Збірник праць Інституту математики НАН України 2015, т. 12, № 5, 140–159

УДК 517.518.[8+34+85]:517.982.22

Метод ітеративної апроксимації функцій з використанням інтерполянтів у банахових просторах

Д. О. Ситник

Інститут математики НАН України, Київ; sytnik@imath.kiev.ua

We study the problem on how to reuse previously calculated values of approximated function in the scheme of iteratively refining sequence of approximations provided by the interpolatory type formulas. The proposed method is based upon a collocation of the current–step's interpolant to the given function on the set of points where the function values were already evaluated during the calcualtion of previous-step's approximations. Theoretical considerations are supported by several numerical examples.

В статье изучается проблема повторного использования ранее вычисленных значений аппроксимируемой функции для нахождения ее более точных приближений в схеме итеративно уточняющейся последовательности аппроксимаций интерполяционного типа. Предложен метод решения этой проблемы, который основан на принципе коллокации текущего интерполянта заданой функции в точках, где значения этой функции уже были вичислены во время построения аппроксимаций на предыдущих шагах. Теоретические выкладки подтверждены численными экспериментами.

Вступ

У більшості прикладних задач, де використовується апроксимація функцій, доводиться мати справу із ситуацією, коли немає можливості точно апріорно оцінити похибку тієї чи іншої апроксимаційної схеми. Єдиною альтернативою у такій ситуації є використання апостеріорних методів оцінки похибки. Апостеріорні методи оцінки похибки, як правило, спираються на обчислення декількох апроксимаційних наближень функції, що відповідають різним значенням параметра дискретизації. Якщо отримана апостеріорна оцінка похибки перевищує задану, то вибирається більш оптимальний в сенсі точності набір значень параметра дискретизації і отримується нова апостеріорна оцінка. Подібний процес ітераційно продовжується до моменту, поки не буде досягнено необхідної точності. Наочним прикладом змальованого підходу з апостеріорними оцінками є застосування квадратури для обчислення визначеного інтегралу з деякою наперед заданою точністю. На практиці такий підхід призводить до того, що деяка кількість точних значень функції, обчислених на проміжних кроках ітераційного алгоритму, має суто допоміжний характер і ніяк не використовується при побудові фінального наближення.

Ми пропонуємо схему, яка дозволяє більш ефективно використовувати попередньо обчислені наближення функції під час обчислення її більш точних апроксимаційних наближень. Це дає можливість відчутно зменшити кількість операцій прямого обчислення значень функції у ітераційних алгоритмах, подібних до описаного вище, і таким чином призводить до приросту швидкодії у випадку, коли такі операції є "коштовними"в обчислювальному сенсі.

Запропонована нами схема істотно використовує той факт, що вибраний апроксимант – це інтерполяційний поліном побудований по деякій лінійно незалежній системі функцій, визначених на $I \subseteq \mathbb{R}$, такий, що: 1) наявна теоретична оцінка похибки апроксимації має глобальний характер; 2) послідовність інтерполяційних поліномів реалізує апроксимаційну властивість у заданому просторі функцій. Запропонований у роботі підхід — досить загальний, він може бути застосований до різних апроксимаційних формул, серед яких поліноміальна інтерполяція, Sinc–апроксимація, тригонометричні наближення та ін.

1. Постановка задачі

Нехай $\mathcal{V} \equiv V(T, X)$ – лінійний простір функцій $x(t)$, $t \in T$ зі значеннями у банаховому просторі $(X, \|\cdot\|_X)$ такий що відображення $\phi : t \to \|x(t)\|_X$ належить до банахового простору $V(T, R)$.

Припустимо, також, що $\forall x \in \mathcal{V}$ та будь-якого фіксованого додатного $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ існує скінченний базис $\left(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_{n(\varepsilon)}\right) \in V(T, R)$,

$n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ та пов'язаний з ним інтерполянт

$$C_{\langle \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \rangle} x = \sum_{k=1}^{n} x\left(t_k\right) \phi_k\left(t\right) \tag{1}$$

де $t_i \in \Lambda\left(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n\right)$, для якого

$$\mathcal{E}_{\langle \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \rangle}(x) \equiv \left\| x - C_{\langle \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \rangle} x \right\|_{\mathcal{V}} < \varepsilon. \tag{2}$$

Тут $\|\cdot\|_{\mathcal{V}}$ — це норма у просторі $\mathcal{V}$, визначена наступним чином

$$\|x\|_{\mathcal{V}} = \left\| \|x(t)\|_X \right\|,$$

де $\|\cdot\|$ — норма $V(T, R)$. Множину $\Lambda\left(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n\right)$ вузлів t_i, $i = \overline{1, n}$ називатимемо інтерполяційною сіткою для базису $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$. Простір $\mathcal{V}$, обладнаний щойно введеною нормою $\|\cdot\|_{\mathcal{V}}$, є банаховим. На додачу до поелементної похибки (2) зручно також мати позначення для глобальної оцінки похибки $\overline{\mathcal{E}_{\langle \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \rangle}} \equiv \sup\limits_{x \in \mathcal{V}} \left\{ \mathcal{E}_{\langle \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \rangle}(x) \right\}$.

Припустивши, що нам відомо, як по заданій похибці $\varepsilon > 0$ з (2) побудувати в просторі $\mathcal{V}$ інтерполянт (1), сформулюємо задачу, яка досліджуватиметься далі в роботі:

За заданою спадною послідовністю похибок $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^{N}$, *побудувати послідовність наближень* (1) — (2) *таких, що для побудови кожного потрібно не більше* $n_i = n\left(\varepsilon_i\right)$ *різних значень* $x(t)$ *і при цьому загальна кількість* $S(N)$ *обчислених значень функції* $x(t)$ *є мінімальною.*

Подібна задача оптимізації стає актуальною у випадку, коли обчислювальна складність процедури знаходження значень $x(t)$ переважає сукупну обчислювальну складність інших операцій при побудові наближення (1). В такому випадку загальна обчислювальна складність і, як наслідок, ефективність знаходження N послідовних наближень прямо залежить від $S(N)$. Залишаючись в рамках запропонованого вище інструментарію, легко бачити, що для довільного розв'язку сформульованої задачі $\underline{S(N)} \leq S(N) \leq \overline{S(N)}$. Максимальне значення $\overline{S(N)} = \sum\limits_{i=1}^{N} n_i$ досягатиметься коли у сіток пов'язаних інтерполянтами (1) всі вузли різні . Мінімальне значення $\underline{S(N)} = n_N$ досягатиметься, коли сітки $\Lambda_i = \Lambda\left(\phi_{i1}, \phi_{i2}, \ldots, \phi_{im_i}\right)$ вкладаються одна в одну

$$\Lambda_1 \subseteq \Lambda_2 \subseteq \ldots \subseteq \Lambda_N, \tag{3}$$

і, при цьому, спадання послідовності ε_i узгоджене з властивостями апроксимант так, щоб розмірність відповідних інтерполяційних базисів була оптимальною $m_i = n_i$ для всіх $i = \overline{1, N}$.

