщенных координат, описывающая резонансные колебания жидкости для данной конфигурации полости. Учитывая асимптотики Моисеева-Нариманова, она свелась к более компактной форме [9]. Коротко ее можно привести в следующем виде:

$$\begin{aligned} \ddot{p}_{Mi} + \sigma_{Mi}^2 p_{Mi} + L_{Mi}^p(p_{11}, p_{11}, \{p_{0j}\}; \{p_{2j}\}; \{r_{2j}\}) + e_i \delta_{m1} \ddot{\eta}_1 &= 0, \\ \ddot{r}_{mi} + \sigma_{mi}^2 r_{mi} + L_{mi}^r(p_{11}, p_{11}, \{p_{0j}\}; \{p_{2j}\}; \{r_{2j}\}) + e_i \delta_{m1} \ddot{\eta}_2 &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где выражения L_{Mi}^p, L_{mi}^r являются нелинейными и зависят сложным образом от обобщенных координат $p_{11}, p_{11}, \{p_{0j}\}, \{p_{2j}\}, \{r_{2j}\}$. При этом, в случае $M, m = 1$ выражения

$L_{Mi}^p(p_{11}, p_{11}, \{p_{0j}\}, \{p_{2j}\}, \{r_{2j}\}) \sim L_{mi}^r(p_{11}, p_{11}, \{p_{0j}\}, \{p_{2j}\}, \{r_{2j}\}) \sim \epsilon^3$ имеют третий порядок малости. При $M, m = 0, 2$ выражения $L_{Mi}^p(p_{11}, r_{11}) \sim L_{mi}^r(p_{11}, r_{11}) \sim \epsilon^2$ имеют второй порядок малости и зависят только от основных обобщенных координат. И в случае $M, m = 3$ выражения $L_{Mi}^p(p_{11}, p_{11}, \{p_{2j}\}, \{r_{2j}\}) \sim L_{mi}^r(p_{11}, p_{11}, \{p_{2j}\}, \{r_{2j}\}) \sim \epsilon^3$ также имеют третий порядок малости относительно обобщенных координат.

3. Периодические решения

Рассмотрим вынужденные установившиеся резонансные колебания жидкости при заданном внешнем гармоническом возмущении бака $u(t) = \eta \cos \sigma t$. Анализ установившихся вынужденных колебаний жидкости связан с отысканием периодических решений системы (4) (см. полную форму (20) [9]). Представим обобщенные координаты $r_{11}(t)$ и $p_{11}(t)$ в виде отрезков ряда Фурье с неопределенными коэффициентами [3]

$$\begin{aligned} p_{Mi}(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} (B_{m,2k-1} \cos k\sigma t + B_{M,2k} \sin k\sigma t), \\ r_{mi}(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} (A_{m,2k-1} \cos k\sigma t + A_{m,2k} \sin k\sigma t), \end{aligned} \quad (5)$$

где, в соответствии с выбранной асимптотикой, доминантный вклад дают основные гармоники, переписанные для удобства в следующем виде:

$$\begin{aligned} p_{11}(t) &= B_c \cos \sigma t + B_s \sin \sigma t + o(\epsilon), \\ r_{11}(t) &= A_c \cos \sigma t + A_s \sin \sigma t + o(\epsilon). \end{aligned} \quad (6)$$

Коэффициенты разложений обобщенных координат $p_{0h}(t)$, $r_{2h}(t)$, $p_{2h}(t)$, $r_{3h}(t)$, $p_{3h}(t)$, $r_{1k}(t)$ и $p_{1k}(t)$ являются функциями доминантных амплитуд A_c , A_s , B_c и B_s представлений обобщенных координат $r_{11}(t)$ и $p_{11}(t)$. Для них можно найти явные выражения из уравнений $L_{p_{Mi}}$ и $L_{r_{mi}}$ системы (20) [9] (т. к. они линейны относительно $p_{0h}(t)$, $r_{2h}(t)$, $p_{2h}(t)$, $r_{3h}(t)$, $p_{3h}(t)$, $r_{1k}(t)$, $p_{1k}(t)$). Эти обобщенные координаты приобретают следующий вид:

$$\begin{aligned} p_{0h}(t) &= (A_c^2 + A_s^2 + B_c^2 + B_s^2) \mathbf{o}_{0h0} + 2(A_c A_s + B_c B_s) \mathbf{o}_{0h2} \sin 2\sigma t + \\ &+ (A_c^2 - A_s^2 + B_c^2 - B_s^2) \mathbf{o}_{0h2} \cos 2\sigma t, \end{aligned} \quad (7a)$$

$$p_{2h}(t) = (-A_c^2 - A_s^2 + B_c^2 + B_s^2) \mathbf{o}_{2h0} + 2(B_c B_s - A_c A_s) \mathbf{o}_{2h2} \sin 2\sigma t + \\ + (-A_c^2 + A_s^2 + B_c^2 - B_s^2) \mathbf{o}_{2h2} \cos 2\sigma t, \quad (7b)$$

$$r_{2h}(t) = 2(A_c B_c + A_s B_s) \mathbf{o}_{2h0} + 2(A_s B_c + A_c B_s) \mathbf{o}_{2h2} \sin 2\sigma t + \\ + 2(A_c B_c - A_s B_s) \mathbf{o}_{2h2} \cos 2\sigma t, \quad (7c)$$

$$p_{3h}(t) = ((3A_c^2 + A_s^2 - B_c^2 - B_s^2) B_c + 2A_c A_s B_s) \mathbf{o}_{3h1} \cos \sigma t + \\ + ((A_c^2 + 3A_s^2 - B_c^2 - B_s^2) B_s + 2A_c A_s B_c) \mathbf{o}_{3h1} \sin \sigma t + \\ + ((3A_c^2 - 3A_s^2 - 3B_c^2 + B_s^2) B_s + 6A_c A_s B_c) \mathbf{o}_{3h3} \sin 3\sigma t + \\ + ((3A_c^2 - 3A_s^2 - B_c^2 + 3B_s^2) B_c - 6A_c A_s B_s) \mathbf{o}_{3h3} \cos 3\sigma t, \quad (7d)$$

$$r_{3h}(t) = ((A_c^2 + A_s^2 - 3B_c^2 - B_s^2) A_c - 2A_s B_c B_s) \mathbf{o}_{3h1} \cos \sigma t + \\ + ((A_c^2 + A_s^2 - B_c^2 - 3B_s^2) A_s - 2A_c B_c B_s) \mathbf{o}_{3h1} \sin \sigma t + \\ + ((A_c^2 - 3A_s^2 - 3B_c^2 + 3B_s^2) A_c + 6A_s B_c B_s) \mathbf{o}_{3h3} \cos 3\sigma t + \\ + ((3A_c^2 - A_s^2 - 3B_c^2 + 3B_s^2) A_s - 6A_c B_c B_s) \mathbf{o}_{3h3} \sin 3\sigma t, \quad (7e)$$

