Збірник праць Інституту математики НАН України 2017, т. 14, № 2, 172–179

УДК 517.9

Матриці Якобі, асоційовані із сингулярними несиметричними збуреннями

Г. В. Тугай

Національний авіаційний університет, Київ; ttugay@ukr.net

A link between an inverse eigenvalue problem and the Jacobi matrices is established within the framework of the theory of singular non-symmetric perturbations of unbounded self-adjoint operators.

У рамках теорії сингулярних несиметричних збурень необмежених самоспряжених операторів встановлено зв'язок між оберненою задачею на власні значення та матрицями Якобі.

В рамках теории сингулярных несимметричных возмущений неограниченных самосопряженных операторов установлена связь между обратной задачей на собственные значения и матрицами Якоби.

Вступ

Нехай $A \geq 1$ – необмежений самоспряжений оператор з областю визначення $\mathrm{dom} A \equiv \mathcal{D}(A)$ у комплексному сепарабельному просторі Гільберта $\mathcal{H}$ із скалярним добутком $(\cdot, \cdot)$ та нормою $\|\cdot\|$.

Оператор $\tilde{A} \neq A$ називається [3] (чисто) сингулярно несиметрично збуреним відносно A (пишемо $\tilde{A} \in \mathcal{P}_s(A)$), якщо множини

$$\mathcal{D} = \left\{ \varphi \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(\tilde{A}) : A\varphi = \tilde{A}\varphi \right\}$$

$$\mathcal{D}_* = \left\{ \varphi \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(\tilde{A}^*) : A\varphi = \tilde{A}^*\varphi \right\}$$

є щільними в $\mathcal{H}$. Зрозуміло, що A і $\tilde{A}$ та A і $\tilde{A}^*$ мають спільні симетричні оператори $\dot{A} := A \restriction \mathcal{D} = \tilde{A} \restriction \mathcal{D}$, $\dot{A}_* := A \restriction \mathcal{D}_* = \tilde{A}^* \restriction \mathcal{D}_*$ із нетривіальними індексами дефекту $\mathbf{n}^{\pm}(\dot{A}) = \dim \mathrm{Ker}(\dot{A} \pm i)^* \neq 0$, $\mathbf{n}_*^{\pm}(\dot{A}_*) = \dim \mathrm{Ker}(\dot{A}_* \pm i)^* \neq 0$.

Відомо, що наступний варіант оберненої задачі на власні значення є розв'язним. А саме, для довільної послідовності чисел $E_j,\ j = 1, 2, ...$

та послідовностей векторів ψ_j, з умовою $(\mathrm{span}\{\psi_j\})^{\mathrm{cl}} \cap \mathrm{dom}(A) = \{0\}$ і ψ_j^*, з умовою $(\mathrm{span}\{\psi_j^*\})^{\mathrm{cl}} \cap \mathrm{dom}(A) = \{0\}$ (cl – замикання) існує послідовність сингулярно несиметрично збурених операторів $A_n, n = 1, 2, ...$, які розв'язують задачу на власні значення: $A_n\psi_j = E_j\psi_j, A_n^*\psi_j = \bar{E}_j\psi_j^*, j \leq n$.

У цій статті будемо досліджувати так звані не симетрично сингулярно збурені оператори $\tilde{A}$ з класу $\mathcal{P}_s(A)$ [3], які не вимагають додаткової параметризації. Це означає, що образ різниці резольвент операторів A і $\tilde{A}$ та A і $\tilde{A}^*$ належить області визначення оператора $A^{1/2}$:

$\mathrm{ran}[\tilde{A} - z)^{-1} - (A - z)^{-1}] \subset \mathcal{D}(A^{1/2})$,
$\mathrm{ran}[\tilde{A}^* - z)^{-1} - (A - z)^{-1}] \subset \mathcal{D}(A^{1/2})$.