Якщо правило побудови базису по заданому ε_i однотипне, то вкладення $\Lambda_i \subset \Lambda_{i+1}$ досягається при $m_{i+1} = q_i m_i$, $q_i \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Внаслідок того, що на кожному кроці кількість вузлів m_i як мінімум подвоюється, послідовність похибок $\mathcal{E}_i$ (див. формулу (2)) завжди матиме строго визначену у сенсі швидкості спадання поведінку. Це спостереження дає чітке розуміння того, яку асимптотику потрібно вимагати від ε_i для того, щоб $S(N) = \underline{S(N)}$. Так для випадку Sinc–апроксимації на $\mathbb{R}$ [15] або поліноміальної інтерполяції по чебишевських вузлах на $[a, b] \subset \mathbb{R}$ виконання (3) еквівалентно нерівності $\varepsilon_i \leq ce^{-bp_i}$. Сталі $c, b \in R_{>0}$ залежать від характеристик простору $\mathcal{V}$, а числа $p_i \in \mathbb{N}$ залежать від $q_i \geq 2$. Подібні обмеження можна отримати і для інших відомих схем, що вкладаються у (1) – (2), прямим застосуванням відповідних апріорних оцінок. Відомий спосіб обходу проблеми зі швидкістю спадання ε_i, який полягає у використанні різних апроксимаційних схем у залежності від співвідношення між ε_i та ε_{i+1} був запропонований Кронродом [12] і розвинений в роботах Петерсона [19]. Ідея підходу полягає у специфічному виборі послідовності вкладених сіток так, щоб кожна Λ_i була інтерполяційною сіткою, асоційованою з деяким класичним поліноміальним інтерполянтом. Різні сітки відповідають поліноміальним інтерполянтам різних типів, які, взагалі кажучи мають різну (інколи навіть за порядком) оцінку похибки. Подібно до схем, згаданих вище, такі умови на вузли інтерполяції, на жаль, строго обмежують порядок зростання послідовності n_i, яка у цьому випадку [19] знову зростає не повільніше, ніж $c2^{q_i}$, $q_i \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Тому такий підхід тільки частково вирішує сформульовану вище задачу підбору оптимальної в сенсі величини $S(N)$ послідовності наближень при заданій послідовності $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^{N}$.

У застосуваннях до чисельного розв'язування еволюційних задач для диференціальних рівнянь часто виникає ситуація, коли використовуються різні у сенсі порядку спадання похибок методи наближення по часовій та просторовій компоненті. Наближення просторової компоненти розв'язку за допомогою методу скінченних елементів (МСЕ), наприклад, зазвичай є менш ефективним у сенсі похибки і, водночас, має набагато вищу обчислювальну складність у порівнянні доступними методами [9] наближення по часу. Тому метод наближення часової компоненти вибирається оптимальним у сенсі швидкості спадання похибки для мінімізації загальної кількості обчислень. У такій ситуації перехід від ε_i до ε_{i+1} у послідовності похибок, яка (при використані МСЕ динамічно) визначається чисельним методом по просторовій компоненті, може бути, відповідно до апріорної оцінки, наприклад, забезпеченим незначним збільшенням параметру дискретизації n_i методу наближення часової компоненти. При цьому для мінімізації $S(N)$ бажано повторно використати раніше обчислені значення просторової компоненти наближення. За умови їх правильного застосування згадані тут методи дозволяють повторно використати тільки частину раніше обчислених значень.

Для того, щоб знайти близький до оптимального розв'язок сформульованої задачі у наступній главі ми дослідимо метод побудови деякого наближення до інтерполянту $C_{\langle\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_n\rangle}(t)x$. Воно отримується за допомогою колокації цього інтерполянту у точках, де значення функції $x(t)$ — відомі. Розташування цих точок не залежить від сітки $\Lambda\left(\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_n\right)$ і може бути вибрано так, щоб співпадало з раніше обчисленими значеннями $x(t)$.

2. Інтерполяція функції за її значеннями поза інтерполяційною сіткою

Задача наближення функції за її значеннями заданими на деякій сітці відмінній від тієї, що асоційована з інтерполянтом часто виникає у цифровій обробці сигналів та у прикладних сферах, що пов'язані з обробкою та розпізнаванням зображень. Одразу зазначимо, що у згаданих застосуваннях та теоретичних дослідженнях, з ними пов'язаних, прийнято вживати термін "відновлення", на відміну від вживаного вище терміну "наближення" (апроксимація). Різниця полягає у тому, що відновлення передбачає можливість представлення шуканої функції у вигляді розкладу в ряд по зчисленному базису. Такі вимоги не відповідають припущенням глави 1, тому ми розрізняємо поняття "відновлення" (точне або неточне) та поняття "наближення" яке є більш загальним.

Перші згадки стосуються проблеми відновлення функції з обмеженим частотним спектром за її значеннями на нерівномірній сітці, використовуючи для цього нерівномірний аналог розкладу в ряд Фур'є [5]. Більшість наступних робіт присвячених даній тематиці стосується точного відновлення функції $f \in V_j \subset \mathbb{L}^p$ по її значеннях, що задані на деякій нерівномірній сітці (див., наприклад, [2,3,13,18] та бібліографію в цих джерелах). Термін “нерівномірна сітка”, який також часто використовується у роботах по відновленню, тут означатиме: сітка, яка для заданого $C(t)$ з (1) не співпадає з інтерполяційною.

Велика кількість більш сучасних робіт присвячена задачам неточного (чисельного) відновлення функції [1, 4, 6, 7, 20, 23, 24]. Об’єднуючою рисою згаданих робіт є те, що всі вони базуються на ідеології сформульованій у [5]. Ця ідеологія полягає у побудові та дослідженні нових апроксимаційних операторів пов’язаних із заданою нерівномірною сіткою Λ'. Подальше чисельне відновлення $f(t)$ здійснюється використовуючи ітераційне рівняння пов’язане з побудованим інтерполянтом. Альтернативна техніка відновлення невідомих значень функції $f \in L^2$ за відомими значеннями деяких заданих лінійних функціоналів від цієї функції була запропонована у роботі [18]. Подібно до інших робіт тут автор розглядає задачу точного відновлення функції f (умови точного відновлення для більш широкого класу функцій досліджуються у [3]), використовуючи для цього підхід подібний до колокації.

