Збірник праць Інституту математики НАН України 2017, т. 14, № 2, 150–162

УДК 531.36;531.01

Про деякі якісні аспекти руху в еліптичній обмеженій задачі трьох тіл *

С. П. Сосницький

Інститут математики НАН України, Київ; sosn@imath.kiev.ua

Within the framework of the elliptic restricted three-body problem, we find some specific features of motions of an infinitesimal particle. In particular, we establish that the particle can perform oscillatory motions relative to the rotational plane of the two remaining massive particles.

У рамках еліптичної обмеженої задачі трьох тіл ми виявляємо деякі специфічні особливості руху нескінченно малої частки. Зокрема, встановлюємо можливість коливного характеру руху нескінченно малої частки відносно площини обертання двох масивних тіл.

В рамках эллиптической ограниченной задачи трех тел мы обнаруживаем некоторые специфические особенности движения бесконечно малой частицы. В частности, устанавливаем возможность колебательного характера движения бесконечно малой частицы относительно плоскости вращения двух массивных тел.

Вступ

Обмежена задача трьох тіл (матеріальних точок), хоча і є доволі спрощеною моделлю руху трьох тіл [1, 2], що бере свій початок від Ейлера, однак зберігає свою актуальність і нині, оскільки знаходить багато цікавих застосувань [1, 3–7].

Відомо, що коли обмежена задача є круговою, то, як показав Якобі, існує перший інтеграл. У цьому випадку Хіллу [8] вдалося довести існування обмежених рухів малої частки за умови, що стала рівня h інтеграла Якобі негативна і $|h|$ перевищує деяку критичну величину $h^* > 0$. Далі цю умову називатимемо умовою Хілла. Коли виконується умова Хілла, то область можливих рухів нескінченно малої

*Робота виконана за частковою підтримкою НДР № 0117U004077.

частки можна вважати об'єднанням області ω_H обмежених рухів за координатами (області Хілла) і області ω_{nc} обмежених рухів за швидкостями, тобто $\Omega = \omega_H \bigcup \omega_{nc}$, причому $\omega_H \bigcap \omega_{nc} = \emptyset$. Рухи, які належать області Хілла (ω_H), зазвичай називають стійкими за Хіллом.

Все значно ускладнюється, коли обмежена задача стає еліптичною, тобто, коли масивні тіла рухаються по еліптичних орбітах. Тоді інтеграл Якобі перестає існувати і ми втрачаємо важливий інструмент для дослідження якісних характеристик руху, що вимагає нових підходів для успішного розв'язання проблем руху, які постають. Одним з таких підходів є пошук інваріантних співвідношень, які можуть бути корисними при дослідженні якісних деталей руху.

1 Рівняння руху для обмеженої задачі трьох тіл

Отже розглянемо випадок обмеженої задачі трьох тіл, коли вектори $\mathbf{r}_1$ і $\mathbf{r}_2$, як розв'язки задачі двох тіл, можуть відповідати як круговим, так і еліптичним орбітам матеріальних точок з масами m_1 і m_2. Переходячи далі до відносних довжин векторів і розглядаючи рівняння обмеженої задачі як частинний випадок загальної задачі трьох тіл [11], отримуємо

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\rho}_1'' &= \mu \frac{\boldsymbol{\rho}_{12}}{|\boldsymbol{\rho}_{12}|^3}, \\ \boldsymbol{\rho}_2'' &= -(1-\mu) \frac{\boldsymbol{\rho}_{12}}{|\boldsymbol{\rho}_{12}|^3}, \\ \boldsymbol{\rho}_3'' &= -(1-\mu) \frac{\boldsymbol{\rho}_{13}}{|\boldsymbol{\rho}_{13}|^3} - \mu \frac{\boldsymbol{\rho}_{23}}{|\boldsymbol{\rho}_{23}|^3}. \end{aligned} \tag{1}$$

Тут $\boldsymbol{\rho}_{ij} = \boldsymbol{\rho}_j - \boldsymbol{\rho}_i$ $(i, j = 1, 2, 3)$, $\boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{r}_i / r_0$ (r_0 – сталий параметр, що має розмірність одиниці довжини), штрих означає диференціювання за безрозмірним часом

$$\tau = \frac{\sqrt{G(m_1 + m_2)}}{|\mathbf{r}_{12}|_0{}^{3/2}} t,$$

де $G > 0$ – гравітаційна стала, а

$$\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2}, \quad 0 < \mu \leq \frac{1}{2}.$$

