Збірник праць Інституту математики НАН України 2016, т. 13, № 3, 85–98

УДК 517.5

Кубічний сплайн три-монотонного наближення

Г. А. Дзюбенко

Міжнародний математичний центр ім. Ю. О. Митропольського НАН України, Київ; dzyuben@imath.kiev.ua

For any 3-monotone on $[a,b]$ function f (its third divided differences are nonnegative for all choices of four distinct points, or equivalently, f has a convex derivative on (a,b)) we construct a cubic 3-monotone (like f) spline s with $n \in \mathbb{N}$ "almost" equidistant knots a_j such that

$$\|f-s\|_{[a_j,a_{j-1}]} \le c\,\omega_4\left(f,(b-a)/n,[a_{j+4},a_{j-5}]\cap[a,b]\right), \quad j=1,...,n,$$

where c is an absolute constant, $\omega_4\left(f,t,[\cdot,\cdot]\right)$ is the 4-th modulus of smoothness of f, and $||\cdot||_{[\cdot,\cdot]}$ is the max-norm.

Для любой 3-монотонной на $[a,b]$ функции f (ее третья разделенная разность неотрицательна для всех наборов из четырех разных точек или, эквивалентно, f имеет выпуклую на (a,b) производную) построен кубический 3-монотонный (как f) сплайн s с $n \in \mathbb{N}$ "почти" равноудаленными узлами a_j такой, что

$$\|f-s\|_{[a_j,a_{j-1}]} \le c\,\omega_4\left(f,(b-a)/n,[a_{j+4},a_{j-5}]\cap[a,b]\right), \quad j=1,...,n,$$

где c – абсолютная постоянная, $\omega_4\left(f,t,[\cdot,\cdot]\right)$ – 4-й модуль гладкости f и $||\cdot||_{[\cdot,\cdot]}$ – равномерная норма.

1 Вступ

Нехай $C := C[a,b]$ – простір неперервних на $[a,b]$ функцій $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ з рівномірною нормою $\|f\| := \|f\|_{[a,b]} := \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$, $C^q := \{f : f^{(q)} \in C\}$, $q \in \mathbb{N}$, і нехай $\Delta^3 := \Delta^3[a,b]$ – множина функцій $f \in C$, що мають невід'ємну третю розділену різницю в усіх наборах з чотирьох різних точок. Зауважимо, що якщо $f \in \Delta^3$, то $f \in C^1$ і f' опукла на (a,b). Функції з Δ^3 називаються *3-монотонними.* Також, якщо

$f \in C$ є тричі неперервно диференційованою на (a,b), то $f \in \Delta^3$ тоді і тільки тоді, коли $f'''(x) \geq 0,\ x \in (a,b)$.

У статті йдеться про наближення $f \in \Delta^3$ кубічним сплайном, який теж з Δ^3. А саме, ми доводимо теорему.

Теорема 1.1. *Нехай $\{a_j\}_{j=0}^n$ – набір рівновіддалених точок відрізку $[a,b]$, а саме $a = a_n < a_{n-1} < ... < a_0 = b,\ h := (b-a)/n$. Якщо функція $f \in \Delta^3$, то існують набір $\{b_j\}_{j=0}^n$ точок $[a,b]$ такий, що*

$$|a_j - b_j| \leq 3h/2, \quad |b_j - b_{j-1}| \geq h/2,$$

і кубічний сплайн $s \in C^1$ з вузлами у точках b_j такий, що

$$s \in \Delta^3, \tag{1}$$

$$\|f - s\|_{[a_j, a_{j-1}]} \leq c\,\omega_4\left(f, h, [a_{j+4}, a_{j-5}] \cap [a,b]\right), \quad j = 1, ..., n, \tag{2}$$

а отже,

$$\|f - s\| \leq c\,\omega_4\left(f, h, [a,b]\right), \tag{3}$$

де $\omega_4\left(f, t, [\cdot,\cdot]\right)$ – 4-й модуль гладкості $f,\ a_\nu = a,\ \nu > n$, та $a_\nu = b,\ \nu < 0$.

Тут і надалі c позначають додатні абсолютні сталі, що можуть бути різними, навіть якщо вони стоять у одному рядку.

Теорема 1.1 є частинним випадком [1], де, зокрема, побудовано і сплайн для оцінки з модулем гладкості Дітціана-Тотіка 4-го порядку. В статті пропонується простіша, ніж у [1], конструкція сплайна. Він, на відміну від [1], представлений сумою усічених степеневих функцій, а отже, може бути використаний для побудови 3-монотонного многочлена, що наближатиме функцію, як у (3).