Далі ми запропонуємо метод наближення функції за її значеннями на нерівномірній сітці та знайдемо оцінку похибки такого методу, використовуючи інструментарій визначений у главі 1.

Лема 2.1. *Припустимо, що для будь-якого $x \in \mathcal{V}$ існує інтерполянт $C\,(t)\,x = C_{\langle \phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_n\rangle}\,(t)\,x$ визначений за допомогою (1) на сітці $\Lambda = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ та такий, що похибка $\mathcal{E}_n(x) \equiv \|x - Cx\|_{\mathcal{V}}$ цього інтерполянту задовольняє нерівність*

$$\mathcal{E}_n(x) \leq \varepsilon \, \|x\|_{\mathcal{V}} \, , \tag{4}$$

з деяким додатнім $\varepsilon < 1$. Нехай для деякого заданого $x \in \mathcal{V}$ на множині T визначена ще одна сітка $\Lambda' = \{t'_1, t'_2, \ldots, t'_n\}$, причому існує $y(t) \in \mathcal{V}$ таке, що $x(t'_i) = y(t_i)$, для всіх $i = 1, 2, \ldots n$.

Тоді існує елемент $x' \in \mathcal{V}$, для якого виконуються рівності

$$C\,(t'_i)\,x' = x(t'_i), \quad i = \overline{1, n}$$

та такий, що

$$\|x'\|_{\mathcal{V}} \leq \frac{1}{1-\varepsilon}\, \|y\|_{\mathcal{V}} \tag{5}$$

Доведення. Зрозуміло, що твердження леми є тривіальним для випадку коли $\Lambda' = \Lambda$, тому далі вважатимемо, що сітки Λ та Λ' не співпадають.

Згідно з умовою леми існує функція $y(t) \in \mathcal{V}$ така, що $y(t_i) = x(t'_i) = b_i$, $i = \overline{1,n}$, а отже норма функції $y_1(t) \equiv (I - C(t))y$

$$\|y_1\|_{\mathcal{V}} = \|(I - C)y\|_{\mathcal{V}} \leq \varepsilon \|y\|_{\mathcal{V}},$$

причому $y_1(t) \in \mathcal{V}$. Нехай $y_2(t) \equiv (I - C(t))y_1$, ця функція також належить до $\mathcal{V}$, оскільки оператор C перетворює згаданий простір "в себе". Тому

$$\|y_2\|_{\mathcal{V}} = \left\|(I - C)^2 y\right\|_{\mathcal{V}} \leq \varepsilon^2 \|y\|_{\mathcal{V}}.$$

Продовжуючи цей процес, отримаємо аналогічні нерівності для норм степенів $(I - C)^k y$, $k \in N$.

Сукупність отриманих нерівностей, той факт, що $y \in \mathcal{V}$, а також банаховість $\mathcal{V}$ гарантують сильну збіжність ряду з y_i до деякого x', що належить $\mathcal{V}$

$$x'(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (I - C(t))^k y, \tag{6}$$

причому

$$\|x'\|_{\mathcal{V}} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \|y\|_{\mathcal{V}} = \frac{1}{1 - \varepsilon} \|y\|_{\mathcal{V}}.$$

Для того щоб переконатись у виконанні $C(t'_i)\, x' = x(t'_i)$ достатньо просумувати (6)

$$\sum_{k=0}^{\infty} (I - C(t))^k y = (I - (I - C(t)))^{-1} y = C^{-1}(t) y.$$

□

Розклад (6) має невелику практичну цінність з точки зору наближення функції $x(t)$ за її значеннями на Λ', оскільки цей розклад залежить від невідомої $y(t)$ і тому не підходить для побудови згаданого наближення.

Маючи на меті отримання дискретного аналогу (6), введемо до розгляду оператор $D(\Lambda') : X^n \to X^n$, який ставить у відповідність впорядкованому набору елементів $z_i \in X, i = \overline{1,n}$ відповідний набір значень інтерполянта C на сітці Λ' за правилом $D(\Lambda')\,\mathbf{z} = \Phi\mathbf{z}$,

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1(t'_1) & \phi_2(t'_1) & \cdots & \phi_n(t'_1) \\ \phi_1(t'_2) & \phi_2(t'_2) & \cdots & \phi_n(t'_3) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_1(t'_n) & \phi_2(t'_n) & \cdots & \phi_n(t'_n) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}.$$

Нехай $\mathbf{x} = (x(t_1), \ldots, x(t_n))^T$ та $\mathbf{x}' = (x'(t_1), \ldots x'(t_n))^T$ — невідомі вектори значеннь $x(t)$ та $x'(t)$ на Λ, а $\mathbf{b} = (x(t'_1), \ldots, x(t'_n))^T$ — відомий вектор значень $x(t)$ на Λ'.

Лема 2.2. *Якщо для деяких заданих $C(t)$, $x(t) \in \mathcal{V}$ з (1) та Λ'_n виконуютьcя всі умови леми 2.1, то похибка наближення* $\mathbf{x}'$

$$\mathbf{x}' = \sum_{k=0}^{\infty} (\mathrm{I} - \Phi)^k \mathbf{b}, \tag{7}$$

значень функції $x(t)$ на сітці Λ_n за її значеннями $\mathbf{b}$ на Λ'_n задовольняє нерівність

$$\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|_n}{\|x\|_n} \leq K \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon}, \tag{8}$$

де K — константа, що залежить від $C(t)$, Λ' та узгодженості норми $\|\cdot\|_n$ простору X^n з нормою $\mathcal{V}$.

Доведення. Шуканий вектор $\mathbf{x}'$ задовольняє рівняння

$$D(\Lambda')\,\mathbf{x}' = \mathbf{b},$$

яке є фактично колокацією невідомої функції $x'(t)$ на Λ за її значеннями на Λ'. Розв'язок рівняння може бути представлений у вигляді

$$\mathbf{x}' = D^{-1}(\Lambda')\,\mathbf{b} = (\mathrm{I} - (\mathrm{I} - D(\Lambda')))^{-1}\,\mathbf{b} = \\ = \sum_{k=0}^{\infty} (\mathrm{I} - \Phi)^k \mathbf{b}.$$

Збіжність ряду є наслідком поточкової збіжності ряду (6), а отже цей ряд збігається для всіх $\mathbf{b}$ для яких збігається (6).