$$p_{1k}(t) = \left(((-A_c^2 - B_c^2 - B_s^2) \mathbf{o}_{1k11} - A_s^2 \mathbf{o}_{1k12}) B_c + \right. \\ \left. + A_c A_s B_s \mathbf{o}_{1k13} \right) \cos \sigma t + \left(((-A_s^2 - B_c^2 - B_s^2) \mathbf{o}_{1k11} - \right. \\ \left. - A_c^2 \mathbf{o}_{1k12}) B_s + A_c A_s B_c \mathbf{o}_{1k13} \right) \sin \sigma t + \left(2A_c A_s B_s + \right. \\ \left. + (-A_c^2 + A_s^2 - B_c^2 + 3B_s^2) B_c \right) \mathbf{o}_{1k3} \cos 3\sigma t + \\ \left(-2A_c A_s B_c + (-A_c^2 + A_s^2 + B_s^2 - 3B_c^2) B_s \right) \mathbf{o}_{1k3} \sin 3\sigma t, \quad (7f)$$

$$r_{1k}(t) = \left(((-A_c^2 - A_s^2 - B_c^2) \mathbf{o}_{1k11} - B_s^2 \mathbf{o}_{1k12}) A_c + \right. \\ \left. + A_s B_c B_s \mathbf{o}_{1k13} \right) \cos \sigma t + \left(((-A_c^2 - A_s^2 - B_s^2) \mathbf{o}_{1k11} - \right. \\ \left. - B_c^2 \mathbf{o}_{1k12}) A_s + A_c B_c B_s \mathbf{o}_{1k13} \right) \sin \sigma t + \left(2A_s B_c B_s + \right. \\ \left. (-A_c^2 + 3A_s^2 - B_c^2 + B_s^2) A_c \right) \mathbf{o}_{1k3} \cos 3\sigma t + \\ \left(-2A_s B_c B_s + (-3A_c^2 + A_s^2 - B_c^2 + B_s^2) A_s \right) \mathbf{o}_{1k3} \sin 3\sigma t. \quad (7g)$$

Тут $\mathbf{o}_{m h k}$ определяются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \mathbf{o}_{0h0} &= \frac{d_{10,h} - d_{8,h}}{2\bar{\sigma}_{0h}^2} - \frac{\mathcal{G}_{0,h}}{2}, & \mathbf{o}_{0h2} &= \frac{d_{10,h} + d_{8,h} - \mathcal{G}_{0,h}\bar{\sigma}_{0h}^2}{2(\bar{\sigma}_{0h}^2 - 4)}, \\ \mathbf{o}_{2h0} &= \frac{d_{9,h} - d_{7,h}}{2\bar{\sigma}_{2h}^2} - \frac{\mathcal{G}_{4,h}}{2}, & \mathbf{o}_{2h2} &= \frac{d_{9,h} + d_{7,h} - \mathcal{G}_{4,h}\bar{\sigma}_{2h}^2}{2(\bar{\sigma}_{2h}^2 - 4)}, \end{aligned} \quad (8a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{o}_{3h1} &= \frac{1}{4(\bar{\sigma}_{3h}^2 - 1)} \left(\bar{\sigma}_{3h}^2 \left(3\mathcal{G}_{6,h} + 4S_0^{\mathcal{G}_{5,h}} + 2S_2^{\mathcal{G}_{5,h}} \right) - 4S_0^{d_{13,h}} - 2S_2^{d_{13,h}} - \right. \\ &- 8S_2^{d_{14,h}} + 4S_2^{d_{15,h}} - 3d_{11,h} + d_{12,h} \left. \right), & \mathbf{o}_{3h3} &= \frac{1}{4(\bar{\sigma}_{3h}^2 - 9)} \left(-d_{11,h} - \right. \\ &- d_{12,h} - 2S_2^{d_{13,h}} - 8S_2^{d_{14,h}} - 4S_2^{d_{15,h}} + \bar{\sigma}_{3h}^2 \left(\mathcal{G}_{6,h} + 2S_2^{\mathcal{G}_{5,h}} \right) \left. \right), \end{aligned} \quad (8b)$$

а $\mathbf{o}_{m k i}$ – по следующим формулам ($\mathbf{o}_{1k13} = \mathbf{o}_{1k12} - \mathbf{o}_{1k11}$):

$$\begin{aligned} \mathbf{o}_{1k11} &= \frac{1}{4(\bar{\sigma}_{1k}^2 - 1)} \left(-4C_0^{d_{23,k}} - 2C_2^{d_{23,k}} - 8C_2^{d_{24,k}} + 4C_2^{d_{25,k}} - \right. \\ &- 4S_0^{d_{20,k}} - 2S_2^{d_{20,k}} - 8S_2^{d_{21,k}} + 4S_2^{d_{22,k}} - 4d_{19,k} + 3d_{18,k} - d_{16,k} + \\ &+ \bar{\sigma}_{1,k}^2 \left[3\mathcal{G}_{1,k} + 4C_0^{\mathcal{G}_{3,k}} + 2C_2^{\mathcal{G}_{3,k}} + 4S_0^{\mathcal{G}_{2,k}} + 2S_2^{\mathcal{G}_{2,k}} \right] \left. \right), \\ \mathbf{o}_{1k12} &= \frac{1}{4(\bar{\sigma}_{1k}^2 - 1)} \left(-4C_0^{d_{23,k}} 2C_2^{d_{23,k}} + 8C_2^{d_{24,k}} - 4C_2^{d_{25,k}} + \right. \\ &+ \bar{\sigma}_{1k}^2 \left[\mathcal{G}_{1k} + 4C_0^{\mathcal{G}_{3,k}} - 2C_2^{\mathcal{G}_{3,k}} - 4S_0^{\mathcal{G}_{2,k}} + 6S_2^{\mathcal{G}_{2,k}} \right] + 4S_0^{d_{20,k}} - \\ &- 6S_2^{d_{20,k}} - 24S_2^{d_{21,k}} + 12S_2^{d_{22,k}} - 4d_{19,k} + 3d_{18,k} - d_{16,k} \left. \right), \\ \mathbf{o}_{1k3} &= \frac{1}{4(\bar{\sigma}_{1k}^2 - 9)} \left(-d_{16,k} - d_{18,k} - 2C_2^{d_{23,k}} - 8C_2^{d_{24,k}} - 4C_2^{d_{25,k}} - \right. \\ &- 2S_2^{d_{20,k}} - 8S_2^{d_{21,k}} - 4S_2^{d_{22,k}} + \bar{\sigma}_{1k}^2 \left[\mathcal{G}_{1k} + 2C_2^{\mathcal{G}_{3,k}} + 2S_2^{\mathcal{G}_{2,k}} \right] \left. \right), \end{aligned} \quad (8c)$$

здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{mi}^2 &= \frac{\sigma_{mi}^2}{\sigma^2}, & C_i^{d_{k,h}} &= \sum_j d_{k,h}^j \mathbf{o}_{0ji}, & S_i^{d_{k,h}} &= \sum_j d_{k,h}^j \mathbf{o}_{2ji}, \\ S_i^{\mathcal{G}_{k,h}} &= \sum_j \mathcal{G}_{k,h}^j \mathbf{o}_{2ji}, & C_i^{\mathcal{G}_{k,h}} &= \sum_j \mathcal{G}_{k,h}^j \mathbf{o}_{0ji}. \end{aligned} \quad (9)$$