Зауважимо, що навіть питання про справджуваність поточкового аналогу (3), тобто оцінки

$$|f(x) - s(x)| \leq c\,\omega_4\left(f, \frac{1}{n^2} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{n}, [-1,1]\right), \quad x \in [-1,1], \tag{4}$$

є на сьогодні відкритим для 3-монотонного наближення (здається, що відповідь тут буде негативною, а функція $x^2\mathrm{sign}(x) \in \Delta^3$ буде контрприкладом, хоча ми не приділяємо цьому уваги у статті). Також зауважимо, що неможливо замінити ω_4 на $\omega_k,\ k > 4$, у (3) (див.

Шведов [2]). Більш того, відповідні оцінки для 3-монотонного наближення у L_p нормі з $p < \infty$, не є вірними навіть з ω_3 замість ω_4 (див. Коновалов, Левіатан [3] і Бондаренко, Примак [4, Зауваження 5]).

Що стосується q-монотонного наближення з $q > 3$, то тут (3) невірне також, навіть з ω_3 замість ω_4 (див. [1, Теорема 7.4]), хоча для 1-монотонного і 2-монотонного наближень відповідні оцінки справджуються. Таким чином, можна сказати, що оцінка (3) є "граничною" між позитивними і негативними випадками у формозберігаючому наближенні, що розглядається. Розгорнутий огляд тематики див. у роботі Копотун, Левіатан, Примак, Шевчук [5].

Зауваження 1.1. *Сплайн s, з Теореми 1.1, інтерполює f у a і b, але, взагалі кажучи, це не інтерполяційний (у своїх вузлах) сплайн степеня 3. Грубо кажучи, лише "мала" частина його вузлів залежить від f, тоді як решта є точками розбиття a_j. Крім того, точки a_j можуть бути "майже рівновіддаленими", див. Зауваження 3.1 у кінці статті.*

Історія 3-монотонного наближення сплайнами є наступною. Позначимо $I := [-1,1]$, $\quad \|\cdot\| := \|\cdot\|_I$,

$$\omega_4(f,t) := \omega_4(f,t,I)\,, \quad \rho_n(x) := \frac{1}{n^2} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{n}.$$

Нехай $[a,b] = I$. Для $f \in \Delta^3 \cap C^2$, Коновалов і Левіатан [6] були першими, хто побудував квадратичний сплайн $s_1 \in \Delta^3$ з n рівномірними вузлами такий, що

$$\|f - s_1\| \le c\, n^{-2}\omega_1(f'', 1/n)\,.$$

Примак [7] для $f \in \Delta^3$ побудував квадратичний сплайн $s_2 \in \Delta^3$ з n довільними фіксованими вузлами такий, що, зокрема, для рівномірних вузлів

$$\|f - s_2\| \le c\,\omega_3(f, 1/n)\,.$$

З результатів Шевчука [8], Левіатана і Примака [9, 10] випливає існування двох сплайнів s_3 і s_4 з $\Delta^3 \cap C^3$, обидва степеня 4 з n рівномірними вузлами, таких, що

$$\|f - s_3\| \le c\, n^{-3}\omega_2(f''', 1/n)\,, \quad n > 4, \quad f \in \Delta^3 \cap C^3,$$

$$\|f - s_4\| \le c\, n^{-1}\omega_4(f', 1/n)\,, \quad n > N(f), \quad f \in \Delta^3\ (\subset C^1),$$

де $N(f)$ є сталою, що залежить від f. Зазначимо, що остання нерівність є, взагалі кажучи, не вірною для всіх $n > 4$.

Нещодавно Бондаренко, Левіатан і Примак [11] довели першу (і, мабуть, остаточну за порядком наближення) поточкову оцінку

$$|f(x) - S(x)| \le c\,\omega_3\left(f, \rho_n(x)\right), \quad x \in I,$$

з S, що є 3-монотонним квадратичним сплайном по n-му чебишевському розбитті, і з S, що є 3-монотонним многочленом степеня $\le n$.

2 Допоміжні факти

2.1. Нехай $\{a_j\}_{j=0}^n$ є множиною з $n+1$ фіксованих точок a_j : $a = a_n < a_{n-1} < ... < a_1 < a_0 = b$, $n \in \mathbb{N}$. Для кожного $j = q, ..., n$, $q \in \mathbb{N}$, $q \le n$, нехай $L_q(x; a_j; g) := L(x; a_j, ..., a_{j-q}; g)$ позначає многочлен Лагранжа степеня $\le q$, який інтерполює $g \in C$ у $a_j, ..., a_{j-q}$.