Нехай $\mathbf{b}' = (C(t'_1)x, \ldots C(t'_n)x)^T$, тоді за означенням $D(\Lambda')$

$$\Phi\mathbf{x} = \mathbf{b}',$$

а, використовуючи результати леми 2.1,

$$\Phi\mathbf{x}' = \mathbf{b}.$$

Звідки, віднявши рівності почленно, отримуємо

$$\Phi(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \mathbf{b}' - \mathbf{b}, \\ \mathbf{x} - \mathbf{x}' = \Phi^{-1}(\mathbf{b}' - \mathbf{b}).$$

Перейшовши до норм, матимемо

$$\left\|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\right\|_n = \left\|\Phi^{-1}\left(\mathbf{b}'-\mathbf{b}\right)\right\|_n = \left\|\sum_{k=0}^{\infty}(\mathrm{I}-\Phi)^k\left(\mathbf{b}'-\mathbf{b}\right)\right\|_n \le K\frac{\varepsilon\left\|x\right\|_n}{1-\varepsilon}.$$

□

Теорема 2.1. *Припустимо, що для будь-якого $x \in \mathcal{V}$ існує інтерполянт $C\,(t)\,x$, визначений за допомогою (1) на сітці $\Lambda = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ та такий, що похибка $\mathcal{E}_n(x) \equiv \|x - Cx\|_{\mathcal{V}}$ цього інтерполянта задовольняє нерівність*

$$\mathcal{E}_n(x) \le \varepsilon \left\|x\right\|_{\mathcal{V}}, \tag{9}$$

з деяким додатнім $\varepsilon < 1$. Нехай на заданій сітці $\Lambda' = \{t'_1, t'_2, \ldots, t'_n\}$, відомі значення $x \in \mathcal{V}$, причому

$$\exists\ y(t) \in \mathcal{V}\ \ \textit{таке, що}\ \ x(t'_i) = y(t_i) \quad i = 1, 2, \ldots n. \tag{10}$$

Тоді існує апроксимант

$$C'\,(t)\,x \equiv \sum_{k=1}^{n} x'_k \phi_k\,(t)\,, \tag{11}$$

що побудований на основі наближених значень $x'_k = x'(t_k)$ функції $x(t)$ обчислених з рівняння

$$\Phi\mathbf{x}' = \mathbf{b}, \tag{12}$$

де $\mathbf{x}' = (x'_1, \ldots x'_n)^T$, $\mathbf{b} = (x(t'_1), \ldots, x(t'_n))^T$. Похибка $\mathcal{E}'(x)$ наближення $C'(t)x$ задовольняє нерівність

$$\mathcal{E}'(x) \equiv \|x - C'x\|_{\mathcal{V}} < \varepsilon\left(1 + \frac{K_1 L}{1-\varepsilon}\right)\|x\|_{\mathcal{V}}, \tag{13}$$

де L — деяка, залежна від базису ϕ_k, стала, а K_1 – стала залежна від $C(t)$, Λ' та норм просторів X_n, $\mathcal{V}$.

Доведення. Згідно з лемою 2.1 існує $x' \in \mathcal{V}$, значення якого на сітці Λ задовольняють рівняння (12). Разом з тим лема 2.2 гарантує існування розв'язку (12) як суми ряду (7), який є наближенням $x(t)$ на Λ. Лишилось довести виконання нерівності (13):

$$\|x - C'x\|_{\mathcal{V}} = \|x - Cx + Cx - C'x\|_{\mathcal{V}} \leq \|x - Cx\|_{\mathcal{V}} + \|Cx - C'x\|_{\mathcal{V}}$$
$$\leq \mathcal{E}_n(x) + \sum_{k=1}^{n} \|\phi_k(t)(x(t_k) - x'(t_k))\|_{\mathcal{V}} = \mathcal{E}_n(x) + \sum_{k=1}^{n} \|\phi_k(t)\| \, \|x_k - x'_k\|_X$$
$$\leq \varepsilon \|x\|_{\mathcal{V}} + K_1 L \frac{\varepsilon \|x\|_{\mathcal{V}}}{1-\varepsilon} = \varepsilon \left(1 + \frac{K_1 L}{1-\varepsilon}\right) \|x\|_{\mathcal{V}}.$$

□

Доведення теореми спирається на леми 2.1 та 2.2, а ті використовують умову (10). Вона є аналогом умов приналежності елементу x до простору інваріантних відносно зсуву у абстрактній теорії нерівномірного відновлення [8, 10]. Умови такого роду залежать від сітки Λ', характеристик простору $\mathcal{V}$ та конкретної реалізації інтерполянта $C(t)x$. Для випадку Sinc–апроксимації такі умови встановлюються теоремою 3.1.6 [21, с. 140], їх застосування до схеми запропонованої в даній главі досліджується у статті [16].

Поклавши $T = L^2$, $X = \mathbb{C}$ та наділивши утворений векторний простір стандартною L^2 нормою, отримаємо $\mathcal{V} = V(L^2, \mathbb{C})$. Більшість статей присвячених відновленню функції за її відомими значеннями на нерівномірній сітці Λ' має справу саме з таким $\mathcal{V}$, розглядаючи в якості базису для інтерполянта $C(t)$ базис, який спирається виключно на вузли Λ'. В якості базисних функцій використовуються Sinc–функції [2, 7], сплайни [4, 11] або класична система Фур'є [1]. Умова (9) гарантує, що базис $\{\phi_k\}$ — фрейм [5] з асоційованим фрейм–оператором для якого існує обмежений спряжений оператор (див. [2] для огляду по теорії фреймів). Тому, для того, щоб побачити аналогію зі згаданими вище роботами по нерівномірному відновленню, достатньо для $x \in V(L^2, \mathbb{R})$ додатково вимагати $x(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k(t)$, де $\phi_k \in L^2$, $\{c_k\} \in l^2(\mathbb{Z})$. При такому $x(t)$ умова (10) гарантовано виконується, а отже відновлення $x(t)$ за допомогою колокації (11)–(12) стає еквівалентним відновленню з використанням базису побудованого на Λ' (у деяких випадках перетворення реалізуюче таку еквівалентність може бути виписане явно, див., наприклад, [7, Lemma 4]).

Ключовою з точки зору цієї роботи характеристикою підходу, викладеного вище, є можливість його застосування до просторів де зчисленний базис φ_k не є точним. До таких належать простори Харді $H^1(D_d)$, пов'язані з експоненціально-збіжними Sinc методами [21]. Іншою важливою перевагою в порівнянні з існуючими методами нерівномірного відновлення є те, що сформульований підхід побудови $C'(t)x$ використовує тільки базис асоційований з інтерполянтом $C(t)$, апроксимаційні властивості якого відомі і не залежать від вибору Λ'. Це поширює сферу застосування подібних методів нерівномірного наближення (яке, строго кажучи, вже не являється відновленням) на апроксимацію за допомогою класичних інтерполяційних поліномів. Відмова від застосування Λ' на користь інтерполяції по Λ є вирішальним кроком при використанні класичних поліноміальних інтерполянтів [14].