У цьому випадку є два варіанти зображення для збуреного оператора $\tilde{A}$. Якщо $\tilde{A}$ не має нульового власного значення, то його можна подати у вигляді узагальненої суми: $\tilde{A} = A \tilde{+} T$, де оператор T діє в $A-$шкалі $\mathcal{H}_{-1} \supset \mathcal{H}_0 \equiv \mathcal{H} \supset \mathcal{H}_1$ гільбертових просторів [2], $T : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_{-1}$, при цьому, $\mathrm{ran}T \cap \mathcal{H} = \{0\}$. Тут $\mathcal{H}_1 = \mathcal{D}(A^{1/2})$ у нормі $\|\varphi\|_1 := \|A^{1/2}\varphi\|$, а $\mathcal{H}_{-1}$ позначає дуальний простір до $\mathcal{H}_1$ відносно $\mathcal{H}$. У будь-якому випадку оператор $\tilde{A}$ визначається формулою Крейна для резольвент

$$(\tilde{A} - z)^{-1} = (A - z)^{-1} + B^{-1}(z), \ \mathrm{Im} z \neq 0,$$

де операторна функція $B(z)$ задовольняє певну тотожність(див., наприклад, [3] у випадку рангу один) і, головне, $\mathrm{ran}B^{-1}(z) \subset \mathcal{D}(A^{1/2}) \setminus \mathcal{D}(A)$. Зокрема, резольвентне зображення для $\tilde{A}$ будемо використовувати у випадку, коли $0 \notin \sigma(\tilde{A})$. При цьому множини $\mathcal{D}$ і $\mathcal{D}_*$ утворюють правильні підпростори в $\mathcal{H}_1$, тобто не є щільними в $\mathcal{H}_1$.

Пишемо $\tilde{A} \in \mathcal{P}_s^n(A)$, $n \leq \infty$, якщо різниця резольвент $(\tilde{A} - z)^{-1} - (A - z)^{-1}$ та $(\tilde{A}^* - z)^{-1} - (A - z)^{-1}$, при деяких $z \in \mathbb{C}$, є оператором рангу $n \leq \infty$.

1 Попередні відомості

Нехай $E_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $j = 1, 2, ...$ – деяка послідовність комплексних чисел, а $\psi_j \in \mathcal{H}_1(A) \setminus \mathcal{D}(A)$, $\psi_j^* \in \mathcal{H}_1(A) \setminus \mathcal{D}(A)$ – довільні послідовності векторів, ортонормованих в $\mathcal{H}$ такі, що виконуються умови:

$$\mathrm{span}\{\psi_j, j \geq 1\}^{\mathrm{cl}} \cap \mathcal{D}(A) = \{0\}, \tag{1}$$

$$\mathrm{span}\{\psi_j^*, j \geq 1\}^{\mathrm{cl}} \cap \mathcal{D}(A) = \{0\}, \tag{2}$$

де cl позначає замикання в $\mathcal{H}$. Для кожного скінченого n існує єдиний сингулярно збурений оператор $A_n \in \mathcal{P}_s^n(A)$, що розв'язує задачу на власні значення

$$A_n\psi_j = E_j\psi_j,\ A_n^*\psi_j^* = \bar{E}_j\psi_j^*,\ j = 1, ..., n. \tag{3}$$

Як правило, оператори A_n мають вигляд $A_n = A\tilde{+}T_n$ і будуються індуктивно з використанням на кожному кроці сингулярного збурення рангу 1. A_n визначається формулою типу Крейна для резольвент. А саме, резольвента оператора A_n записується через резольвенту A_{n-1} та $E_n \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $\psi_n \in \mathcal{H}$, $\psi_n^* \in \mathcal{H}$ у вигляді

$$(A_n - z)^{-1} = (A_{n-1} - z)^{-1} + B_n^{-1}(z)\,(\cdot, \eta_n(z))\,\nu_n(z),\ \mathrm{Im} z \neq 0, \tag{4}$$

де

$$\begin{aligned} B_n(z) &= (E_n - z)\,(\psi_n, \eta_n(\bar{z}))\,, \\ \nu_n(z) &= (A_{n-1} - E_n)(A_{n-1} - z)^{-1}\psi_n, \\ \eta_n(z) &= (A_{n-1}^* - \bar{E}_n)(A_{n-1}^* - \bar{z})^{-1}\psi_n^*. \end{aligned}$$

Рекурентна процедура побудови A_n природним чином породжує послідовність асоційованих матриць Якобі

$$J_n = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & & & & \\ c_1 & b_2 & a_2 & & 0 & \\ & c_2 & b_3 & \bullet & & \\ & & \bullet & \bullet & \bullet & \\ & 0 & & \bullet & \bullet & a_{n-1} \\ & & & & c_{n-1} & b_n \end{pmatrix}. \tag{5}$$

При $n \to \infty$ ми одержуємо матрицю Якобі J нескінченого рангу, яку називаємо асоційованою з оберненою задачею на власні значення для заданих $E_j \in \mathbb{C},\ \psi_j \in \mathcal{H},\ \psi_j^* \in \mathcal{H},\ j = 1, 2, ...$