После подстановки выражений (6), а также найденных для $p_{0h}(t)$, $r_{2h}(t)$, $p_{2h}(t)$, $r_{3h}(t)$ и $p_{3h}(t)$ решений (7) в уравнение Бубнова–Галеркина для $L_{p_{11}}$ (20d), $L_{r_{11}}$ (20e) [9]

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\sigma}} L_{\beta_{11}} \cos \sigma t dt = 0, \quad \int_0^{\frac{2\pi}{\sigma}} L_{\beta_{11}} \sin \sigma t dt = 0, \quad (10)$$

где $\beta_{11} = \{p_{11}, r_{11}\}$, получим систему четырех алгебраических уравнений, из которой определяются доминантные амплитуды A_i , B_i ($i = c, s$) в представлении (6)

$$\begin{aligned} A_c ((\bar{\sigma}_{11}^2 - 1) + (A_c^2 + A_s^2 + B_c^2) m_1 + B_s^2 m_2) + A_s B_c B_s m_3 &= e_1 \eta_{2a}, \\ A_s ((\bar{\sigma}_{11}^2 - 1) + (A_c^2 + A_s^2 + B_s^2) m_1 + B_c^2 m_2) + A_c B_c B_s m_3 &= 0, \\ B_c ((\bar{\sigma}_{11}^2 - 1) + (A_c^2 + B_c^2 + B_s^2) m_1 + A_s^2 m_2) + A_c A_s B_s m_3 &= 0, \\ B_s ((\bar{\sigma}_{11}^2 - 1) + (A_s^2 + B_c^2 + B_s^2) m_1 + A_c^2 m_2) + A_c A_s B_c m_3 &= 0, \end{aligned} \quad (11)$$

здесь коэффициенты $m_1, m_2, m_3 = (m_1 - m_2)$ определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} m_1 &= \bar{\sigma}_{11}^2 \left[\frac{3}{4} \mathcal{G}_1 + C_0^{\mathcal{G}_2} + \frac{1}{2} C_2^{\mathcal{G}_2} + S_0^{\mathcal{G}_3} + \frac{1}{2} S_2^{\mathcal{G}_3} \right] - C_0^{d_5} + \frac{1}{2} C_2^{d_5} - 2C_2^{d_6} - \\ &- S_0^{d_3} + \frac{1}{2} S_2^{d_3} + 2S_2^{d_4} - \frac{1}{2} d_1, \quad m_2 = \frac{1}{2} d_1 - 2d_2 - C_0^{d_5} - \frac{1}{2} C_2^{d_5} + 2C_2^{d_6} + \\ &+ S_0^{d_3} + \frac{3}{2} S_2^{d_3} - 6S_2^{d_4} + \bar{\sigma}_{11}^2 \left[\frac{1}{4} \mathcal{G}_1 + C_0^{\mathcal{G}_2} - \frac{1}{2} C_2^{\mathcal{G}_2} - S_0^{\mathcal{G}_3} + \frac{3}{2} S_2^{\mathcal{G}_3} \right], \end{aligned} \quad (12)$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} C_i^{d_k} &= \sum_j d_k^j \mathbf{o}_{0ji}, & S_i^{d_k} &= \sum_j d_k^j \mathbf{o}_{2ji}, \\ C_i^{\mathcal{G}_k} &= \sum_j \mathcal{G}_k^j \mathbf{o}_{0ji}, & S_i^{\mathcal{G}_k} &= \sum_j \mathcal{G}_k^j \mathbf{o}_{2ji}. \end{aligned} \quad (13)$$

Анализ системы (11) при условии ненулевого действия внешних возмущающих сил ($\eta_{2a} \neq 0$) показывает, что $A_s = B_c = 0$, т. е. имеются лишь две ненулевые доминантные амплитуды, которые определяются из системы двух алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} A_c ((\bar{\sigma}_{11}^2 - 1) + A_c^2 m_1 + B_s^2 m_2) &= e_1 \eta_{2a}, \\ B_s ((\bar{\sigma}_{11}^2 - 1) + B_s^2 m_1 + A_c^2 m_2) &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Система аналогична системе уравнений, полученной в работе [4], а также прочих работах о изучении колебаний жидкости в фигурах вращения, изучаемых подобным методом (таких, как круговой цилиндр, конус и сфера), и применима аналогичная схема анализа, разница состоит в отличии выражений коэффициентов этих уравнений. Ее решения зависят от коэффициентов m_i , которые являются функциями геометрии бака \bar{r}_{11} , $\bar{\sigma}_{11}(\bar{r}_{11})$ и θ_0 ($m_i = m_i(\bar{\sigma}_{11}, \bar{r}_{11}, \theta_0)$). С физической точки зрения эти решения определяют два типа установившихся режимов. Одно из них (при условии $B_s = 0$) соответствует плоским установившимся резонансным режимам колебания жидкости, а другое (при $B_s \neq 0$) определяет так называемую круговую волну. Такая классификация установившихся режимов аналогична той, что хорошо известна для круговых вертикальных цилиндрических баков, а также для неусеченных конических баков [18].

Плоские установившиеся движения ($A_c \neq 0$, $A_s = B_c = B_s = 0$) определяются приближенным решением модальных уравнений вида

$$\begin{aligned} r_{11}(t) &= A_c \cos \sigma t, & r_{1k}(t) &= -A_c^3 \mathbf{o}_{1k11} \cos \sigma t - A_c^3 \mathbf{o}_{1k3} \cos 3\sigma t, \\ p_{0h}(t) &= A_c^2 \mathbf{o}_{0h0} + A_c^2 \mathbf{o}_{0h2} \cos 2\sigma t, & p_{2h}(t) &= -A_c^2 \mathbf{o}_{2h0} - A_c^2 \mathbf{o}_{2h2} \cos 2\sigma t, \\ r_{3h}(t) &= A_c^3 \mathbf{o}_{3h1} \cos \sigma t + A_c^3 \mathbf{o}_{3h3} \cos 3\sigma t, \end{aligned} \quad (15)$$

где значение амплитуды A_c определяется решениями кубического уравнения

$$m_1 A_c^3 + (\bar{\sigma}_{11}^2 - 1) A_c - e_1 \eta_{2a} = 0, \quad (16)$$

а остальные равны нулю $p_{11}(t) = p_{1k}(t) = p_{3h}(t) = r_{2h}(t) = 0$.