Системі (1) також можна надати форми

$$\boldsymbol{\rho}_{12}{}'' = -\frac{\boldsymbol{\rho}_{12}}{|\boldsymbol{\rho}_{12}|^3},$$
$$\boldsymbol{\rho}_3{}'' = -(1-\mu)\frac{\boldsymbol{\rho}_{13}}{|\boldsymbol{\rho}_{13}|^3} - \mu\frac{\boldsymbol{\rho}_{23}}{|\boldsymbol{\rho}_{23}|^3}. \tag{2}$$

Характерною ознакою систем рівнянь (1) і (2) є те, що вони віднесені до інерційної системи відліку з початком у центрі мас двох масивних тіл. Зокрема, осі $O\xi$ і $O\eta$ цієї системи зручно помістити у площині руху двох масивних тіл, а вісь $O\zeta$ – перпендикулярно до цієї площини.

Відповідно до вибору системи відліку третє векторне рівняння системи (1) можемо записати у вигляді

$$\begin{aligned}
\xi'' &= -(1-\mu)\frac{\xi-\xi_1}{\rho_{13}^3} - \mu\frac{\xi-\xi_2}{\rho_{23}^3},\\
\eta'' &= -(1-\mu)\frac{\eta-\eta_1}{\rho_{13}^3} - \mu\frac{\eta-\eta_2}{\rho_{23}^3},\\
\zeta'' &= -(1-\mu)\frac{\zeta}{\rho_{13}^3} - \mu\frac{\zeta}{\rho_{23}^3},
\end{aligned} \tag{3}$$

де

$$\begin{aligned}
\rho_{13}^2 &= (\xi-\xi_1)^2 + (\eta-\eta_1)^2 + \zeta^2,\\
\rho_{23}^2 &= (\xi-\xi_2)^2 + (\eta-\eta_2)^2 + \zeta^2.
\end{aligned} \tag{4}$$

Тут $(\xi_1, \eta_1, 0)$ і $(\xi_2, \eta_2, 0)$ – відповідно координати тіл з масами $(1-\mu)$ і μ, а ξ, η, ζ – координати малої частки.

Оперуючи різними формами рівнянь руху нескінченно малої частки, розраховуватимемо на отримання корисних співвідношень, що можуть стати ефективними при подальшому аналізі руху в обмеженій задачі.

2 Про деякі важливі рівності в еліптичній обмеженій задачі трьох тіл

У роботі [10] наведені рівності, які у рамках кругової обмеженої задачі трьох тіл зв'язують квадрати взаємних відстаней з положенням нескінченно малої частки у системі відліку, яка обертається з одиничною кутовою швидкістю навколо осі, перпендикулярної до площини обертання двох масивних тіл. Виявляється, що аналоги цих рівностей мають місце і в еліптичній задачі трьох тіл, правда, у дещо іншій системі відліку. Однак перш ніж їх отримати, здійснимо деякі допоміжні операції.

Поряд з інерційною системою координат розглянемо допоміжну рухому систему координат з початком у центрі мас пари $(1-\mu,\mu)$, дві осі Ox, Oy якої зорієнтуємо вздовж напрямів векторів $-\boldsymbol{\rho}_{12}$ і $-\boldsymbol{\rho}'_{12}$, що належать площині обертання масивних тіл. Третю вісь Oz виберемо перпендикулярною до цієї площини, і таким чином осі $O\zeta$ і Oz збігаються.

Розглянемо величини

$$x = -\boldsymbol{\rho}_3\boldsymbol{\rho}_{12}, \tag{5}$$

$$y = -\boldsymbol{\rho}_3\boldsymbol{\rho}'_{12}. \tag{6}$$

Як бачимо, вони містять вектори $-\boldsymbol{\rho}_{12}$ і $-\boldsymbol{\rho}'_{12}$ як множники. Модулі $|\boldsymbol{\rho}_{12}|$ і $|\boldsymbol{\rho}'_{12}|$ цих векторів обмежені. Зауважимо також, що в еліптичному випадку $\boldsymbol{\rho}_{12}\times\boldsymbol{\rho}'_{12} = \mathbf{C}$, де $\mathbf{C}$ – сталий вектор, причому $|\mathbf{C}| \neq 0$, і таким чином, хоч кут між плоскими осями нашої системи відліку змінюється, проте напрями осей ніколи не збігаються. Отже, праві частини рівностей (5) і (6) можемо розглядати як проекції у деякому узагальненому сенсі вектора $\boldsymbol{\rho}_3$ на пару осей Ox і Oy вибраної нами рухомої системи відліку, які належать площині обертання масивних тіл. Щоб переконатися у тому, що така інтерпретація правих частин рівностей (5) і (6) має сенс, представимо рівності (5) і (6) у вигляді