Покладемо

$$S_q := S_q(x) := \begin{cases} L(x; a_q, ..., a_0; g), & x \in [a_q, b], \\ L(x; a_j, ..., a_{j-q}; g), & x \in [a_j, a_{j-1}),\ j = q+1, ..., n. \end{cases} \tag{5}$$

Для кожного $j = q, ..., n$, позначимо

$$\Psi_q(x, a_j) := \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \le a_j, \\ \prod\limits_{k=j-q+1}^{j} (x - a_k), & \text{якщо} \quad x > a_j, \end{cases} \qquad \Psi_q(x, a_{q-1}) :\equiv 0.$$

Твердження [12]. *Неперервний сплайн S_q має на $[a, b]$ наступне представлення*

$$S_q(x) = L_q(x; a_n; g) + \sum_{j=q}^{n-1} [a_{j+1}, a_j, ..., a_{j-q}; g](a_{j-q} - a_{j+1})\Psi_q(x, a_j),$$

або еквівалентно,

$$S_q(x) = L_{q-1}(x; a_n; g) + \sum_{j=q}^{n} [a_j, a_{j-1}, ..., a_{j-q}; g]\left(\Psi_q(x, a_j) - \Psi_q(x, a_{j-1})\right),$$

де квадратні дужки позначають розділені різниці g.

Для спрощення і не зменшуючи загальності, далі будемо розглядати $[a,b]=I$. Також, замість фігуруючих вище довільних фіксованих точок $\{a_j\}_{j=0}^n$ і замість рівновіддалених точок $\{a_j\}_{j=0}^n$ у Теоремі 1.1, надалі візьмемо рівновіддалені або "майже рівновіддалені" точки $\{x_j\}_{j=0}^n,\ n\geq 3,\ -1=x_n<x_{n-1}<...<x_0=1$. Позначимо

$$I_j:=I_{j,n}:=[x_{j,n},x_{j-1,n}],\quad h_j:=h_{j,n}:=x_{j-1,n}-x_{j,n},\quad j=1,...,n.$$

Для $a\in I$, покладемо

$$\chi(x,a):=\begin{cases}0, & \text{якщо}\quad x\leq a,\\ 1, & \text{якщо}\quad x>a,\end{cases}\qquad (x-a)_+^r:=(x-a)^r\,\chi(x,a),\quad r\in\mathbb{N}.$$

Будемо використовувати Твердження [12] тільки для $q=3$ і $\{x_j\}_{j=0}^n$. Тобто $\Psi_3(x,x_j)=(x-x_j)(x-x_{j-1})(x-x_{j-2})\chi(x,x_j)$ і $S_3(x)=$

$$L_3(x;x_n;g)+\sum_{j=3}^{n-1}[x_{j+1},x_j,x_{j-1},x_{j-2},x_{j-3};g](x_{j-3}-x_{j+1})\Psi_3(x,x_j),\tag{6}$$

або еквівалентно, $S_3(x)=$

$$L_2(x;x_n;g)+\sum_{j=3}^{n}[x_j,x_{j-1},x_{j-2},x_{j-3};g]\left(\Psi_3(x,x_j)-\Psi_3(x,x_{j-1})\right).\tag{7}$$

Нагадаємо, якщо $g\in\Delta^3$, то $[a,b,c,d;g]\geq 0$ для будь-яких різних a,b,c і d. Зауважимо, що $S_3\notin\Delta^3$ навіть якщо $g\in\Delta^3$.

Будемо використовувати без спеціальних посилань нерівність Уітні $\|g-l_3\|_{[a,b]}\leq\omega_4\left(g,(b-a)/4,[a,b]\right),\ a<b$, де l_3 – многочлен Лагранжа, що інтерполює g у $a,\ a+\frac{b-a}{3},\ b-\frac{b-a}{3}$ і b. Зразу відзначимо, що нерівності

$$\|g-S_3\|_{I_j}\leq c\,\omega_4\left(g,h_j,[x_j,x_{j-3}]\right),\quad j=1,...,n,\tag{8}$$

випливають з (5) $(x_{-1}:=x_{-2}:=1)$.

2.2. Доведемо допоміжну Лему 2.1, яка складає і самостійний інтерес, якщо розглядається функція f з невід'ємними розділеними різницями порядку $q,\ q\geq 3$. Для спрощення сформулюємо і доведемо Лему 2.1 для $q=3$. Позначимо

$$\delta_j:=\delta_j(f):=[x_{j+1},x_j,x_{j-1},x_{j-2},x_{j-3};f],\quad j=3,...,n-1.$$

$$\Delta_j := \Delta_j(f) := [x_j, x_{j-1}, x_{j-2}, x_{j-3}; f], \quad j = 3, ..., n.$$

Для спрощення позначень у Лемі 2.1 обмежимо j значеннями $\{5, 4, 3\}$, і нехай $x_5 < x_4 < ... < x_0$ – будь-які фіксовані точки з $\{x_j\}_{j=0}^n$.