Матричні елементи a_n, b_n, c_n якобієвих матриць виражаються рекурентним чином через оператори A_j, вектори ψ_j, ψ_j^* та власні значення $E_j, j \leq n$. А саме,

$$b_1 = \langle(\mathbf{A}_0 - E_1)\psi_1, \psi_1^*\rangle\,,$$

$$a_1 = \langle(\mathbf{A}_0 - E_1)\psi_2, \psi_1^*\rangle\,,$$

$$c_1 = \langle(\mathbf{A}_0 - E_1)\psi_1, \psi_2^*\rangle\,,$$

$$b_2 = \langle (\mathbf{A}_0 - E_2)\psi_2, \psi_2^* \rangle ,$$

$$a_2 = \langle (\mathbf{A}_1 - E_2)\psi_3, \psi_2^* \rangle ,$$

$$c_2 = \langle (\mathbf{A}_1 - E_2)\psi_2, \psi_3^* \rangle ,$$

....

$$b_n = \langle (\mathbf{A}_{n-2} - E_n)\psi_n, \psi_n^* \rangle ,$$

$$a_n = \langle (\mathbf{A}_{n-1} - E_n)\psi_{n+1}, \psi_n^* \rangle ,$$

$$c_n = \left\langle (\mathbf{A}_{n-1} - E_n)\psi_n, \psi_{n+1}^* \right\rangle , n = 1, 2, ...,$$

де $\mathbf{A}_j$, $j = 1, 2, ..., n$, позначає замикання оператора $A_j : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_{-1}$. Аналогічний результат має місце і у випадку самоспряженого сингулярно збуреного оператора (див. [8]).

2 Побудова матриці Якобі, асоційованої з сингулярно збуреним оператором

Нехай задано: необмежений самоспряжений оператор $A \geq 0$ в $\mathcal{H}$, послідовність чисел $E_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $j = 1, 2, ...$ та послідовності $\psi_j \in \mathcal{H}_1(A) \setminus \mathcal{D}(A)$ і $\psi_j^* \in \mathcal{H}_1(A) \setminus \mathcal{D}(A)$ ортонормованих в $\mathcal{H}$ векторів, які задовольняють умови (1), (2). Покажемо, що для заданої послідовності чисел $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ та послідовностей векторів $\{\psi_j\}_{j=1}^{\infty}$, $\{\psi_j^*\}_{j=1}^{\infty}$ існує послідовність сингулярно несиметрично збурених операторів скінченого рангу $A_n \in \mathcal{P}_s^n(A)$, що розв'язують задачу на власні значення (3). При цьому, з кожним оператором A_n буде асоційовано якобієву матрицю вигляду (5).

Опишемо послідовно процедуру побудови такої матриці.

На першому кроці для $n = 1$ з заданими E_1, ψ_1 та ψ_1^* ми визначаємо сингулярно збурений оператор формулою:

$$A_1 = A_0 \widetilde{+} \alpha_1 \langle \cdot, \omega_1 \rangle \phi_1, \quad A_0 \equiv A, \tag{6}$$

де

$$\omega_1 := (\mathbf{A}_0 - \bar{E}_1)\psi_1^* \in \mathcal{H}_{-1},$$

$$\phi_1 := (\mathbf{A}_0 - E_1)\psi_1 \in \mathcal{H}_{-1},$$

$$\alpha_1 := -\frac{1}{\langle \psi_1, \omega_1 \rangle} = -\frac{1}{\langle (\mathbf{A}_0 - E_1)\psi_1, \psi_1^* \rangle},$$

$\mathbf{A}_0$ — замикання ізометричного відображення $A_0 : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_{-1}$, а $\tilde{+}$ позначає так звану узагальнену суму операторів (див., наприклад, [5]). Безпосередня перевірка показує, що оператор A_1 розв'язує задачу: $A_1\psi_1 = E_1\psi_1$, $A_1^*\psi_1^* = \bar{E}_1\psi_1^*$. Визначимо перший матричний елемент, поклавши

$$b_1 := \langle(\mathbf{A}_0 - E_1)\psi_1, \psi_1^*\rangle \,. \tag{7}$$

Очевидно, що b_1 взагалі комплексне. Зазначимо, що як сингулярне збурення рангу один $\alpha_1 \langle\cdot, \omega_1\rangle \phi_1$, так і матричний елемент b_1 якобієвої матриці J_0, яку ми будуємо, єдиним чином визначаються оператором A та заданою трійкою E_1, ψ_1, ψ_1^* (доведення цього факту у випадку сингулярного збурення довільного скінченого рангу можна знайти у роботі [3]).