Збіжність ряду (6), звісно, залежить від Λ', але алгоритм обчислення x' з використанням іншого наближення розв'язку (12), зокрема усіченого ряду (6) залишатиметься стійким по Λ' якщо ε з (9) — досить мале (для порівняння див. властивості збіжності подібного ряду в [6, 7]). Наступні наслідки характеризують вклад похибок відомих значень $x(t)$ на Λ' та похибки розв'язування колокаційної системи (12) у фінальну похибку методу.

Наслідок 2.1. *Нехай для деякого $x_\delta \in \mathcal{V}$, що задовольняє нерівність $\|x - x_\delta\|_\mathcal{V} \le \delta \|x\|_\mathcal{V}$, виконуються всі умови теореми 2.1. Тоді апроксимант $C'(t)x_\delta$ буде наближенням $x(t)$, похибка якого задовольняє оцінку*

$$\frac{\|x - C'x_\delta\|_\mathcal{V}}{\|x\|_\mathcal{V}} \le \varepsilon \left(1 + \frac{K_1 L}{1-\varepsilon}\right) + \delta \min\left\{1, \frac{K_1 L}{1-\varepsilon}\right\}$$

Доведення. З одного боку,

$$\begin{aligned}\|x - C'x_\delta\|_\mathcal{V} = \|x - Cx + Cx - C'x_\delta\|_\mathcal{V} &\le \|x - Cx\|_\mathcal{V} + \|Cx - C'x_\delta\|_\mathcal{V}\,, \\ &\le \varepsilon \|x\|_\mathcal{V} + K_1 L \frac{\varepsilon + \delta}{1-\varepsilon} \|x\|_\mathcal{V}\,,\end{aligned}$$

а з іншого —

$$\begin{aligned}\|x - C'x_\delta\|_\mathcal{V} = \|x - x_\delta + x_\delta - C'x_\delta\|_\mathcal{V} &\le \|x - x_\delta\|_\mathcal{V} + \|C'x_\delta - x_\delta\|_\mathcal{V} \\ &\le (\delta + \varepsilon) \|x\|_\mathcal{V} + K_1 L \frac{\varepsilon \|x\|_\mathcal{V}}{1-\varepsilon}.\end{aligned}$$

Об'єднавши щойно виведені нерівності в одну, отримаємо шукану оцінку. □

Похибка застосування скінченного аналогу (6) характеризується наступним чином.

Наслідок 2.2. *Заміна точного розв'язку* (6) *рівняння* (12) *його наближенням* $\mathbf{x}''(m) \equiv (x_1'(m), \dots x_n'(m))^T$

$$\mathbf{x}''(m) = \sum_{k=0}^{m} (\mathrm{I} - \Phi)^k \mathbf{b}, \tag{14}$$

призводить до того, що похибка $\mathcal{E}_m''(x)$ *апроксиманту* $C''(t)x$, *який визначається заміною у* (11) x_k' *на* $x_k''(m)$ *набуває вигляду*

$$\mathcal{E}_m''(x) \equiv \|x - C''x\|_{\mathcal{V}} \leq \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \left(K \|x\|_{\mathcal{V}} + \varepsilon^m \|\mathbf{b}\|_n \right). \tag{15}$$

Доведення. Позначимо $\Phi_m = \left(\sum\limits_{k=0}^{m} (\mathrm{I} - \Phi)^k \right)^{-1}$ і, подібно до леми 2.2, запишемо рівності, які виконуються для векторів $\mathbf{x}$ та $\mathbf{x}''$

$$\Phi \mathbf{x} = \mathbf{b}',$$

$$\Phi_m \mathbf{x}'' = \mathbf{b}.$$

Матриці Φ, Φ_m — невироджені, а тому

$$\begin{aligned}\mathbf{x} - \mathbf{x}'' = \Phi^{-1}\mathbf{b}' - \Phi_m^{-1}\mathbf{b} &= \Phi^{-1}(\mathbf{b}' - \mathbf{b}) + \Phi^{-1}\mathbf{b} - \Phi_m^{-1}\mathbf{b} \\ &= \Phi^{-1}(\mathbf{b}' - \mathbf{b}) + \sum_{k=m+1}^{\infty} (\mathrm{I} - \Phi)^k \mathbf{b}.\end{aligned}$$

Перейшовши до норм, матимемо

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x} - \mathbf{x}''\|_n \leq \left\|\Phi^{-1}(\mathbf{b}' - \mathbf{b})\right\|_n &+ \left\| \sum_{k=m+1}^{\infty} (\mathrm{I} - \Phi)^k \mathbf{b} \right\|_n \\ \leq & K \frac{\varepsilon \|x\|_{\mathcal{V}}}{1-\varepsilon} + \frac{\varepsilon^{m+1}}{1-\varepsilon} \|\mathbf{b}\|_n .\end{aligned}$$

□

З точки зору обчислювальної складності представлення розв'язку рівняння (12) рядом (14) не обов'язково буде найоптимальнішим. Для досить малих n (для яких ε близький до 1) цей ряд збігатиметься повільно. В таких випадках пряме обернення Φ буде більш ефективним у сенсі кількості обчислювальних операцій.

3. Алгоритм методу

У главі 2 ми показали, як, маючи досить точну в сенсі (9) інтерполяційну формулу, побудувати наближення до деякої функції $x(t)$, використовуючи її значення на нерівномірній по відношенню до інтерполянта сітці. Розроблений метод дає можливість побудувати послідовність апроксимантів $C'_i(t)$, $i = \overline{1, N}$, які є розв'язком задачі сформульованої у главі 1. Метод побудови $C'_i(t)$ не накладає обмежень на структуру сітки Λ'_i, але вибір сітки впливає на точність наближення $C'_i(t)$ через величину K_1 з теореми 2.1. Ця константа залежить від кількості вузлів n_i та відстані між вузлами Λ'_i й відповідними їм Λ_i. Тому нову сітку Λ'_{i+1} можна побудувати на основі існуючої Λ'_i додаванням $n_{i+1} - n_i$ вузлів. Такий спосіб побудови послідовності сіток та апроксимантів $C'_i(t)$, наближаючих $x(t)$, буде близьким до оптимального (для якого $S(N) = \underline{S(N)} \equiv \sum_{i=1}^{N} n_i$), оскільки всі попередньо обчислені значення $x(t)$ будуть повторно використовуватись у подальших наближеннях. Перед тим, як формулювати алгоритм, що використовуватиме такий підхід до побудови послідовності $C'_i(t)$, з'ясуємо характер залежності кількості вузлів сітки від фінальної похибки наближення з використанням $C'(t)$, яку позначатимемо $\varepsilon' \in [0; 1)$.