Лема 2.1. *Якщо* $f \in \Delta^3$, *то*

$$(x_1 - x_4)(x_2 - x_3)\Delta_4 \leq (x_2 - x_5)(x_3 - x_4)\Delta_5 + (x_0 - x_3)(x_1 - x_2)\Delta_3 +$$

$$+2\left|\sqrt{(x_2 - x_5)(x_2 - x_4)\Delta_5(x_0 - x_3)(x_1 - x_3)\Delta_3}\right| =: A + 2B. \qquad (9)$$

Більш того, якщо $\Delta_5 \leq \Delta_4 \geq \Delta_3$, *то*

$$(x_1 - x_4)(x_2 - x_3)\Delta_4 \geq$$

$$\max\big\{(x_0 - x_3)(x_1 - x_2)\Delta_3 - (x_2 - x_5)(x_2 - x_4 + x_2 - x_3)\Delta_5,$$

$$(x_2 - x_5)(x_3 - x_4)\Delta_5 - (x_0 - x_3)(x_2 - x_3 + x_1 - x_3)\Delta_3\big\} =:$$

$$\max\{C, D\} \geq A - 2B. \qquad (10)$$

Доведення. Використовуючи одне з представлень розділених різниць [13] (див. також у [14, с. 14]), ми, для фіксованого $y \in (x_3, x_2)$, запишемо

$$\begin{aligned}
\Delta_4(f) &= (x_2 - x_4)[x_4, x_3, y, x_2; f]\Delta_4\big((x - x_3)(x - y)\chi(x, x_3)\big) + \\
&\quad + (x_1 - x_3)[x_3, y, x_2, x_1; f]\Delta_4\big((x - y)(x - x_2)\chi(x, y)\big) = \\
&= \frac{y - x_4}{x_1 - x_4}[x_4, x_3, y, x_2; f] + \frac{x_1 - y}{x_1 - x_4}[x_3, y, x_2, x_1; f], \\
\Delta_5(f) &= \frac{y - x_5}{x_2 - x_5}[x_5, x_4, x_3, y; f] + \frac{x_2 - y}{x_2 - x_5}[x_4, x_3, y, x_2; f], \\
\Delta_3(f) &= \frac{y - x_3}{x_0 - x_3}[x_3, y, x_2, x_1; f] + \frac{x_0 - y}{x_0 - x_3}[y, x_2, x_1, x_0; f].
\end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned}
\Delta_4(f) = \frac{(y - x_4)(x_2 - x_5)}{(x_2 - y)(x_1 - x_4)}\Delta_5(f) - \frac{(y - x_4)(y - x_5)}{(x_2 - y)(x_1 - x_4)}[x_5, x_4, x_3, y; f] + \\
+ \frac{(x_1 - y)(x_0 - x_3)}{(y - x_3)(x_1 - x_4)}\Delta_3(f) - \frac{(x_1 - y)(x_0 - y)}{(y - x_3)(x_1 - x_4)}[y, x_2, x_1, x_0; f].
\end{aligned} \qquad (11)$$

Оскільки $y \in (x_3, x_2)$ і $f \in \Delta^3$ $([a,b,c,d;f] \geq 0)$, то маємо

$$\Delta_4 \leq \min_{x_3<y<x_2} \left\{ \frac{(y-x_4)(x_2-x_5)}{(x_2-y)(x_1-x_4)}\Delta_5 + \frac{(x_1-y)(x_0-x_3)}{(y-x_3)(x_1-x_4)}\Delta_3 \right\}.$$

Знайшовши цей мінімум, бачимо, що $y_{\min} \in [x_3, x_2]$ для будь-яких $\Delta_5, \Delta_3 \geq 0$, і тому ми пишемо (9), беручи до уваги збіжність розділених різниць.

Доведемо першу нерівність у (10). Нехай $\max\{C, D\} = C$. Припустимо обернене, що

$$(x_1-x_4)(x_2-x_3)\Delta_4 < C. \tag{12}$$

З (11) маємо

$$\frac{(x_2-y)(x_1-x_4)}{(y-x_4)(x_2-x_5)} \left(\Delta_4 - \frac{(x_1-y)(x_0-x_3)}{(y-x_3)(x_1-x_4)}\Delta_3 \right) \leq \Delta_5, \quad y \in (x_3, x_2).$$