Установившаяся круговая волна ($A_c \neq 0$, $B_s \neq 0$, $A_s = B_c = 0$) приближается решением

$$\begin{aligned} r_{11}(t) &= A_c \cos \sigma t, & p_{11}(t) &= B_s \sin \sigma t, & r_{2h}(t) &= 2A_c B_s \mathbf{o}_{2h2} \sin 2\sigma t, \\ p_{2h}(t) &= -(A_c^2 - B_s^2) \mathbf{o}_{2h0} - (A_c^2 + B_s^2) \mathbf{o}_{2h2} \cos 2\sigma t, \\ r_{3h}(t) &= ((A_c^2 - B_s^2) A_c) \mathbf{o}_{3h1} \cos \sigma t + ((A_c^2 + 3B_s^2) A_c) \mathbf{o}_{3h3} \cos 3\sigma t, \\ p_{3h}(t) &= ((A_c^2 - B_s^2) B_s) \mathbf{o}_{3h1} \sin \sigma t + ((3A_c^2 + B_s^2) B_s) \mathbf{o}_{3h3} \sin 3\sigma t, \\ r_{1k}(t) &= -(A_c^2 \mathbf{o}_{1k11} + B_s^2 \mathbf{o}_{1k12}) A_c \cos \sigma t - (A_c^2 - B_s^2) A_c \mathbf{o}_{1k3} \cos 3\sigma t, \\ p_{1k}(t) &= -(A_c^2 \mathbf{o}_{1k12} + B_s^2 \mathbf{o}_{1k11}) B_s \sin \sigma t - (A_c^2 - B_s^2) B_s \mathbf{o}_{1k3} \sin 3\sigma t, \\ p_{0h}(t) &= (A_c^2 + B_s^2) \mathbf{o}_{0h0} + (A_c^2 - B_s^2) \mathbf{o}_{0h2} \cos 2\sigma t, \end{aligned} \quad (17)$$

где значения амплитуд A_c и B_s находятся из системы кубических уравнений

$$A_c(\bar{\sigma}_{11}^2 - 1 + A_c^2 m_1 + B_s^2 m_3) = \epsilon_1 \eta_{2a}, \quad B_s^2 m_1 + A_c^2 m_3 = 1 - \bar{\sigma}_{11}^2. \quad (18)$$

4. Исследование неустойчивости периодических решений модальной системы (4)

С целью исследования устойчивости периодических решений бесконечномерной модальной системы используем подход, который базируется на методе Ляпунова с использованием техники медленного времени.

Введем в рассмотрение функцию медленного времени $\tau(t) = \epsilon^2 \sigma t / 2$ и представим возмущения доминантных мод в виде

$$\begin{aligned} p_{11}(t) &= \tilde{\beta}(\tau) \cos \sigma t + (B_s + \beta(\tau)) \sin \sigma t + O(\epsilon), \\ r_{11}(t) &= (A_c + \alpha(\tau)) \cos \sigma t + \tilde{\alpha}(\tau) \sin \sigma t + O(\epsilon), \end{aligned} \quad (19)$$

здесь A_c, B_s – решения системы (18), а $\alpha, \tilde{\alpha}, \beta, \tilde{\beta}$ – соответствующие возмущения, зависящие от τ . Подставляя выражения (19) в найденные ранее уравнения $L_{p_{11}}, L_{r_{11}}$ ((20d),(20e) [9]) и группируя слагаемые по порядкам малости, линеаризируя по $\alpha, \tilde{\alpha}, \beta, \tilde{\beta}$ получим линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений $\dot{\vec{c}} + C\vec{c} = 0$.

Эта задача использует ту же схему для изучения неустойчивости плоской и круговой волны, что и в работе [14], где использовался первый метод Ляпунова вместе с техникой мульти-синхронизации. Нестабильность возникает, когда собственные значения 4x4-матрица с ненулевыми элементами

$$\begin{aligned} c_{12} &= -(\bar{\sigma}_{11}^2 - 1 + m_1 A_c^2 + m_1 B_s^2), \quad c_{14} = (-m_1 + m_2) A_c B_s, \\ c_{21} &= \bar{\sigma}_{11}^2 - 1 + 3m_1 A_c^2 + m_2 B_s^2, \quad c_{34} = \bar{\sigma}_{11}^2 - 1 + m_1 A_c^2 + m_1 B_s^2, \\ c_{23} &= 2m_2 A_c B_s, \quad c_{32} = (m_1 - m_2) A_c B_s, \quad c_{41} = -2m_2 A_c B_s, \\ c_{43} &= -(\bar{\sigma}_{11}^2 - 1 + m_2 A_c^2 + 3m_1 B_s^2), \end{aligned} \quad (20)$$

имеют ненулевую положительную действительную часть, то есть стационарное решение устойчиво, когда характеристический многочлен $\det(\lambda E + C) = 0$ равен нулю, т. е.

$$\lambda^4 + c_1 \lambda^2 + c_0 = 0, \quad (21)$$

где c_0 – определитель матрицы C , а $c_1 = c_{34}(c_{21} - c_{43}) - 2c_{23}c_{32}$.

При условиях устойчивости системы имеем

$$c_0 > 0, \quad c_1 > 0, \quad c_1^2 - 4c_0 > 0. \quad (22)$$

Равенства нулю выражений $c_0 = 0$ и $c_1^2 - 4c_0 = 0$ дают возможность найти точки бифуркации Пуанкаре и Гамильтона соответственно.

5. Амплитудно-частотные характеристики

Амплитудно-частотные характеристики нелинейных установившихся колебаний жидкости, с точностью до членов более высокого порядка малости, можно характеризовать зависимостями между доминантными амплитудами и частотой возбуждения. На рис. 1 построены такие зависимости, используя формулы (17), к примеру, для фиксированной геометрии полости (угол раствора, глубина и т. п.), которые возникают в приложениях. Сплошной линией изображены устойчивые установившиеся колебания, а пунктирной – неустойчивые. Из рисунков видно, что амплитудно-частотные характеристики остаются подобными тем, которые известны из работ Луковского для случая кругового вертикального цилиндра с конечной глубиной заполнения и почти идентичны характеристикам семимерной системы для срезанных конических баков. Как и в этом случае, плоский установившийся режим (ветви K^1K^2 и M^1M^2) является неустойчивым в окрестности основного резонанса $\sigma/\sigma_{11} \approx 1$ между точками K и M . При этом точка K – точка возврата, а точка M – точка бифуркации Пуанкаре, из которой возникает ветвь MM^3 , соответствующая неустойчивой резонансной круговой волне. Вторая ветвь N^2N^1 , соответствующая круговой волне, разделяется на устойчивую NN^1 и неустойчивую NN^2 части точкой бифуркации Хопфа N . Учитывая расположение устойчивых веток для плоской и круговой волн, можно выделить диапазоны устойчивости и неустойчивости. Они также аналогичны случаю вертикального кругового бака. Так устойчивые плоские волны ожидаются для частот левее точки K . Правее точки M могут реализоваться как плоская, так и круговая волны. На отрезке безразмерных частот между точками N и M имеются лишь устойчивые круговые волны, а в диапазоне между K и N отсутствуют любые устойчивые установившиеся движения, поэтому могут возникать иррегулярные движения.

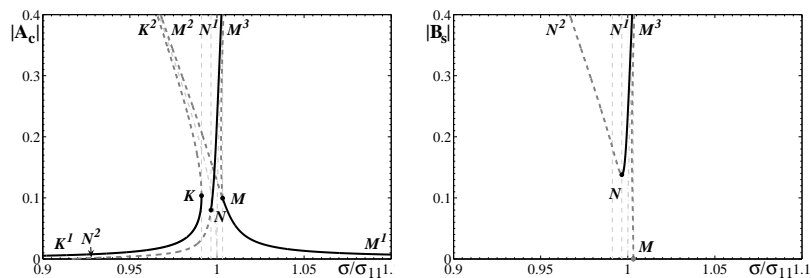


Рис. 1. Амплитудно-частотные кривые «плоской» и «круговой» волны для бака с геометрией $\theta_0 = 30^\circ$, $r_0 = 1$ и $r_1 = 0.7427$ при внешнем возмущении $\eta_{2a} = 0.00125$ для продольных A_c и поперечных B_s амплитуд.