Похибка апроксиманту $C'(t)$ повинна задовольняти нерівність

$$\overline{\mathcal{E}'(\varepsilon)} \equiv \varepsilon \left(1 + \frac{K_1 L}{1 - \varepsilon}\right) \|x\|_{\mathcal{V}} < \varepsilon'. \tag{16}$$

Перейшовши до рівності та спростивши, отримаємо квадратне рівняння відносно ε:

$$\varepsilon^2 - (K_1 L + 1 + \varepsilon')\varepsilon + \tau = 0, \quad \tau \equiv \varepsilon' / \|x\|_{\mathcal{V}}.$$

Менший розв'язок τ_c цього рівняння матиме вигляд

$$\tau_c = \frac{K_1 L + \tau + 1 - \sqrt{(K_1 L + \tau + 1)^2 - 4\tau}}{2}.$$

Звідки випливає оцінка для розв'язку (16) відносно ε:

$$\varepsilon \leq \frac{\tau}{K_1 L + 1 + \tau} \leq \tau_c. \tag{17}$$

Формула (17) дає відповідь на питання скільки додаткових по відношенню до оптимальної кількості $\underline{S(N)}$ явних обчислень $x(t)$ потрібно для побудови послідовності $C_i'(t)$, так, щоб похибки ε_i' апроксимантів $C_i'(t)$ підпорядковувались членам $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^N$. У ситуації коли необхідні значення $x(t)$ обчислюються з похибкою, що розглянута у наслідку 2.1, аналогічна оцінка матиме вигляд $\varepsilon \leq \frac{\tau-\delta}{K_1 L+1+\tau-\delta}$, якщо добуток $K_1 L$ такий, що $K_1 L/(1-\varepsilon) > 1$ для будь-якого $\varepsilon > 0$. Дещо складнішою є ситуація, коли розв'язок рівняння (12) наближається скінченним рядом (14) (див. наслідок 2.2). Для довільного m функція похибки (15) може бути обернена за допомогою теореми Лагранжа про обернення рядів. У частковому випадку $m = 1$, матимемо

$$\varepsilon \leq \frac{\sqrt{(\tau+K)^2 + 4\tau \|\mathbf{b}\|_n} - (\tau+K)}{2\|\mathbf{b}\|_n}. \tag{18}$$

Алгоритм 1: Ітеративна апроксимація

Data: $x(t)$, послідовність похибок $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^N$, а також апріорні оцінки $\mathcal{E}_n(x)$, $\overline{\mathcal{E}}(n) \equiv \sup\limits_{x\in\mathcal{V}} \mathcal{E}_n(x)$

Result: Послідовність апроксиматнів $x_i'(t) = C_i'(t)x$

begin

  // $\mathtt{Vec}(M)$ — вектор який складається з елементів послідовності M

  // V, Δ — послідовності обчислених значень $x(t_j)$ та вузлів t_j.

  $S := 0$; $V := \{\}$; $\Delta := \{\}$;   // V, Δ — пусті на початку.

  for $i := 1 \ldots N$ **do**

1     $n_i := \left\lfloor \overline{\mathcal{E}}^{-1}\left(\frac{\varepsilon_i}{K_1 L+1+\varepsilon_i/\|x\|_{\mathcal{V}}}\right)\right\rfloor + 1$;

    $\Delta_i' := \Lambda_i \overset{\text{dist}}{\setminus} \Delta$;   // Сітка для точного обчислення $x(t_k)$.

    // Обчислюємо потрібні $x(t_k)$ та нерівномірну сітку $\Lambda_i' \equiv \Delta$

    $V_i' := x(\Delta_i')$; $V := \{V, V_i'\}$; $\Delta := \{\Delta, \Delta_i'\}$;

    // Формуємо праву частину та матрицю рівняння (12).

    $\mathbf{b} := \mathtt{Vec}(V_i)$; $\Phi := [\phi_{ip}(\Delta)]_{p=1}^{n_i}$;

2     $\mathbf{x}' := \Phi^{-1}\mathbf{b}$;

3     $C_i'(t)x = \sum\limits_{k=1}^{n_i} x_k' \phi_{ik}(t)$;

    $S_i := \#\Delta_i'$; $S := S + S_i$;   // $\#\Delta_i$ — кількість елементів Δ_i

  end

end

У наведеному алгоритмі використовується операція $A \overset{\text{dist}}{\setminus} B$, яка для будь яких $A, B \in T$ означає наступне. Для кожного елемента з множини B знайти єдиний найближчий до нього в сенсі відстані в T елемент з множини A і вилучити його. Для щойно введеної операції виконується умова $\#(A \overset{\text{dist}}{\setminus} B) = \max\{\#A - \#B, 0\}$.

Замінивши у алгоритмі 1 рядки 1, 2, 3 на

$1'$ $n_i := \left\lfloor \overline{\mathcal{E}}^{-1} \left(\frac{\sqrt{\left(\varepsilon'/\|x\|_{\mathcal{V}}+K\right)^2 + 4\varepsilon'\|\mathbf{b}\|_n/\|x\|_{\mathcal{V}}} - \left(\varepsilon'/\|x\|_{\mathcal{V}}+K\right)}{2\|\mathbf{b}\|_n/\|x\|_{\mathcal{V}}} \right) \right\rfloor + 1;$

$2'$ $\mathbf{x}' := \Phi^{-1}\mathbf{b}$;

$3'$ $C_i''(t)x = \sum\limits_{k=1}^{n_i} x_k'' \phi_{ik}(t)$;

отримаємо модифікацію, яка замість точного розв'язку (12) використовує наближення (14) з $m = 1$. Таку модифікацію називатимемо Алгоритм $1''$.

Щоб проілюструвати використання наведеного алгоритму розглянемо наступний приклад.,

Приклад 3.1. У цьому прикладі розглянемо ітеративну Sinc–апроксимацію експоненційно спадної функції $x(t) \in L_{c_2}(\mathcal{D}_d) \cap \mathbf{H}^p(\mathcal{D}_d) = V(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ [21, с. 136], що аналітична у смузі $\mathcal{D}_d \in \mathbb{C}$ (з шириною $2d$ навколо дійсної осі $\mathbb{R}$),

$$x(t) = \frac{R}{1 + \cosh^2 t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

для декількох значень сталої $R = 10, 100$. Наша мета — побудувати послідовності апроксимантів $C_i'(t)x$ використовуючи алгоритм 1. Для того, щоб експериментально дослідити поведінку апостеріорних похибок $Err_i \equiv \max\limits_{t \in \Lambda_{ex}} |x(t) - C_i'(t)x|$, при відрізняючихся по порядку швидкостях спадання послідовності цільових похибок $\{\varepsilon_i\}$ та апріорних похибок $\overline{\mathcal{E}}_i$, визначимо

$$\{\varepsilon_i\}_{i=1}^{10} = \left\{ \frac{1}{16}, \frac{1}{81}, \frac{1}{256}, \frac{1}{625}, \frac{1}{1296}, \frac{1}{2401}, \frac{1}{4096}, \frac{1}{6561}, \frac{1}{10000}, \frac{1}{14641} \right\}.$$