$$x = -\frac{\boldsymbol{\rho}_{12}}{|\boldsymbol{\rho}_{12}|}\boldsymbol{\rho}_3|\boldsymbol{\rho}_{12}|, \quad y = -\frac{\boldsymbol{\rho}'_{12}}{|\boldsymbol{\rho}'_{12}|}\boldsymbol{\rho}_3|\boldsymbol{\rho}'_{12}|. \tag{7}$$

Якщо виходити зі стандартного означення проекції, то x у запису (7) означає проекцію вектора $\boldsymbol{\rho}_3|\boldsymbol{\rho}_{12}|$ на напрям вектора $-\boldsymbol{\rho}_{12}$, а y означає проекцію вектора $\boldsymbol{\rho}_3|\boldsymbol{\rho}'_{12}|$ на напрям вектора $-\boldsymbol{\rho}'_{12}$. Зауважуючи однак, що вектори $\boldsymbol{\rho}_3|\boldsymbol{\rho}_{12}|$ і $\boldsymbol{\rho}_3|\boldsymbol{\rho}'_{12}|$ мають один і той же напрям, а значення $|\boldsymbol{\rho}_{12}|$ і $|\boldsymbol{\rho}'_{12}|$ є обмеженими, можемо цілком впевнено стверджувати, що рівності (7) (а отже і (5), (6)) цілком придатні, щоб описувати рух нескінченно малої частки у проекції на площину обертання масивних тіл.

Цікаво зауважити, що у випадку кругової обмеженої задачі $|-\boldsymbol{\rho}_{12}| = 1$ і $|-\boldsymbol{\rho}'_{12}| = 1$, тобто вектори $-\boldsymbol{\rho}_{12}$ і $-\boldsymbol{\rho}'_{12}$ є ортами. Більше того, оскільки $\boldsymbol{\rho}_{12} \perp \boldsymbol{\rho}'_{12}$, то розглянута вище рухома система відліку у круговій задачі є ортогональною.

На підставі рівності (6) маємо

$$y = -(\boldsymbol{\rho}_3 - \boldsymbol{\rho}_1 + \boldsymbol{\rho}_1)\boldsymbol{\rho}'_{12} = -\boldsymbol{\rho}_{13}\boldsymbol{\rho}'_{12} - \boldsymbol{\rho}_1\boldsymbol{\rho}'_{12}. \tag{8}$$

Аналогічно

$$y = -(\boldsymbol{\rho}_3 - \boldsymbol{\rho}_2 + \boldsymbol{\rho}_2)\boldsymbol{\rho}'_{12} = -\boldsymbol{\rho}_{23}\boldsymbol{\rho}'_{12} - \boldsymbol{\rho}_2\boldsymbol{\rho}'_{12}. \tag{9}$$

Зауважуючи, що

$$\boldsymbol{\rho}_1 = -\mu\boldsymbol{\rho}_{12}, \quad \boldsymbol{\rho}_2 = (1-\mu)\boldsymbol{\rho}_{12}, \tag{10}$$

а

$$\boldsymbol{\rho}_{12} + \boldsymbol{\rho}_{23} - \boldsymbol{\rho}_{13} = \mathbf{0}, \tag{11}$$

на підставі (8) і (9) приходимо до рівностей

$$\boldsymbol{\rho}_{23}\boldsymbol{\rho}'_{13} = -y + \frac{1}{2}{\boldsymbol{\rho}^2_{23}}' - \frac{1-\mu}{2}{\boldsymbol{\rho}^2_{12}}', \tag{12}$$

$$\boldsymbol{\rho}_{13}\boldsymbol{\rho}'_{23} = y + \frac{1}{2}{\boldsymbol{\rho}^2_{13}}' - \frac{\mu}{2}{\boldsymbol{\rho}^2_{12}}'. \tag{13}$$