Зауважимо, що число b_1 ми асоціюємо з оператором A_1, хоча у формулі (7) фігурує оператор $\mathbf{A}_0$. Це пов'язано з тим, що насправді елемент b_1 визначається по E_1, ψ_1 та ψ_1^*, які однозначно фіксують оператор A_1.

На другому кроці, для $n = 2$ ми використовуємо оператор A_1, число E_2 та вектори ψ_2, ψ_2^*, ортогональні до ψ_1, ψ_1^* відповідно, і визначаємо сингулярно збурений оператор A_2 за формулою:

$$A_2 = A_1 \tilde{+} \alpha_2 \langle\cdot, \omega_2\rangle \phi_2, \tag{8}$$

де

$$\omega_2 = (\mathbf{A}_1^* - \bar{E}_2)\psi_2^* \in \mathcal{H}_{-1}, \quad \phi_2 = (\mathbf{A}_1 - E_2)\psi_2 \in \mathcal{H}_{-1},$$

$$\alpha_2 = -\frac{1}{\langle\psi_2, \omega_2\rangle} = -\frac{1}{\langle\psi_2, (\mathbf{A}_1^* - \bar{E}_2)\psi_2^*\rangle},$$

$$\left(\bar{\alpha}_2 = -\frac{1}{\overline{\langle\phi_2, \psi_2^*\rangle}} = -\frac{1}{\langle\psi_2^*, (\mathbf{A}_1 - E_2)\psi_2\rangle}\right).$$

Безпосередня перевірка показує, що оператор A_2 розв'язує задачу на власні значення: $A_2\psi_1 = E_1\psi_1$, $A_2\psi_2 = E_2\psi_2$, $A_2^*\psi_1^* = \bar{E}_1\psi_1^*$, $A_2^*\psi_2^* = \bar{E}_2\psi_2^*$. Покладаємо

$$b_2 = \langle(\mathbf{A}_0 - E_2)\psi_2, \psi_2\rangle \,, \tag{9}$$

$$a_1 = \langle(\mathbf{A}_0 - E_1)\psi_2, \psi_1^*\rangle \,, \tag{10}$$

$$c_1 = \langle(\mathbf{A}_0 - E_1)\psi_1, \psi_2^*\rangle \,. \tag{11}$$

Отже

$$\alpha_2 = -\frac{1}{b_2 - \dfrac{a_1 c_1}{b_1}}.$$

Знову варто зауважити, що елементи b_2, a_1, c_1 ми асоціюємо з оператором A_2 тому, що ці елементи, як і оператор A_2, фіксуються трійкою E_2, ψ_2 та ψ_2^*. До того ж коефіцієнт α_2, який визначає оператор A_2, також виражається через елементи b_2, b_1, a_1, c_1.

Для довільного $n \geq 1$ маємо

$$\begin{aligned} A_n &= A_{n-1} \widetilde{+} \alpha_n \langle \cdot, \omega_n \rangle \phi_n, \\ \omega_n &:= (\mathbf{A}_{n-1}^* - \bar{E}_n)\psi_n^*, \\ \phi_n &:= (\mathbf{A}_{n-1} - E_n)\psi_n, \end{aligned} \tag{12}$$

де

$$\alpha_n = -\frac{1}{\langle \psi_n, \omega_n \rangle} = -\frac{1}{b_n - \dfrac{a_{n-1}c_{n-1}}{b_{n-1} - \cdots - \dfrac{a_2 c_2}{b_2 - \dfrac{a_1 c_1}{b_1}}}}.$$

Тут

$$\begin{aligned} b_n &= \langle (\mathbf{A}_{n-2} - E_n)\psi_n, \psi_n^* \rangle, \\ a_{n-1} &= \left\langle (\mathbf{A}_{n-2} - E_{n-1})\psi_n, \psi_{n-1}^* \right\rangle, \\ c_{n-1} &= \langle (\mathbf{A}_{n-2} - E_{n-1})\psi_{n-1}, \psi_n^* \rangle. \end{aligned} \tag{13}$$

Таким чином, для чисел $E_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R},\ j = 1, 2, ...$ і векторів ψ_j і ψ_j^*, які задовольняють умови (1), (2), існує послідовність сингулярно несиметрично збурених операторів A_n, які розв'язують задачу на власні значення (3) і з якими можна конструктивно асоціювати послідовність матриць Якобі J_n. Умови (1), (2) гарантують, що всі оператори A_n є сингулярно збуреними відносно A. При цьому кожен A_n належить $\mathcal{P}_s^n(A)$, тому що всі вектори ψ_j і ψ_j^* належать $\mathcal{H}_1(A) \setminus \mathcal{D}(A)$.