Сравнение амплитудно-частотных характеристик. Для исследования влияния высших форм на амплитудно-частотные характеристики будем увеличивать количество вторичных собственных координат в представлении свободной поверхности и оценивать разницу изменения амплитуды. За базовую модель возьмем семимодовую модель работы [4], где учитывались только первые моды всех порядков p_{01} , p_{11} , r_{11} , p_{21} , r_{21} , p_{31} , r_{31} .

Добавление по паре вторичных мод второго порядка p_{02} , p_{03} , p_{22} , r_{22} , p_{23} , r_{23} существенно не изменяет значение амплитуд плоского движения A_c . Разница между исходной 7-модовой моделью и моделью с несколькими вторичными модами составляет не более одного процента. Однако возникают соответственно несколько узких резонансных диапазонов в области KN , где исходная система предусматривала только хаотические движения.

Аналогичная ситуация наблюдается и для устойчивой пространственной (круговой) волны – на амплитудах это почти не отражается, появляются только узкие резонансные диапазоны в области хаотических движений.

В следующем параграфе мы рассмотрим экспериментальные результаты из работы [12], где будут сравниваться теоретические и экспериментальные величины установившихся амплитуд продольных сил. Теоретические амплитудно-частотные характеристики для этого экспериментального случая приводятся на рис. 1.

6. Гидродинамические силы

Для подсчета результирующей гидродинамической силы можно воспользоваться известной формулой Луковского [3], в соответствии с которой в случае поступательного движения бака компоненты гидродинамической силы определяются по формулам

$$P_x = -mg - \ddot{l}_1, \quad P_y = -\ddot{l}_2, \quad P_z = -m\ddot{u} - \ddot{l}_3, \quad (23)$$

где m – масса жидкости, u – внешнее гармоническое возмущение и $l_i(t)/m$ – координаты центра массы жидкости. Координаты вектора \vec{l}

$$\vec{l} = \rho \int_{Q(t)} \vec{r} dQ, \quad (24)$$

в криволинейной системе координат (см. приложение (А.4) [9]) с учетом основного порядка малости, когда все обобщенные координаты $\beta_N = \{p_{Mi}, r_{mi}\}$ имеют первый порядок малости $p_{Mi} \sim r_{mi} \sim \epsilon$

$$\begin{aligned} l_1 = & \sum_{MNLijk} \mathbf{I}_{Mi,Nj,Lk}^{xppp} p_{Mi} p_{Nj} p_{Lk} + \sum_{Mnlijk} \mathbf{I}_{Mi,nj,lk}^{xpr} p_{Mi} r_{nj} r_{lk} + \\ & + \sum_{MNij} \mathbf{I}_{Mi,Nj}^{xpp} p_{Mi} p_{Nj} + \sum_{mni} \mathbf{I}_{mi,nj}^{xrr} r_{mi} r_{nj} + \mathbf{I}^x, \quad l_2 = \sum_{Mi} \hat{\mathbf{I}}_{Mi}^{yp} p_{Mi} + \\ & + \sum_{MNij} \hat{\mathbf{I}}_{Mi,Nj}^{ypp} p_{Mi} p_{Nj} + \sum_{mni} \hat{\mathbf{I}}_{mi,nj}^{yrr} r_{mi} r_{nj} + \sum_{MNLijk} \hat{\mathbf{I}}_{Mi,Nj,Lk}^{yppp} p_{Mi} p_{Nj} p_{Lk} + \\ & + \sum_{Mnlijk} \hat{\mathbf{I}}_{Mi,nj,lk}^{ypr} p_{Mi} r_{nj} r_{lk}, \quad l_3 = \sum_{mi} \hat{\mathbf{I}}_{mi}^{zp} r_{mi} + \sum_{Mni} \hat{\mathbf{I}}_{Mi,nj}^{zpr} p_{Mi} r_{nj} + \\ & + \sum_{MNLijk} \hat{\mathbf{I}}_{Mi,Nj,Lk}^{zppr} p_{Mi} p_{Nj} r_{Lk} + \sum_{mnlijk} \hat{\mathbf{I}}_{mi,nj,lk}^{zrrr} r_{mi} r_{nj} r_{lk}, \quad (25) \end{aligned}$$

где фигурирующие здесь коэффициенты $\hat{\mathbf{I}}_{Mi}^{r\beta}$, $\hat{\mathbf{I}}_{Mi,Nj}^{r\beta\beta}$, $\hat{\mathbf{I}}_{Mi,Nj,Lk}^{r\beta\beta\beta}$ определяются следующими выражениями (через h_t и h_b обозначены высоты от вершины невозмущенной свободной поверхности и дна жидкости соответственно, $\beta_{Mi,Nj}^{pp}$ коэффициенты компоненты β_0 (1), а $\delta_{ij} = \{1, i = j; 0, i \neq j\}$):

$$\begin{aligned}
\mathbf{1}^x &= \frac{\pi}{4} (h_t^4 - h_b^4) x_{20}^2, \quad \mathbf{1}_{Mi,Nj}^{xpp} = \frac{h_t^2}{2} \delta_{MN} \delta_{ij} \Lambda_{MN}^{cc} \lambda_{Mi,Nj}, \\
\mathbf{1}_{mi,nj}^{xrr} &= \frac{h_t^2}{2} \delta_{mn} \delta_{ij} \Lambda_{mn}^{ss} \lambda_{mi,nj}, \quad \mathbf{1}_{Mi,Nj,Lk}^{xppp} = \frac{2}{3} h_t \Lambda_{MNL}^{ccc} \lambda_{Mi,Nj,Lk}, \\
\mathbf{1}_{Mi,nj,lk}^{xpr} &= 2h_t \Lambda_{Mnl}^{css} \lambda_{Mi,nj,lk}, \quad \hat{\mathbf{1}}_{Mi}^{yp} = h_t^3 \delta_{1,M} \Lambda_{1M}^{cc} \hat{\lambda}_{Mi}, \\
\hat{\mathbf{1}}_{Mi,Nj,Lk}^{yppp} &= h_t \Lambda_{MNL}^{ccc} \hat{\lambda}_{Mi,Nj,Lk} + 3h_t^2 \delta_{1M} \Lambda_{1M}^{cc} \hat{\lambda}_{Mi} \delta_{NL} \delta_{jk} \beta_{Nj,Lk}^{pp}, \\
\hat{\mathbf{1}}_{Mi,Nj}^{ypp} &= \frac{3}{2} h_t^2 \Lambda_{1MN}^{ccc} \hat{\lambda}_{Mi,Nj}, \quad \hat{\mathbf{1}}_{mi,nj}^{yrr} = \frac{3}{2} h_t^2 \Lambda_{1mn}^{css} \hat{\lambda}_{mi,nj}, \\
\hat{\mathbf{1}}_{Mi,nj,lk}^{ypr} &= 3h_t \Lambda_{1Mnl}^{css} \hat{\lambda}_{Mi,nj,lk} + 3h_t^2 \delta_{1M} \Lambda_{1M}^{cc} \hat{\lambda}_{Mi} \delta_{nl} \delta_{jk} \beta_{nj,lk}^{rr}, \\
\hat{\mathbf{1}}_{mi}^{zp} &= h_t^3 \delta_{1m} \Lambda_{m1}^{ss} \hat{\lambda}_{mi}, \quad \hat{\mathbf{1}}_{Mi,nj}^{zpr} = 3h_t^2 \Lambda_{Mn1}^{css} \hat{\lambda}_{Mi,nj}, \\
\hat{\mathbf{1}}_{Mi,Nj,lk}^{zppr} &= 3h_t \Lambda_{MNL1}^{css} \hat{\lambda}_{Mi,Nj,lk} + 3h_t^2 \delta_{1l} \Lambda_{l1}^{ss} \hat{\lambda}_{lk} \delta_{MN} \delta_{ij} \beta_{Mi,Nj}^{pp}, \\
\hat{\mathbf{1}}_{mi,nj,lk}^{zrrr} &= h_t \Lambda_{mnl1}^{sss} \hat{\lambda}_{mi,nj,lk} + 3h_t^2 \delta_{1l} \Lambda_{l1}^{ss} \hat{\lambda}_{lk} \delta_{mn} \delta_{ij} \beta_{mi,nj}^{rr}. \quad (26)
\end{aligned}$$