Згідно з роботою [12] справедливе співвідношення

$$\boldsymbol{\rho}_{12}\boldsymbol{\rho}_3 = \frac{1}{2}\left[(1-2\mu)\boldsymbol{\rho}^2_{12} + \boldsymbol{\rho}^2_{13} - \boldsymbol{\rho}^2_{23}\right] \tag{14}$$

і, таким чином, на підставі (12) і (13) отримуємо

$$\boldsymbol{\rho}_{23}\boldsymbol{\rho}'_{13} - \boldsymbol{\rho}_{13}\boldsymbol{\rho}'_{23} = x' - 2y. \tag{15}$$

Цікаво зауважити, що до аналогічної рівності у випадку кругової обмеженої задачі ми приходили більш складним шляхом.

Отримаємо ще декілька важливих рівностей, які аналогічні вже відомим у круговій обмеженій задачі трьох тіл.

З врахуванням рівності (5) перепишемо рівність (14) у вигляді

$$(\rho^2_{23} - \rho^2_{13}) = 2x + (1-2\mu)\rho^2_{12}. \tag{16}$$

Використовуючи відому рівність

$$\rho_3^2 = -\mu_1\mu_2\rho_{12}^2 + \mu_1(\mu_1+\mu_2)\rho_{13}^2 + \mu_2(\mu_1+\mu_2)\rho_{23}^2, \qquad (17)$$

яка виконується у загальному випадку задачі трьох тіл [9], і зауважуючи, що в умовах обмеженої задачі вона набуває вигляду

$$\rho_3^2 = -(1-\mu)\mu\rho_{12}^2 + (1-\mu)\rho_{13}^2 + \mu\rho_{23}^2, \qquad (18)$$

розв'яжемо рівняння (16) і (18) відносно ρ_{13}^2 і ρ_{23}^2. У результаті отримаємо

$$\rho_{13}^2 = -2\mu x + \mu^2\rho_{12}^2 + \rho_3^2, \qquad (19)$$

$$\rho_{23}^2 = 2(1-\mu)x + (1-\mu)^2\rho_{12}^2 + \rho_3^2. \qquad (20)$$

Якщо покласти у (19) і (20) $\rho_{12}^2 = 1$, то прийдемо до рівностей, справедливих у круговій обмеженій задачі.

Звернемо увагу на важливість рівностей (5) і (6), наведених вище. Саме ці рівності, коли врахувати, що

$$x' = y - \boldsymbol{\rho}_{12}\boldsymbol{\rho}_3', \qquad (21)$$

$$y' = -\frac{x}{\rho_{12}^3} - \boldsymbol{\rho}_{12}'\boldsymbol{\rho}_3', \qquad (22)$$

дозволили нам довести обмеженість руху малої частки у проекції на площину, у якій обертаються два масивні тіла [12]. Якщо взяти до уваги справедливість рівності

$$\boldsymbol{\rho}_3'^2 = -\mu(1-\mu)\boldsymbol{\rho}_{12}'^2 + (1-\mu)\boldsymbol{\rho}_{13}'^2 + \mu\boldsymbol{\rho}_{23}'^2, \qquad (23)$$

то, використовуючи (22), приходимо до аналогів рівностей (19) і (20), які торкаються вже узагальнених швидкостей $v_{ij}^2 = \boldsymbol{\rho}_{ij}'^2$ і $v_3^2 = \boldsymbol{\rho}_3'^2$:

$$v_{13}^2 = -2\mu\left(y' + \frac{x}{\rho_{12}^3}\right) + \mu^2 v_{12}^2 + v_3^2, \qquad (24)$$

$$v_{23}^2 = 2(1-\mu)\left(y' + \frac{x}{\rho_{12}^3}\right) + (1-\mu)^2 v_{12}^2 + v_3^2. \qquad (25)$$

3 Про рух малої частки по координаті ζ

Як ми вже згадували вище, рух малої частки обмежений у проекції на площину обертання двох масивних тіл [12], а отже обмежений відносно плоских координат ξ і η. Питання залишається відкритим щодо координати ζ. З'ясуємо деякі деталі руху у цьому випадку.