Разом з (12) це породжує $E_1\Delta_4 :=$

$$\left((x_1-x_4)(x_2-x_3) + (x_2-x_4+x_2-x_3)\frac{(x_2-y)(x_1-x_4)}{y-x_4} \right)\Delta_4 <$$

$$\left((x_0-x_3)(x_1-x_2) + (x_2-x_4+x_2-x_3)\frac{(x_2-y)(x_1-y)(x_0-x_3)}{(y-x_4)(y-x_3)(x_1-x_4)} \right) \times$$

$$\Delta_3 = E_2\Delta_3.$$

Оскільки $\{x_j\}_{j=0}^n$ є рівновіддалені, або "майже рівновіддалені" , тобто такі, що існує $[a,b] \subset (x_3, x_2)$, для якого $E_1 \geq E_2 > 0$ з $y \in [a,b]$, то остання нерівність протирічить нерівності $\Delta_4 \geq \Delta_3$ (зазначимо, що a і b, як нулі деякої параболи, можуть бути розташовані дуже близько один до одного і у найгіршому випадку порушення рівномірності точок x_j, $a = b$). Випадок $C < D$ доводиться аналогічно.

Друга нерівність у (10) очевидна. Дійсно, якщо $C \geq D$, то $(x_0 - x_3)(x_1-x_3)\Delta_3 \geq (x_2-x_5)(x_2-x_4)\Delta_5$ і тому $A - 2B \leq A - 2|\sqrt{((x_2-x_5)(x_2-x_4)\Delta_5)^2}| = C$. Лему 2.1 доведено.

$\square$

2.3. Зафіксуємо $n > 3$, $j = 3, ..., n-1$ і будь-які $a, c, b \in [x_{j+3}, x_{j-5}] \cap I$, $a < c < b$. Позначимо

$$\widehat{h}_1 := c - a, \quad \widehat{h}_2 := b - c, \quad \widetilde{h}_1 := b - x_j + b - x_{j-1} + b - x_{j-2},$$

$$\widetilde{h}_2 := (b-x_j)(b-x_{j-1}) + (b-x_j)(b-x_{j-2}) + (b-x_{j-1})(b-x_{j-2}),$$

$$\widetilde{h}_3 := (b-x_j)(b-x_{j-1})(b-x_{j-2}).$$

Означимо функцію $\varphi_j \in C^1$, співпадаючу з $\Psi_3(x, x_j)$ майже скрізь,

$$\varphi_j := \varphi_j(x) := \varphi_j(x, a, c, b) :=$$

$$\alpha_j(x-a)_+^3 + \beta_j(x-c)_+^3 + \gamma_j(x-c)_+^2 + (1-\alpha_j-\beta_j)(x-b)_+^3,$$

де

$$\alpha_j = \frac{\widetilde{h}_1\widehat{h}_2^2 - 2\widetilde{h}_2\widehat{h}_2 + 3\widetilde{h}_3}{3\widehat{h}_1^2(\widehat{h}_1+\widehat{h}_2)},$$

$$\beta_j = \frac{\widetilde{h}_1\widehat{h}_2(\widehat{h}_1+\widehat{h}_2)(2\widehat{h}_1-\widehat{h}_2) - \widetilde{h}_2(\widehat{h}_1^2 - 2\widehat{h}_2^2 + 2\widehat{h}_1\widehat{h}_2) - 3\widetilde{h}_3(\widehat{h}_2-\widehat{h}_1)}{3\widehat{h}_1^2\widehat{h}_2^2)},$$

$$\gamma_j := \widetilde{h}_1 - 3\alpha_j(\widehat{h}_1+\widehat{h}_2) - 3\beta_j\widehat{h}_2.$$

Зауважимо, що

$$\varphi_j(x) = \int\limits_{-1}^{x}\int\limits_{-1}^{t} \varphi_j''(u)du dt. \tag{13}$$

Коментар. Числа α_j і β_j обрані з двох відповідних умов так, щоб мати (13) (перша робить рівним нулю добуток всіх коефіцієнтів біля $(x-\cdot)^1$ у представленні Ψ_3 сумою $(x-\cdot)^r$, $r = 0, 1, 2, 3$, а друга робить те саме з усіма вільними коефіцієнтами, включаючи той, що утворюється першою умовою).

Таким чином,

$$\varphi_j(x, a, c, b) = \Psi_3(x, x_j), \quad x \in I \setminus [\min\{a, x_j\}, b] =: I \setminus \widehat{I}_j, \tag{14}$$

і якщо $h_j \le \widehat{h}_1 < 10h_j$ і $h_j \le \widehat{h}_2 < 10h_j$, то

$$\|\Psi_3(\cdot, x_j) - \varphi_j\| = \|\Psi_3(\cdot, x_j) - \varphi_j\|_{\widehat{I}_j} \le c\, h_j^3. \tag{15}$$