Загальний член цієї послідовності $\varepsilon_i = 1/(i+1)^4$, $i = 1, 2, \ldots 10$ поводить себе, як похибка деякого методу з алгебраїчним порядком збіжності 4. Тому, такий вибір $\{\varepsilon_i\}$ моделює ситуацію з узгодженням похибок чисельних методів по просторовій та часовій компонентів, про яку йшла мова у главі 1. Функція обернена до апріорної оцінки похибки Sinc–апроксимації $\overline{\mathcal{E}}(N)$ визначається формулою [15]

$$\overline{\mathcal{E}}^{-1}(\varepsilon) = \frac{1}{c_2^2}\mathbf{W}^2\left(-\frac{c_2}{c_1}\varepsilon\right), \tag{19}$$

де $\mathbf{W}(z)$ означає нижню гілку функції Ламберта $\texttt{LambertW}(-1, z)$ [17]. Формула (19), також залежить від двох сталих c_1, c_2, які входять у функцію апріорної оцінки похибки

$$\overline{\mathcal{E}(N)} = c_1\sqrt{N}\mathrm{e}^{-c_2\sqrt{N}}. \tag{20}$$

Для використання (19) у оцінці (16) спочатку за допомогою (20) наближено знаходяться сталі c_1, c_2, а потім за формулою (19) обчислюється значення N. Зазначимо, що параметр дискретизації N у формулах (19) та (20) відрізняється від n, застосованого у цій роботі оскільки індекс сумування k з (1) у формулах Sinc–методів пробігає діапазон $-N, \ldots, N$, а отже $n = 2N + 1$. Для отримання початкових оцінок на c_1, c_2 використаємо апостеріорну схему, що базується на визначенні невідомих сталих з системи рівнянь складених на основі обчислених значень функції $x(t)$ та трьох Sinc–інтерполяційних наближень $C_i(t)x$, $i = -2, -1, 0$, для яких $N = 2, 4, 8$. У якості дискретної норми $\mathbf{x}$ використовуватимемо $\|\mathbf{x}\|_n = \max\limits_{k=\overline{1,n}} |x_k|$, а неперервну норму $\mathcal{N}_2(x, D_d)$, яка є стандартною для Sinc–методів [21, с. 131], апостеріорно оцінюватимемо за допомогою sup–норми $\|x\| = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |x(t)|$.

Для того, щоб використовувати формулу знаходження потрібної кількості вузлів нерівномірної Sinc–апроксимації (17) нам також необхідно оцінити значення добутку $K_1 L$ в залежності від кількості вузлів Sinc–інтерполянта $n_i = 2N_i + 1$ та величини $\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}'_i\|_{n_i}$.

$$K_1 L \le L_i \alpha_i$$

$L_i \equiv \frac{2}{\pi}\log n_i + \frac{2}{\pi}(\gamma + \log 2) + \mathcal{O}(1/n_i^2)$ — стала Лебега для Sinc–інтерполянта [22], α_i — деяка стала, залежна від взаєморозташування сіток Λ'_i та Λ_i:

$$\Lambda_i \equiv \left\{kh_i \middle|\, k = \overline{-N_i, N_i}\right\}, \quad h_i = \sqrt{\pi d/N}.$$

Результати застосування алгоритму 1 для наближеного обчислення функції $x(t)$ наведено у таблицях 1 та 2. В обох чисельних екс-

Таблиця 1. Ітеративна апроксимація функції $x(t)$ $(R = 10)$ з використанням алгоритму 1 та набору цільових похибок $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^{10}$. Експериментально обчислені параметри оцінки похибки (20): $c_1 = 20.22011$, $c_2 = 2.9012$.

i	ε_i	N_i	S_i	$\mathcal{K}_i$	Err_i
1	6.2500E-02	9	8	6.73568	2.0423E-02
2	1.2346E-02	13	8	13.4654	2.3091E-02
3	3.9063E-03	16	6	6.57451	4.3386E-03
4	1.6000E-03	19	8	20.5581	2.1440E-03
5	7.7161E-04	22	10	15.6779	1.0975E-03
6	4.1649E-04	24	8	22.1277	4.9996E-04
7	2.4414E-04	26	2	30.007	2.9549E-04
8	1.5242E-04	27	4	25.6275	1.8419E-04
9	1.0000E-04	29	6	23.6221	1.1672E-04
10	6.8301E-05	31	2	14.744	9.2679E-05

периментах спочатку застосовувалась описана вище схема оцінки параметрів c_1, c_2, а потім безпосередньо алгоритм 1. Обчислені, у ході застосування схеми для оцінки c_1, c_2, значення використовувались повторно. Тому побудова першого наближення $(i = 1)$ потребувала обчислення лише 9 (у випадку $R = 10$) та 18 $(R = 100)$ додаткових значень $x(t)$, які в таблицях та алгоритмі позначені як S_i.

Апріорна оцінка сталої α_i невідома на теперішній момент і при обчисленнях покладалася рівною одиниці. Це обумовлює відхилення експериментально отриманих похибок Err_i від цільових ε_i. З результатів приведених в таблицях 1, 2 чітко видно, що ріст α_i дещо компенсується спаданням похибки $\overline{\mathcal{E}}(N_i)$, яка, очевидно, має домінуючий характер. Стала α_i зростає зі зростанням норми $x(t)$ і прямопропорційно залежить від N_i. Найбільше значення $\alpha_i \approx Err_i/\varepsilon_i$ спостерігається при $N_i = 42$, $R = 100$ (останній рядок таблиці 2). Ефективність можливого застосування модифікацій алгоритму 1 можна оцінити по швидкості росту чисел обумовленості $\mathcal{K}_i = \|\Phi^{-1}\|\|\Phi\|$ матриці Φ. Їх нормована величина $K_i/\mathrm{rank}\,(\Phi)$ коливається в залежності від того наскільки близькими є сітки Λ_i та Λ_i'.