Здесь введены следующие общие обозначения для тригонометрических составляющих

$$\Lambda_{\substack{C \dots C \\ i \dots j \\ K_1}}^{K_1} \Lambda_{\substack{S \dots S \\ k \dots l \\ K_2}}^{K_2} = \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\cos(ix_3) \dots \cos(jx_3)}_{K_1} \cdot \underbrace{\sin(kx_3) \dots \sin(lx_3)}_{K_2} dx_3 \quad (27)$$

и интегральных компонент радиальных составляющих

$$\begin{aligned}
\lambda_{\underbrace{Mi, \dots, Nj}_K} &= \int_0^{x_{20}} x_2 \underbrace{f_{Mi}(x_2) \dots f_{Nj}(x_2)}_K dx_2, \\
\hat{\lambda}_{\underbrace{Mi, \dots, Nj}_K} &= \int_0^{x_{20}} x_2^2 \underbrace{f_{Mi}(x_2) \dots f_{Nj}(x_2)}_K dx_2. \quad (28)
\end{aligned}$$

Вводя асимптотики Моисеева-Нариманова (3) в (25), останутся

только следующие компоненты до третьего порядка включительно

$$\begin{aligned}
l_1 &= \mathbf{I}^x + \mathbf{I}_{11,11}^{xpp} p_{11}^2 + \mathbf{I}_{11,11}^{xrr} r_{11}^2 + \mathbf{I}_{11,11,11}^{xpr} p_{11} r_{11}^2 + \mathbf{I}_{11,11,11}^{xpp} p_{11}^3, \\
l_2 &= \hat{\mathbf{I}}_{11,11}^{ypp} p_{11}^2 + \hat{\mathbf{I}}_{11,11}^{yrr} r_{11}^2 + \hat{\mathbf{I}}_{11,11,11}^{ypr} p_{11} r_{11}^2 + \hat{\mathbf{I}}_{11,11,11}^{ypp} p_{11}^3 + \sum_i \hat{\mathbf{I}}_{1i}^{yp} p_{1i} + \\
&\quad + \sum_i \left(\hat{\mathbf{I}}_{0i,11}^{ypp} + \hat{\mathbf{I}}_{11,0i}^{ypp} \right) p_{11} p_{0i} + \sum_i \left(\hat{\mathbf{I}}_{2i,11}^{ypp} + \hat{\mathbf{I}}_{11,2i}^{ypp} \right) p_{11} p_{2i} + \\
&\quad + \sum_i \left(\hat{\mathbf{I}}_{2i,11}^{yrr} + \hat{\mathbf{I}}_{11,2i}^{yrr} \right) r_{11} r_{2i}, \quad l_3 = \hat{\mathbf{I}}_{11,11}^{zpr} p_{11} r_{11} + \hat{\mathbf{I}}_{11,11,11}^{zrr} r_{11}^3 + \hat{\mathbf{I}}_{11,11,11}^{zpp} p_{11}^3 r_{11} \\
&\quad + \sum_i \hat{\mathbf{I}}_{1i}^{zpr} r_{1i} + \sum_i \hat{\mathbf{I}}_{0i,11}^{zpr} r_{11} p_{0i} + \sum_i \hat{\mathbf{I}}_{11,2i}^{zpr} p_{11} r_{2i} + \sum_i \hat{\mathbf{I}}_{2i,11}^{zpr} r_{11} p_{2i}. \quad (29)
\end{aligned}$$

Для установившихся периодических режимов движения (15), (17) вторая производная от времени для горизонтальных компонент вектора \vec{l} имеет вид

$$\begin{aligned}
\ddot{l}_2 &= B_s (\lambda_{y1}^s + A_c^2 \lambda_{y1}^{css} + B_s^2 \lambda_{y1}^{sss}) \sigma^2 \sin \sigma t + B_s (A_c^2 - B_s^2) \lambda_{y3}^{sss} \sigma^2 \sin 3\sigma t, \\
\ddot{l}_3 &= A_c (\lambda_{z1}^c + A_c^2 \lambda_{z1}^{ccc} + B_s^2 \lambda_{z1}^{css}) \sigma^2 \cos \sigma t + A_c (A_c^2 - B_s^2) \lambda_{z3}^{ccc} \sigma^2 \cos 3\sigma t, \quad (30)
\end{aligned}$$

где коэффициенты λ_{ijk} определяются следующими формулами:

$$\begin{aligned}
\lambda_{y1}^s &= \lambda_{z1}^c = -\pi h_t^3 \hat{\lambda}_{11}, \quad \hat{\lambda}_{111} = \frac{x_{20}^2 \hat{\lambda}_{11,11,11} - 4 \hat{\lambda}_{11} \lambda_{11,11}}{4 h_t x_{20}^2}, \\
\lambda_{y1}^{sss} &= \lambda_{y01}^{sss} + \lambda_{yn1}^{sss}, \quad \lambda_{y1}^{css} = \lambda_{y01}^{css} + \lambda_{yn1}^{css}, \quad \lambda_{y3}^{sss} = \lambda_{y03}^{sss} + \lambda_{yn3}^{sss}, \\
\lambda_{z1}^{ccc} &= \lambda_{z01}^{ccc} + \lambda_{zn1}^{ccc}, \quad \lambda_{z1}^{css} = \lambda_{z01}^{css} + \lambda_{zn1}^{css}, \quad \lambda_{z3}^{ccc} = \lambda_{z03}^{ccc} + \lambda_{zn3}^{ccc}, \\
\lambda_{y01}^{sss} &= \lambda_{z01}^{ccc} = -3\pi h_t^2 \left(3 \hat{\lambda}_{111} + 2 (\mathbf{2o}_{010} + \mathbf{o}_{012}) \hat{\lambda}_{01,11} + \right. \\
&\quad \left. + 2 (\mathbf{o}_{210} + \mathbf{o}_{212}) \hat{\lambda}_{21,11} \right) / 4, \quad \lambda_{y01}^{css} = \lambda_{z01}^{css} = -3\pi h_t^2 \left(\hat{\lambda}_{111} + \right. \\
&\quad \left. + 2 (\mathbf{2o}_{010} - \mathbf{o}_{012}) \hat{\lambda}_{01,11} + (-\mathbf{2o}_{210} + \mathbf{3o}_{212}) \hat{\lambda}_{21,11} \right) / 4, \\
\lambda_{y03}^{sss} &= \lambda_{z03}^{ccc} = -27\pi h_t^2 \left(\hat{\lambda}_{111} + \mathbf{2o}_{012} \hat{\lambda}_{01,11} + \mathbf{o}_{212} \hat{\lambda}_{21,11} \right) / 4, \\
\lambda_{yn1}^{ccc} &= \pi h_t^2 \left(2h_t G_{11}^{\hat{\lambda}_1} - 3 \left(2C_0^{\hat{\lambda}_{01}} + C_2^{\hat{\lambda}_{01}} + S_0^{\hat{\lambda}_{21}} + S_2^{\hat{\lambda}_{21}} / 2 \right) \right) / 2, \\
\lambda_{yn1}^{css} &= \pi h_t^2 \left(2h_t G_{12}^{\hat{\lambda}_1} - 3 \left(2C_0^{\hat{\lambda}_{01}} + C_2^{\hat{\lambda}_{01}} + S_0^{\hat{\lambda}_{21}} - 3S_2^{\hat{\lambda}_{21}} / 2 \right) \right) / 2, \\
\lambda_{yn3}^{ccc} &= 9\pi h_t^2 \left(2h_t G_3^{\hat{\lambda}_1} - 3C_2^{\hat{\lambda}_{01}} - 3S_2^{\hat{\lambda}_{21}} / 2 \right) / 2,
\end{aligned} \quad (31)$$