3 Доведення Теореми 1.1

Конструкція кубічного три-монотонного сплайну

3.1. Скрізь надалі $f \in \Delta^3$. Нехай $n > 4$. Для кожного $j = 4, ..., n-1$ позначимо $\Lambda_j := (x_{j-3} - x_j)\Delta_j$, і якщо

$$\Delta_{j+1} \le \Delta_j > \Delta_{j-1}, \tag{16}$$

то будемо писати $j \in W$. Для кожного $j \in W$ позначимо точку

$$d_j := \frac{(x_j + x_{j-1})\Lambda_{j+1} + (x_{j-1} + x_{j-2})\Lambda_j + (x_{j-2} + x_{j-3})\Lambda_{j-1}}{2(\Lambda_{j+1} + \Lambda_j + \Lambda_{j-1})},$$

що є центром параболи

$$P_j(x) := \Lambda_{j+1}(x - x_j)(x - x_{j-1}) + \Lambda_j(x - x_{j-1})(x - x_{j-2}) +$$

$$\Lambda_{j-1}(x - x_{j-2})(x - x_{j-3}) = \big(\Lambda_{j+1} + \Lambda_j + \Lambda_{j-1}\big)(x - d_j)^2 + H_j,$$

де $H_j := \Lambda_{j+1}(d_j - x_j)(d_j - x_{j-1}) + \Lambda_j(d_j - x_{j-1})(d_j - x_{j-2}) + \Lambda_{j-1}(d_j - x_{j-2})(d_j - x_{j-3})$. Беручи до уваги першу нерівність у (10), нехай "майже рівновіддалені" x_j є такі, що

$$d_j \in I_{j-1}, \quad j \in W \tag{17}$$

(для рівновіддалених x_j таке включення гарантоване). Введемо

$$Z := \{j-1, j-2 : \ j \in W\}$$

(тобто, всі пари індексів, що відповідають кінцям проміжку у (17)). Використовуючи (9) і (10), легко перевірити, що

$$\overline{H}_j \ge H_j \ge 0, \quad j \in W, \tag{18}$$

де $\overline{H}_j$ є найбільшим значенням H_j, коли $\Lambda_j(x_{j-2} - x_{j-1}) = \Lambda_{j+1}(x_{j-1} - x_j) + \Lambda_{j-1}(x_{j-3} - x_{j-2})$. Аналогічно, якщо у (9) ми маємо рівність, то $H_j = 0$.

Нехай

$$D := \{d_j : \ j \in W\}.$$

Відзначимо, що точки з D розташовані на розбитті x_j принаймні через один інтервал. Іншими словами, для будь-якого $j \in W$, індекси

$j \pm 1$, що відповідають розбиттю x_j, не належать W (у гіршому випадку тільки $j \pm 2$ можуть бути у W). Зокрема, беручи до уваги (17), зауважимо, що якщо будь-яке

$$j \in \{3, 4, ..., n-1\} =: J$$

є таким, що $\Delta_{j+1} \le \Delta_j$, то завжди $(x_j, x_{j-1}) \cap D = \emptyset$, а якщо воно таке, що $\Delta_{j+1} > \Delta_j$, то завжди $(x_{j-1}, x_{j-2}) \cap D = \emptyset$. Останні два зауваження будуть використовуватися без спеціальних посилань.

Позначимо

$$V := J \setminus \big(W \cup \{j-1 :\ j \in W\}\big).$$

Зазначимо, що $V = \{j :\ j-1 \in J \setminus Z\}$.

Введемо

$$Y := \{y_i\}_{i=0}^{k} := \{x_j :\ j \in (J \cup \{1,2\}) \setminus Z\} \cup D \cup \{-1, 1\},$$

де точки y_i перенумеровано у зворотньому порядку і $n - [n/3] - 1 \le k \le n$.

Далі, для кожного $j \in J$, введемо нову функцію $\Psi_j = \Psi_j(x) \in C^1$. Для кожного $j \in V$, через $i(j)$ позначимо такий індекс i, при якому $y_i = x_{j-1}$, і покладемо

$$\Psi_j(x) := \begin{cases} \varphi_j(x, y_{i(j)}, y_{i(j)-1}, y_{i(j)-2}), & \text{якщо} \quad \Delta_{j+1} \le \Delta_j, \qquad (19) \\ \varphi_j(x, y_{i(j)+2}, y_{i(j)+1}, y_{i(j)}), & \text{інакше.} \qquad (20) \end{cases}$$

Для кожного $j \in W$, через $i^*(j)$ позначимо такий індекс i, при якому $y_i = d_j$, і покладемо

$$\Psi_j(x) := \varphi_j(x, y_{i^*(j)+1}, y_{i^*(j)}, y_{i^*(j)-1}), \tag{21}$$

$$\Psi_{j-1}(x) := \varphi_{j-1}(x, y_{i^*(j)+1}, y_{i^*(j)}, y_{i^*(j)-1}). \tag{22}$$