Таким чином, доведено таку теорему.

Теорема 1. *Для заданого необмеженого самоспряженого оператора $A \geq 1$ у гільбертовому просторі $\mathcal{H}$, довільної послідовності чисел $E_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R},\ j = 1, 2, ...$ та послідовностей ортонормованих в $\mathcal{H}$ векторів $\psi_j \in \mathcal{H} \setminus \mathcal{D}(A)$ і $\psi_j^* \in \mathcal{H} \setminus \mathcal{D}(A)$, для яких виконуються умови*

(1), (2), рекурентна процедура розв'язання оберненої задачі на власні значення (3) за допомогою формул (6), (8), (12) породжує послідовність сингулярно несиметрично збурених операторів $A_n \in \mathcal{P}_s^n(A)$, які у свою чергу асоційовані з послідовністю узгоджених між собою матриць Якобі J_n, що збігаються до матриці

$$J = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & & & \\ c_1 & b_2 & a_2 & & 0 \\ & c_2 & b_3 & \bullet & \\ & & \bullet & \bullet & \bullet \\ & 0 & & \bullet & \bullet \end{pmatrix} \tag{14}$$

у сенсі сильної границі. Матричні елементи матриці J виражаються через задану послідовність чисел $E_j, j = 1, 2, \ldots,$ вектори ψ_j, ψ_j^* та оператори A_n згідно з формулами (7), (9), (13).

Зауваження. У випадку сингулярно збуреного самоспряженого оператора аналогічна теорема доведена у [8]. Теорема з [8] є частинним випадком теореми 1. Для неї попереднім матеріалом були роботи [1, 4-7, 9].

3 Висновки

Для послідовності сингулярних не симетричних збурень A_n самоспряженого оператора A, що розв'язують задачу на власні значення (3), побудовано матрицю Якобі, елементи якої виражаються через числа $E_j, j = 1, 2, \ldots,$ вектори ψ_j, $\psi_j^*, j = 1, 2, \ldots,$ та оператори A_n.

[1] *Albeverio S., Dudkin M., Konstantinov A., and Koshmanenko V.* On the point spectrum of $\mathcal{H}_{-2}$ singular perturbations // Math. Nachr. — 2005. — **280**, 1-2. — P. 1–8.

[2] *Березанський Ю.М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов.— Киев: Наук. думка, 1965.— 798 с.

[3] *Вдовенко Т.І., Дудкін М.Є.* Сингулярні рангу один несиметричні збурення самоспряженого оператора. // Збірник праць Інституту Математики НАН України, 2014. — т.11. — 2. — С. 1–17.

[4] *Дудкін М.Є., Кошманенко В.Д.* Про точковий спектр самоспряжених операторів, що виникає при сингулярних збуреннях скінченного рангу // Укр. мат. журн.— 2003.— **55**, №9. — С. 1269–1276.

[5] *Каратаєва Т. В., Кошманенко В. Д.* Обобщенная сумма операторов // Мат. заметки. — 1999. — **66**, 5. — С. 671–681.

[6] *Кошманенко В.Д.* Сингулярные билинейные формы в теории возмущений самосопряженных операторов.— Киев: Наук. думка, 1993.— 176 с.

[7] *Koshmanenko V.* A variant of the inverse negative eigenvalues problem in singular perturbation theory // Methods of Functional Analysis and Topology, — 2002. — **8**, 1. — P. 49–69.

[8] *Кошманенко В.Д., Тугай Г.В.* Матриці Якобі, асоційовані з оберненою задачею на власні значення в теорії сингулярних збурень самоспряжених операторів // Укр. мат. журн.— 2006.— **58**,№ 12. — С. 1651–1662.

[9] *Nizhnik L.* The singular rank-one perturbations of self-adjoint operators // Methods Funct. Anal. and Top. — 2001. — 7, 3. — P. 54–66.