Твердження 1. *Нехай у рамках обмеженої еліптичної задачі трьох тіл рух нескінченно малої частки, що визначається рівняннями (1), задовольняє умову дистальності:*

$$\rho_{i3}(\tau) \geq c \quad \forall \tau \in R =]-\infty, \infty[, \quad \forall i = 1, 2; \quad 0 < c = const. \tag{26}$$

Тоді всі критичні точки (тобто точки, у яких $\zeta'(\tau) = 0$) функції $\zeta(\tau)$ є точками її локального максимуму, якщо

$$\zeta(\tau) \in [\zeta_0, \infty), \quad \zeta_0 > 0 \tag{27}$$

і, навпаки, точками локального мінімуму, якщо

$$\zeta(\tau) \in [\zeta^0, -\infty), \quad \zeta^0 < 0. \tag{28}$$

Доведення. Нехай існує точка $\zeta^* \in [\zeta_0, \infty)$, у якій $\zeta'(\tau)\Big|_{\zeta=\zeta^*} = 0$. Тоді згідно з третім рівнянням системи (3), враховуючи (4), маємо

$$\zeta'' < 0 \quad \forall \zeta(\tau) \in [\zeta_0, \infty) \tag{29}$$

і, таким чином, точка ζ^* відповідає локальному максимуму функції $\zeta(\tau)$ в інтервалі $[\zeta_0, \infty)$. Більше того, згідно з (29) у цьому випадку функція $\zeta(\tau)$ є строго увігнутою [13]. Отже, якщо в інтервалі $[\zeta_0, \infty)$ існує критична точка, то це максимум і ця критична точка єдина у розглядуваному інтервалі. Досягнувши максимуму, функція $\zeta(\tau)$ зменшується, переходячи до значень в інтервалі $[\zeta^0, -\infty)$.

Коли виконується умова (28), міркуємо аналогічно. Функція $\zeta(\tau)$ у цьому випадку, навпаки, є строго опуклою в інтервалі $[\zeta^0, -\infty)$. $\square$

Наслідок 1. *Якщо координата $\zeta(\tau)$ задовольняє умову (27), то $\forall \zeta(\tau) \in (\zeta_0, \infty)$ можлива зміна знаку $\zeta'(\tau)$ зі значення $\zeta'(\tau) > 0$ на значення $\zeta'(\tau) < 0$ і, навпаки, перехід $\zeta'(\tau)$ зі значення $\zeta'(\tau) < 0$ на значення $\zeta'(\tau) > 0$ неможливий.*

Аналогічно, якщо координата $\zeta(\tau)$ задовольняє умову (28), то $\forall\zeta(\tau) \in (\zeta^0, -\infty)$ можлива зміна знаку $\zeta'(\tau)$ зі значення $\zeta'(\tau) < 0$ на значення $\zeta'(\tau) > 0$ і, навпаки, перехід $\zeta'(\tau)$ зі значення $\zeta'(\tau) > 0$ на значення $\zeta'(\tau) < 0$ неможливий.

Наслідок 2. *Координата $\zeta(\tau)$ може як монотонно зростати (спадати), так і здійснювати коливний рух з амплітудою, що може бути як обмеженою, так і необмеженою.*

Твердження 2. *Нехай у рамках обмеженої еліптичної задачі трьох тіл виконується умова дистальності (26).*

Тоді, якщо координата $\zeta(\tau)$ є необмеженою, то існує послідовність проміжків часу $\{T_n\}(n = 1, 2, 3, \dots)$ необмежено зростаючої довжини, на яких функція $\zeta(\tau)$ монотонно зростає (спадає).

Доведення. Отже припустимо, що координата $\zeta(\tau)$ є необмеженою. Тоді існує така послідовність $\{\tau_k\}$ $(k = 1, 2, 3, \dots)$, що

$$\lim_{k\to\infty} \tau_k = \infty \tag{30}$$

і виконується принаймні одна з рівностей

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\, \zeta(\tau_k) = +\infty, \tag{31}$$

$$\underline{\lim_{k\to\infty}}\, \zeta(\tau_k) = -\infty. \tag{32}$$

Відповідно до твердження 1 всі локальні максимуми функції $\zeta(\tau)$, пов'язані з такими моментами часу τ, коли $\zeta \in [\zeta_0, \infty)$, а локальні мінімуми – коли $\zeta \in [\zeta^0, -\infty)$. Без обмеження загальності розгляду далі достатньо зупинитися на випадку, коли виконується рівність (31) і, таким чином, всі локальні максимуми функції $\zeta(\tau)$, пов'язані з моментами часу τ, що відповідають $\zeta \in [\zeta_0, \infty)$.