Означення $\Psi_j,\ j \in J$, завершено. Покладемо $\Psi_2(x) := \Psi_3(x, x_2) = 0$,

$$\Psi_n(x) := \Psi_3(x, x_n) = (x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2}).$$

Таким чином, неперервно диференційовний на I кубічний сплайн

$$s(x) := L_3(x; x_n; f) + \sum_{j=3}^{n-1} \delta_j(f)\,(x_{j-3} - x_{j+1})\,\Psi_j(x), \tag{23}$$

або еквівалентно,

$$s(x) := L_2(x; x_n; f) + \sum_{j=3}^{n} \Delta_j(f)\ (\Psi_j(x) - \Psi_{j-1}(x))\,, \tag{24}$$

має свої вузли лише в Y.

3.2. Доведем (3). Оскільки

$$h_{j^*} \le |y_i - y_{i-1}| < 4\, h_{j^*}, \quad j = 1, ..., k, \tag{25}$$

де h_{j^*} є довжина будь-якого найближчого до y_i проміжку I_j (з двох можливих), то оцінка (3) випливає з (8), (6), (23), (14), (15) і оцінки

$$|\delta_j| \le c\frac{\omega_4(f, h_j)}{h_j^4}, \quad j = 3, ..., n-1,$$

див., наприклад, [14, c.54]. А саме, якщо $x \in I_{j^*}$, то

$$|f(x) - s(x)| \le |f(x) - S_3(x)| + |S_3(x) - s(x)| \le$$

$$\le c\,\omega_4(f, 1/n) + \sum_{j=3}^{n-1} |\delta_j|(x_{j-3} - x_{j+1})\,|\Psi_3(x, x_j) - \Psi_j(x)| =$$

$$= c\,\omega_4(f, 1/n) + \sum_{j=\max\{3, j^*-5\}}^{\min\{n-1, j^*+4\}} |\delta_j|(x_{j-3} - x_{j+1})\,|\Psi_3(x, x_j) - \Psi_j(x)| \le$$

$$c\,\omega_4(f, 1/n).$$

Отже, оцінку (3) доведено з одночасним доведенням (2).

Покажемо (1), тобто перевіримо, що $s''(x)$ не спадає на I. Зауважимо, що в усіх Ψ_j,

$$\mathrm{sign}\gamma_j = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad \Delta_{j+1} \le \Delta_j, \\ -1, & \text{інакше}, \end{cases} \qquad j \in J. \tag{26}$$

Це буде зручно побачити разом з наступним. Нехай $j \in V^+$ (V^-), якщо справджується (19) ((20)), відповідно, тобто $V = V^+ \cup V^-$. Беручи до уваги (25), зазначимо, що у Ψ_j з $j \in V^+$, $\alpha_j + \beta_j \ge 0$ завдяки рівновіддаленому, або "майже рівновіддаленому" розбиттю x_j, тоді як $\alpha_j \ge 0$ завжди (для всіх x_j). Обидва числа (тобто, $\alpha_j + \beta_j$ і α_j) ≤ 1. Аналогічно, якщо $j \in V^-$, то $\alpha_j \le 1$ завдяки x_j, тоді як $\alpha_j + \beta_j \le 1$ завжди. Обидва числа ≥ 0. Будемо використовувати ці чотири зауваження зі спеціальним посиланням $(*)$.

Зауваження 3.1. *Саме ці симетричні умови, разом з (17) і Лемою 2.1, накладають обмеження на розбиття x_j. Для рівновіддалених точок вони гарантовано виконуються, на відміну, скажімо, від чебишевського розбиття біля кінців інтервалу (у центральній частині чебишевського розбиття теж все добре).*

Стосовно чисел α_j і $\alpha_j + \beta_j$ у (21), а також α_{j-1} і $\alpha_{j-1} + \beta_{j-1}$ у (22), зауважимо, що вони суттєво залежать тільки від розташування центрального вузла $y_{i^*(j)} = d_j$. А саме, якщо d_j знаходиться біля правого кінця I_{j-1} (див. (17)), то α_j і $\alpha_j + \beta_j$ "хороші" , тобто задовольняють $(*)$ з $j \in V^+$, тоді як $1 \le \alpha_{j-1} + \beta_{j-1} < 1.5$ "погані" (тобто не задовольняють $(*)$) і $0 \le \alpha_{j-1} < 0.5$, інакше (якщо біля лівого кінця) α_{j-1} і $\alpha_{j-1} + \beta_{j-1}$ "хороші" , тоді як $-0.5 < \alpha_j \le 0$ і $1 \le \alpha_j + \beta_j < 1.5$ "погані". (Фактично, 1.5 і -0.5 це грубі числа.) Будемо посилатись на "погані" властивості через $(**)$.