где

$$\begin{aligned} C_j^{\hat{\lambda}_{k1}} &= \sum_{i=2}^{\infty} \hat{\lambda}_{ki11} \mathbf{o}_{0ij}, & S_j^{\hat{\lambda}_{k1}} &= \sum_{i=2}^{\infty} \hat{\lambda}_{ki11} \mathbf{o}_{2ij}, \\ G_3^{\hat{\lambda}_1} &= \sum_{i=2}^{\infty} \hat{\lambda}_{1i} \mathbf{o}_{1i3}, & G_{jk}^{\hat{\lambda}_1} &= \sum_{i=2}^{\infty} \hat{\lambda}_{1i} \mathbf{o}_{1ijk}. \end{aligned} \quad (32)$$

Причем коэффициенты λ_{ijk} разбиты на две составляющие: первая соответствует случаю семимодовой модальной системы λ_{roi}^{ccc} , исследованной ранее в работе [4]; вторая – расширенной (бесконечномерной) модальной системе предыдущей работы [9]. Такое представление позволяет осуществить сравнительный анализ от добавления вторичных мод более высокого порядка. В итоге мы получаем следующее выражение для нахождения амплитуд сил:

$$\begin{aligned} P_y &= - (B_s \lambda_{y1}^s + A_c^2 B_s \lambda_{y1}^{ccs} + B_s^3 \lambda_{y1}^{sss}) \sigma^2 \sin \sigma t - \\ &\quad - B_s (A_c^2 - B_s^2) \lambda_{y3}^{sss} \sigma^2 \sin 3\sigma t, \end{aligned} \quad (33a)$$

$$\begin{aligned} P_z &= - (mH + A_c \lambda_{z1}^c + A_c^3 \lambda_{z1}^{ccc} + A_c B_s^2 \lambda_{z1}^{css}) \sigma^2 \cos \sigma t - \\ &\quad - A_c (A_c^2 - B_s^2) \lambda_{z3}^{ccc} \sigma^2 \cos 3\sigma t. \end{aligned} \quad (33b)$$

7. Численные результаты

Формула (33b) дает возможность оценить силовой отклик жидкости в случае, когда имеется внешнее гармоническое возбуждение и вклад, который вносится в горизонтальную проекцию суммарной гидродинамической силы инерционными силами

$$|P_z^{if}| = \frac{1}{3} \pi \rho \eta_{2a} \sigma^2 (r_0^3 - r_1^3) \cot \theta_0 \quad (34)$$

и волновыми движениями на свободной поверхности жидкости

$$|P_z^{vm}| = \max \left| (A_c \lambda_{z1}^c + A_c^3 \lambda_{z1}^{ccc}) \sigma^2 \cos \sigma t + A_c^3 \lambda_{z3}^{ccc} \sigma^2 \cos 3\sigma t \right|. \quad (35)$$

Теоретический и экспериментальный силовой отклик жидкости можно сравнить, пользуясь результатами экспериментальных исследований Кашиати и др. [12]. В их работе экспериментальная установка состоит из жесткого конического бака с датчиками нагрузок, прикрепленного к платформе. Бак характеризуется геометрическими

входными параметрами $\theta_0 = \pi/6$ и $r_1 = 0.1$ м, он частично заполнен жидкостью с различными глубинами. Экспериментальная установка размещена на вибростенде, который движется гармонически в горизонтальной плоскости. Этот силовой отклик системы тело-жидкость представляет собой сумму сил инерции жесткого бака и платформы, а также стационарных гидродинамических сил, связанных с колебаниями жидкости. Экспериментальные результаты представлены в безразмерной форме, выступающими в качестве передаточной функции $|P_z|/(m\eta_{2a}\sigma^2)$ для амплитуды силы P_z . Используя третью формулу (23), с учетом того, что фигурирующая здесь масса m равна сумме масс жидкости m_l и массы бака с платформой m_c , а также представление обобщенных координат $p_{0h}(t)$, $r_{11}(t)$, $p_{2h}(t)$, $r_{1k}(t)$ и $r_{3h}(t)$ (15), для стационарной гидродинамической силы получим выражение $P_z = -(m_c + m_l)\ddot{u} - \dot{i}_3$. Тогда безразмерная сила (33b) примет вид

$$\left| \frac{P_z}{m_l\eta_{2a}\sigma^2} \right| = \max \left| - \left(1 + \frac{m_c}{m_l} + \frac{\lambda_{z1}^{ccc} A_c}{m_l\eta_{2a}} + \frac{\lambda_{z1}^{ccc} A_c^3}{m_l\eta_{2a}} \right) \cos \sigma t - \frac{\lambda_{z3}^{ccc} A_c^3}{m_l\eta_{2a}} \cos 3\sigma t \right|, \quad (36)$$

где $m_l = \rho V_l$ – масса жидкости, V_l – объем жидкости, m_c – общая масса платформы и жесткого бака ($m_c = 10.5$ кг в модели испытаний Кашиати и др.). На рис. 2 построен график безразмерного силового отклика, полученный при помощи формулы (36), и приведены экспериментальные данные работы [12] для случая глубины $h = 6$ см (радиус дна $r_1 = 10$ см, радиус невозмущенной свободной поверхности $r_0 = 13.46$ см) и при внешнем возмущении $\eta_{2a} = 1.25$ мм для плоских колебаний. Амплитудно-частотные характеристики для данного случая приведены на рис. 1.