Не зважаючи на те що з'ясування залежностей між N_i та α_i потребує більш детальних досліджень (див. [16]), наведені результати ілюструють ефективність розробленого підходу. При $R = 100$, загальна кількість обчислених у ході алгоритму 1 значень $S = 94$, в той час, як використання класичних Sinc–інтерполянтів для побудову послі-

Таблиця 2. Ітеративна апроксимація функції $x(t)$ $(R = 100)$ з використанням алгоритму 1 та набору цільових похибок $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^{10}$. Експериментально обчислені параметри оцінки похибки (20): $c_1 = 202.2012$, $c_2 = 2.9012$

i	ε_i	N_i	S_i	$\mathcal{K}_i$	Err_i
1	6.2500E-02	15	18	9.64828	9.7075E-02
2	1.2346E-02	20	10	9.63946	1.3510E-02
3	3.9063E-03	24	12	12.7103	5.1351E-03
4	1.6000E-03	27	10	15.3045	1.9426E-03
5	7.7161E-04	30	6	24.0762	8.4617E-04
6	4.1649E-04	33	8	26.3483	7.9528E-04
7	2.4414E-04	35	8	20.7726	6.4150E-04
8	1.5242E-04	37	8	18.369	5.9258E-04
9	1.0000E-04	39	6	23.2181	8.6622E-04
10	6.8301E-05	41	6	23.8631	5.7157E-04

довності наближень по заданій $\varepsilon_{i=1}^{10}$ потребувало б обчислення 261 значень $x(t)$.

[1] *Adcock B., Gataric M., Hansen A.* On stable reconstructions from nonuniform fourier measurements // SIAM Journal on Imaging Sciences. — 2014. — **7**, 3. — P. 1690–1723. — http://dx.doi.org/10.1137/130943431.

[2] *Benedetto J. J.* Irregular sampling and frames // Wavelets: A Tutorial in Theory and Applications / Ed. by Charles K. Chui. — San Diego, CA, USA : Academic Press Professional, Inc., 1992. — P. 445–507. — URL: http://dl.acm.org/citation.cfm?id=160964.159455.

[3] *Clark J., Palmer M., Lawrence P.* A transformation method for the reconstruction of functions from nonuniformly spaced samples // Acoustics, Speech and Signal Processing, IEEE Transactions on. — 1985. — Oct. — **33**, 5. — P. 1151–1165.

[4] *Condat L.* Reconstruction from non-uniform samples: A direct, variational approach in shift-invariant spaces // Digital Signal Processing. — 2013. — **23**, 4. — P. 1277 – 1287. — URL: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1051200413000341.

[5] *Duffin R. J., Schaeffer A. C.* A class of nonharmonic fourier series // Transactions of the American Mathematical Society. — 1952. — **72**, 2. — P. 341–366. — URL: http://www.jstor.org/stable/1990760.

[6] *Feichtinger H. G., Gröchenig K.* Theory and practice of irregular sampling // Wavelets, Mathematics and Applications / Ed. by J. J. Benedetto, M. W. Frazier. — CRC Press, 1994. — P. 305–363.

[7] *Feichtinger H. G., Gröchenig K., Strohmer T.* Efficient numerical methods in non-uniform sampling theory // Numer. Math. — 1995. — feb. — **69**, 4. — P. 423–440. — URL: http://dx.doi.org/10.1007/s002110050101.

[8] *Fornasier M., Gori L.* Sampling theorems on bounded domains // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 2008. — **221**, 2. — P. 376–385. — Special Issue: Recent Progress in Spline and Wavelet Approximation. URL: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377042707005699.

[9] *Gavrilyuk I., Makarov V., Vasylyk V.* Exponentially convergent algorithms for abstract differential equations. Frontiers in Mathematics. — Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2011. — P. viii+180. — ISBN: 978-3-0348-0118-8. — URL: http://dx.doi.org/10.1007/978-3-0348-0119-5.

[10] *Gröchenig K.* Localization of frames, banach frames, and the invertibility of the frame operator // Journal of Fourier Analysis and Applications. — 2004. — **10**, 2. — P. 105–132. — URL: http://dx.doi.org/10.1007/s00041-004-8007-1.

[11] *Gröchenig K., Schwab H.* Fast local reconstruction methods for nonuniform sampling in shift-invariant spaces // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. — 2003. — **24**, 4. — P. 899–913. — http://dx.doi.org/10.1137/S0895479802409067.

[12] *Kronrod A. S.* Nodes and weights of quadrature formulas. Sixteen-place tables. Authorized translation from the Russian. — Consultants Bureau, New York, 1965. — P. vii+143.

[13] Marks R. J. Advanced topics in Shannon sampling and interpolation theory. — 1993. — Vol. 1. — P. 360.

[14] *Mastroianni G., Milovanović G. V.* Interpolation processes : basic theory and applications. — Berlin : Springer, 2008. — P. 458.

[15] *Ситник Д. О.* Ефективне використання попередньо обчислених даних у схемі ітеративної sinc–апроксимації // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2014. — **11**, 4. — С. 266–279.

[16] *Ситник Д. О., Мединсъкий М. С.* Нерівномірна Sinc–апроксимація функцій. — 2016. — У друці в “Вісник Донецького Національного Університету. Сер. А: Природничі науки”.

[17] On the LambertW function / *R.M. Corless, G.H. Gonnet, D.E.G. Hare et al.* // Advances in Computational Mathematics. — 1996. — **5**, 1. — P. 329–359. — URL: http://dx.doi.org/10.1007/BF02124750.

[18] *Papoulis A.* Generalized sampling expansion // Circuits and Systems, IEEE Transactions on. — 1977. — Nov. — **24**, 11. — P. 652–654.

[19] *Patterson T. N. L.* The optimum addition of points to quadrature formulae // Math. Comp. 22 (1968), 847–856; addendum, ibid. — 1968. — **22**, 104, loose microfiche supp. — P. C1–C11.

[20] *Scherzer O., Strohmer T.* A multi-level algorithm for the solution of moment problems // Numerical Functional Analysis and Optimization. — 1998. — **19**, 3-4. — P. 353–375. — http://dx.doi.org/10.1080/01630569808816833.

[21] *Stenger F.* Numerical methods based on Sinc and analytic functions. — Springer, New York, 1993. — P. 580.

[22] *Stenger F., El-Sharkawy H., Baumann G.* The lebesgue constant for sinc approximations // New Perspectives on Approximation and Sampling Theory / Ed. by Ahmed I. Zayed, Gerhard Schmeisser. — Springer International Publishing, 2014. — Applied and Numerical Harmonic Analysis. — P. 319–335. — URL: http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-08801-3_13.

[23] *Strohmer T.* A levinson–galerkin algorithm for regularized trigonometric approximation // SIAM Journal on Scientific Computing. — 2000. — **22**, 4. — P. 1160–1183. — http://dx.doi.org/10.1137/S1064827597329254.

[24] *Strohmer T.* Numerical analysis of the non-uniform sampling problem // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 2000. — **122**, 1–2. — P. 297 – 316. — Numerical Analysis in the 20th Century Vol. II: Interpolation and Extrapolation. URL: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377042700003617.