Позначимо послідовність цих локальних максимумів через $\{\zeta_r^{\max}(\tau_r)\}$, де $(r = 1, 2, 3, \dots)$, а τ_r означає момент часу τ, що відповідає $\zeta(\tau_r) = \zeta_r^{\max}$. Зв'яжемо з кожним номером r проміжок часу T_r, протягом якого функція $\zeta(\tau)$ монотонно зростає у межах інтервалу (ζ_0, ∞). Послідовність таких проміжків відповідно до рівностей (30) і (31) позначимо через $\{T_r\}$. На кожному з цих проміжків часу швидкість $\zeta'(\tau)$ може бути різною, але оскільки швидкість нескінченно малої частки обмежена, то необмежене збільшення відстані малої частки від центра мас зумовлює необмежене зростання часу, необхідного для подолання цієї відстані. Таким чином, з послідовності $\{T_r\}$ завжди можна виокремити підпослідовність $\{T_{r_l}\}$, $(r_1 < r_2 < r_3 < \ldots)$, таку, що $T_{r_1} < T_{r_2} < T_{r_3} < \ldots$. Отже, поклавши $n = r_l$, робимо висновок про справедливість твердження 2. □

Наслідок 3. *Якщо в умовах твердження 2 координата ζ монотонно зростає (спадає) з плином часу τ, то послідовність $\{T_n\}(n = 1, 2, 3, \ldots)$ вичерпується одним елементом.*

Твердження 3. *Нехай у рамках обмеженої еліптичної задачі трьох тіл рух нескінченно малої частки, що визначається рівняннями (1), задовольняє умову дистальності (26), а координата $\zeta(\tau)$ у межах інтервалу $[\zeta_0, \infty)$, $\zeta_0 > 0$ монотонно зрастає при $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$, де $\tau_2 > \tau_1 > 0$.*

Тоді має місце інваріантне співвідношення (квазінтеграл):

$$\frac{1}{2}\zeta'^2\Big|_{\tau_1}^{\tau_2} = \Psi(\hat{\tau})\frac{1}{\zeta}\Big|_{\tau_1}^{\tau_2}, \tag{33}$$

де $\hat{\tau} \in [\tau_1, \tau_2]$, а

$$\Psi(\hat{\tau}) = \left\{ \frac{(1-\mu)}{\left[\frac{(\xi-\xi_1)^2+(\eta-\eta_1)^2}{\zeta^2} + 1\right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{\mu}{\left[\frac{(\xi-\xi_2)^2+(\eta-\eta_2)^2}{\zeta^2} + 1\right]^{\frac{3}{2}}} \right\}\Bigg|_{\tau=\hat{\tau}}. \tag{34}$$

Доведення. Помножимо обидві частини третього рівняння системи (3) на ζ' і проінтегруємо. У результаті отримаємо

$$\frac{1}{2}\zeta'^2\Big|_{\tau_1}^{\tau_2} = -(1-\mu)\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{\zeta'\zeta}{\rho_{13}^3}d\tau - \mu\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{\zeta'\zeta}{\rho_{23}^3}d\tau, \tag{35}$$

де $\tau_2 > \tau_1 > 0$. Проведемо деякі перетворення у правій частині рівності (35). Для цього перш за все зобразимо рівності (4) у формі

$$\begin{aligned} \rho_{13}^2 &= \zeta^2\left[\frac{(\xi-\xi_1)^2 + (\eta-\eta_1)^2}{\zeta^2} + 1\right], \\ \rho_{23}^2 &= \zeta^2\left[\frac{(\xi-\xi_2)^2 + (\eta-\eta_2)^2}{\zeta^2} + 1\right], \end{aligned} \tag{36}$$

після чого рівність (35) записуємо у вигляді

$$\frac{1}{2}\zeta'^2\Big|_{\tau_1}^{\tau_2} = -\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \psi(\tau)\frac{\zeta'}{\zeta^2}d\tau, \tag{37}$$