Сравнение силового гидродинамического отклика. Проведем здесь процедуру, аналогичную исследованию влияния высших форм на силовой отклик жидкости путем увеличения количества вторичных собственных координат в представлении свободной поверхности и оценим разницу изменения силового отклика. За базовую модель возьмем все ту же семимодовую модель работы [4]. Добавление по паре вторичных мод второго порядка p_{02} , p_{03} , p_{22} , r_{22} , p_{23} , r_{23} существенно не изменяет значение величин силового отклика устойчивого плоского движения. Разница между исходной 7-модовой моделью и

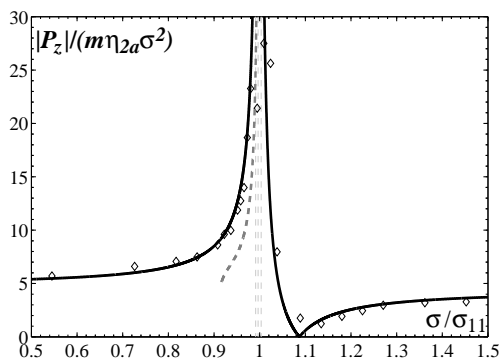


Рис. 2. Силовой отклик колебаний жидкости. Сплошной линией обозначены устойчивые плоские кривые, пунктирной – неустойчивые круговые ветви. Точки, соответствующие точкам K , M и N из рис. 1 находятся за пределами диапазона.

моделью с несколькими вторичными модами составляет не более одного процента и на графике почти не видна. Добавление еще более высших форм дает еще меньший вклад. Аналогичная ситуация наблюдается и для устойчивой пространственной (круговой) волны.

8. Выводы

Развивая метод неконформных отображений Луковского [3] для полостей конической формы, в работе [9] была построена бесконечномодовая модальная система, описывающая резонансные нелинейные колебания жидкости в V -образных усеченных конических баках. Эта система базируется на асимптотике третьего порядка Моисеева-Нариманова, которая предполагает, что бак совершает близкие к гармоническим колебания с частотой, близкой к первой собственной частоте колебаний жидкости. При этом в работе [9], в отличие от предыдущих работ, учитывались кроме двух доминантных обобщенных координат, соответствующих возмущениям двух первых доминантных мод, также еще три бесконечных набора основных обобщенных координат второго порядка, а также четыре бесконечных набора обобщенных координат третьего порядка малости. Как было отмечено ранее, оставляя только первые из мод второго и третьего порядка, можно получить эквивалентную (с точностью до переопределения коэффи-

циентов) модальную систему, аналогичную работе [4], построенной для случая усеченного конуса.

Здесь проведен анализ резонансных колебаний жидкости для исследуемой геометрии полости. Основное внимание было уделено анализу установившегося движения жидкости при строгом гармоническом резонансном возбуждении бака. Как и в случае кругового цилиндрического, конического и срезанного конического бака, построенные ранее нелинейные модальные уравнения позволяют выделить плоские и круговые волновые установившиеся резонансные движения свободной поверхности и определить диапазоны их неустойчивости. Уточнены амплитудно-частотные характеристики, хотя по форме они остаются подобными тем, что были ранее в семимодовой модели. Уточнены результаты о силовом резонансном отклике жидкости. Они были сравнены с известными из литературы экспериментальными данными [12]. Теоретические значения достаточно близки к экспериментальным.

- [1] *Луковский И. А.* Вариационный метод в нелинейных задачах динамики ограниченного объема жидкости со свободной поверхностью // Колебания упругих конструкций с жидкостью. — М.: Волна, 1976. — С. 260–264.
- [2] *Луковський І. О.* До розв'язування спектральних задачах лінійної теорії коливання рідини в конічних баках // Доповіді НАН України. — 2002. — № 5. — С. 53–58.
- [3] *Луковский И. А.* Математические модели нелинейной динамики твердых тел с жидкостью. — К.: Наук. думка., 2010. — 407 с.
- [4] *Луковский И. А., Солодун А. В., Тимоха А. Н.* Нелинейная асимптотическая модальная теория резонансных колебаний жидкости в срезанных конических баках // Акустичний вісник. — 2011. — 14, 4. — С. 37–64.
- [5] *Луковский И. А., Солодун А. В., Тимоха А. Н.* О внутренних резонансах колебания жидкости в конических баках // Прикладна гідромеханіка. — 2013. — 15, 2. — С. 72–84.
- [6] *Луковский И. А., Тимоха А. Н.* Модальное моделирование нелинейных плесканий жидкости в баках с невертикальными стенками. Методика неконформных отображений // Прикладная гидромеханика. — 2000. — 2 (74), 4. — С. 32–47.
- [7] *Моисеев Н. Н.* К теории нелинейных колебаний ограниченного объема жидкости // Прикладная математика и механика. — 1958. — 22. — С. 612–621.

- [8] Нариманов Г. С., Докучаев Л. В., Луковский И. А. Нелинейная динамика летательного аппарата с жидкостью. — М.: Машиностроение, 1977. — 203 с.
- [9] Солодун А. В. Нелинейные модальные модели третьего порядка малости, описывающие колебание жидкости в усеченных конических резервуарах // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2014. — **11**, 4. — С. 280–307.
- [10] Фещенко С. Ф., Луковский И. А., Рабинович Б. И., Докучаев Л. В. Методы определения присоединённых масс жидкости в подвижных полостях. — К.: Наук. думка., 1969. — 250 с.
- [11] Varnyak M., Gavriluk I., Hermann M., Timokha A. Analytical velocity potentials in cells with a rigid spherical wall // ZAMM. — 2011. — **91**, 1. — P. 38–45.
- [12] Casciati F., De Stefano A., Matta E. Simulating a conical tuned liquid damper // Simulation Modelling Practice and Theory 11. — 2003. — **11**. — P. 353–370.
- [13] Faltinsen O. M., Rognebakke O. F., Lukovsky I. A., Timokha A. N. Multidimensional modal analysis of nonlinear sloshing in a rectangular tank with finite water depth // Journal of Fluid Mechanics. — 2000. — **407**. — P. 201–234.
- [14] Faltinsen O. M., Timokha A. N. Sloshing Cambridge. Cambridge University Press. — 2009. — 608 p.
- [15] Faltinsen O. M., Timokha A. N. Multimodal analysis of weakly nonlinear sloshing in a spherical tank // Journal of Fluid Mechanics. — 2013. — **719**. — P. 129–164.
- [16] Gavriluk I., Hermann M., Lukovsky I., Solodun A., Timokha A. Natural sloshing frequency in rigid truncated conical tank // Jour. Engeneering Computations. — 2008. — **25**, 6. — P. 518–540.
- [17] Gavriluk I. P., Hermann M., Lukovsky I. A., Solodun O. V., Timokha A. N. Weakly nonlinear sloshing in a truncated circular conical tank // Fluid Dyn. Res. — **45**. — 2013. Paper ID 055512, — P. 1–30.
- [18] Gavriluk I., Lukovsky I., Timokha A. Linear and nonlinear sloshing in a circular conical tank // Jour. Fluid Dynamic Research. — 2005. — **35**. — P. 399–429.
- [19] Lukovsky I., Timokha A. Combining Narimanov-Moiseev and Lukovsky-Miles schemes for nonlinear liquid sloshing // Jour. of Numeriacal and Applied Mathematics. — 2011. — № 2 (105). — P. 69–82.
- [20] Miles J. W. Nonlinear surface waves in closed basins // J. Fluid Mech.. — 1976. — **75**. — P. 419–448.