де

$$\Psi(\tau) = \frac{(1-\mu)}{\left[\frac{(\xi-\xi_1)^2+(\eta-\eta_1)^2}{\zeta^2}+1\right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{\mu}{\left[\frac{(\xi-\xi_2)^2+(\eta-\eta_2)^2}{\zeta^2}+1\right]^{\frac{3}{2}}}. \tag{38}$$

Оскільки у правій частині рівності (37) функція ζ' невід'ємна, то ми можемо застосувати теорему про середнє [13], у результаті чого приходимо до рівності

$$\frac{1}{2}\zeta'^2\Big|_{\tau_1}^{\tau_2} = -\Psi(\hat{\tau})\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{\zeta'}{\zeta^2}d\tau, \tag{39}$$

де $\hat{\tau} \in [\tau_1, \tau_2]$.

На підставі (39) отримуємо (33). □

Наслідок 4. *Якщо в умовах твердження 3 координата ζ монотонно зростає за часом τ до нескінченності, то це зростання є строгим.*

Доведення. Скористаємося інваріантним співвідношенням (33), яке перепишемо у вигляді

$$\frac{1}{2}\zeta'^2(\tau) - \Psi(\hat{\tau})\frac{1}{\zeta(\tau)} = \frac{1}{2}\zeta'^2(\tau_0) - \Psi(\hat{\tau})\frac{1}{\zeta(\tau_0)}, \tag{40}$$

де $\hat{\tau} \in [\tau_1, \tau]$, $\zeta(\tau_1) \in [\zeta_0, \infty)$, $\zeta_0 > 0$, $\tau > \tau_1 > 0$ і у відповідності з (38) функція $\Psi(\hat{\tau})$ обмежена і додатна. Згідно з припущенням про монотонне зростання координати ζ права частина рівності (40) невід'ємна і таким чином

$$\frac{1}{2}\zeta'^2(\tau) \geq \Psi(\hat{\tau})\frac{1}{\zeta(\tau)}, \tag{41}$$

звідки, враховуючи нерівність

$$\frac{1}{\zeta(\tau)} > 0,$$

яка має місце при $\zeta(\tau) \in [\zeta_0, \infty)$ і $\tau \in [\tau_0, \infty)$, робимо висновок про справедливість наслідку. $\Box$

Зв'яжемо з кожним проміжком часу T_n з послідовності $\{T_n\}$, про яку йшлося у твердженні 2, точку (ζ^*, τ_n), де $\zeta^* \in [\zeta_0, \infty)$, $\tau_n \in T_n$, причому τ_n відповідає такому моменту часу, що $\zeta(\tau_n) = \zeta^*$. Таким чином, точка ζ^* є спільною для всіх n пар (ζ^*, τ_n). Вважатимемо, що вибір точки ζ^* здійснено таким чином, що виконується умова

$$\Psi(\tau)\bigg|_{\zeta=\zeta^*} = 1 + \gamma(\tau), \quad \gamma(\tau) < \varepsilon, \tag{42}$$

де $\tau > \tau_n$, а ε – достатньо мале додатне число. Це не обмежує загальності розгляду, оскільки згідно з (38) функція $\Psi(\tau)$ прямує до одиниці, якщо ζ прямує до нескінченності. Тому, якщо припустити, що ця умова для послідовності $\{T_n\}$ не виконується, то ми завжди можемо виокремити з $\{T_n\}$ підпослідовність, яка вже задовольняє потрібну вимогу.

Скористаємося тепер рівністю (33), у якій замість τ_1 і τ_2 підставимо значення τ_n і $\tilde{\tau}_n$ ($\tau_n < \tilde{\tau}_n$, $[\tau_n, \tilde{\tau}_n] \subset T_n$), де останнє з них означає такий момент часу, що $\zeta(\tilde{\tau}_n)$ є максимумом функції $\zeta(\tau)$ у межах інтервалу $[\zeta_0, \infty)$. У результаті отримуємо

$$\frac{1}{2}\zeta'^2\bigg|_{\tau_n}^{\tilde{\tau}_n} = \Psi(\hat{\tau}_n)\frac{1}{\zeta}\bigg|_{\tau_n}^{\tilde{\tau}_n}, \quad \hat{\tau}_n \in [\tau_n, \tilde{\tau}_n] \tag{43}$$

або

$$\frac{1}{2}\left[\zeta'^2(\tilde{\tau}_n) - \zeta'^2(\tau_n)\right] = [1 + \gamma(\hat{\tau}_n)]\left[\frac{1}{\zeta(\tilde{\tau}_n)} - \frac{1}{\zeta^*}\right], \tag{44}$$

де з врахуванням (42) $\gamma(\hat{\tau}_n) < \varepsilon$.

У зв'язку з (44) справедливе наступне

Твердження 4. *У рамках обмеженої еліптичної задачі трьох тіл, коли виконується умова дистальності (26), справедлива рівність*

$$\lim_{n\to\infty} \zeta'^2(\tau_n) = [1 + \gamma(\hat{\tau}_n^*)]\frac{2}{\zeta^*} \quad \hat{\tau}_n^* \in [\tau_n, \infty). \tag{45}$$

Доведення. Зобразимо рівність (44) у вигляді

$$\frac{1}{2}\zeta'^2(\tilde{\tau}_n) - [1 + \gamma(\hat{\tau}_n)]\frac{1}{\zeta(\tilde{\tau}_n)} = \frac{1}{2}\zeta'^2(\tau_n) - [1 + \gamma(\hat{\tau}_n)]\frac{1}{\zeta^*}. \tag{46}$$

Оскільки $\zeta(\tilde{\tau}_n) = \zeta_n^{\max}$, то у відповідності з рівністю (46) маємо

$$-[1+\gamma(\hat{\tau}_n)]\frac{1}{\zeta(\tilde{\tau}_n)} = \frac{1}{2}\zeta'^2(\tau_n) - [1+\gamma(\hat{\tau}_n)]\frac{1}{\zeta^*}. \tag{47}$$

Згідно з (30), (31) справедлива рівність

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\zeta(\tilde{\tau}_n)} = 0,$$

на підставі якої при n, прямуючому до нескінченності, з (47) випливає (45). □

На завершення зазначимо, що, не отримавши повної відповіді на питання щодо обмеженості руху нескінченно малої частки відносно координати ζ, ми виявили деякі характерні риси руху, властиві еліптичній обмеженій задачі, які можуть бути корисними для подальшого дослідження. У цьому зв'язку цікавим є факт існування інваріантного співвідношення (33), яке за своєю структурою досить схоже на інтеграл енергії у задачі двох тіл.

[1] *Себехей В.* Теория орбит. Ограниченная задача трех тел.— М.: Наука, 1982.— 656 с.

[2] *Рой А.Е.* Движение по орбитам.— М.: Наука, 1981.— 544 с.

[3] *Qi Y., Xu S.J.* Lunar capture in the planar restricted three-body problem // Celestial Mech. Dyn. Astron. — 2014. — **120**. — P. 401–422.

[4] *Makó Z. and Szenkovits F.* Capture in the circular and elliptic restricted three-body problem // Celestial Mech. Dyn. Astron. — 2014. — **90**. — P. 51–58.

[5] *Makó Z. and Szenkovits F.* About the Hill stability of extrasolar planets in stellar binary systems // Celestial Mech. Dyn. Astron. — 2008. — **101**. — P. 273–287.

[6] *Georgakarakos N.* Stability criteria for hierarchical triple systems // Celestial Mech. Dyn. Astron. — 2008. — **100**. — P. 151–168.

[7] *Gong S. and Li J.* Analytical criteria of Hill stability in the elliptic restricted three-body problem // Astrophys. Space Sci. — 2008. — **358**,(37). — P. 1–10.

[8] *Hill G.W.* Researches in the Lunar Theory // Am. J. Math. — 1878. — **1**. — P. 5–26.

[9] *Сосницький С.П.* Про стійкість руху за Лагранжем у задачі трьох тіл // Укр. мат. журн. — 2005. — **57**, № 8. — С. 1137–1143.

[10] *Sosnitskii S.P.* On the stability of triangular Lagrangian points in the restricted three-body problem // Astron. J. — 2008. — **135**. — P. 187–195.

[11] *Sosnitskii S.P.* On the orbital stability of triangular Lagrangian motions in the three-body problem // Astron. J. — 2008. — **136**. — P. 2533–2540.

[12] *Sosnitskii S.P.* On the Lagrange stability of motion in the planar restricted three-body problem // Adv. Space Res. — 2017. — **59**. — P. 2459–2465.

[13] *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления // М.: Наука, 1970.— Т. 1, 607 с., Т. 2, 800 с.