Таким чином, з (24) і (26) зразу помітимо, що

$$s''(y_i-) \le s''(y_i+), \quad y_i \in Y. \tag{27}$$

Далі зазначимо, що суму у (24) зручно розглядати у спадному порядку, тобто від n до 3, як і дивитися на неспадність s'' а не на невід'ємність s''' на кожному (y_i, y_{i-1}). Переконаємося, що

$$s''(x) \nearrow, \quad x \in (y_i, y_{i-1}),\ i = 1, ..., k. \tag{28}$$

Нехай a_j (b_j) позначає найменший (найбільший) вузол з трьох вузлів кожної Ψ_j, відповідно. Зауважимо, що

$$\Psi_j''(x) - \Psi_{j-1}''(x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x \in (-\infty, a_j], \\ 2(x_{j-3} - x_j), \text{ якщо } x \in [b_{j-1}, +\infty), \end{cases} j = 4, ..., n. \tag{29}$$

Виділимо з (24) три доданки

$$\Delta_{j+1}\big(\Psi_{j+1}''(x) - \Psi_j''(x)\big) + \Delta_j\big(\Psi_j''(x) - \Psi_{j-1}''(x)\big) +$$

$$\Delta_{j-1}\big(\Psi_{j-1}''(x) - \Psi_{j-2}''(x)\big) =: \overline{P}_j''(x), \tag{30}$$

і розглянемо

$$x \in (y_{i(j)+1}, y_{i(j)}) \cup (y_{i(j)}, y_{i(j)-1}) =: \widetilde{I}_{i(j)+1} \cup \widetilde{I}_{i(j)} =: \overline{I}_{i(j)}. \tag{31}$$

Маємо три принципових ситуації: 1) якщо $j+1 \in V^-$, то $j \in V$; 2) якщо $j+1 \in V^+$, то $j \in V^+$ (і ніколи до V^-); 3) $j+1 \in V \cup \{\nu - 1 : \nu \in W\}$, $\;j \in W$, $\;j-2 \in V \cup W$. Перші два випадки є подібні, тому перевіримо тільки другий. Зауважимо, що Ψ_{j+1} і Ψ_j мають тільки два спільних вузли $y_{i(j)}$ і $y_{i(j)-1}$. Беручи до уваги (30) і (19), запишемо

$$s''(x) = A(x - y_{i(j)}) + B = A(x - x_{j-1}) + B \nearrow, \quad x \in \widetilde{I}_{i(j)},$$

де $A \geq (\Delta_{j+1} - \Delta_{j+2})(\alpha_{j+1} + \beta_{j+1}) + (\Delta_j - \Delta_{j+1})\alpha_j \geq 0$ завдяки тому, що $\Delta_{j+2} \leq \Delta_{j+1} \leq \Delta_j$ разом з $(*)$, а B є невід'ємна стала, оскільки є (29).

Для отримання (28), у складному випадку 3), скористаємося тим, що "хороші" властивості $(*)$ у сумі з "поганими" $(**)$ завжди разом дадуть (28). Більш точно, беручи до уваги (14) і (15), розглянемо для (31) три головні співвідношення (13), (18) і (25). Нагадаємо, у цьому випадку $y_{i(j)} = y_{i^*(j)} = d_j$. Завдяки (13) маємо

$$\int\limits_{-1}^{x}\int\limits_{-1}^{t} \overline{P}_j''(u)dudt = P_j(x)\chi(x, d_j), \quad x \in I \setminus \overline{I}_{i^*(j)}, \tag{32}$$

і більш того,

$$\int\limits_{-1}^{x} \overline{P}_j''(t)dt = P_j'(x)\chi(x, d_j), \quad x \in I \setminus \overline{I}_{i^*(j)}. \tag{33}$$

Оскільки $\overline{P}_j''(x)$ має тільки три вузли і, більш того, центральний − це d_j (тобто, центр P_j), то рівності (33) і (32) з $H_j \geq 0$ не можуть бути вірними обидві разом одночасно без (28), див. також (27). Як додаткове зауваження, скажемо, що нерівність (25) дає достатні відстані між цими трьома вузлами, щоб сформувати досить гарно обмежене число $\overline{H}_j$ (див. (18)) у (32) без того, щоб зруйнувати (28) на $\overline{I}_{i^*(j)}$. Твердження (28), а отже і (1), доведено. Теорему 1.1 доведено.

[1] Dzyubenko G. A., Kopotun K. A., Prymak A. V. Three-monotone spline approximation // J. Approx. Theory. — 2010.— Vol. 162.— P. 2168–2183.

[2] Шведов А. С. Порядки коприближений функций алгебраическими многочленами // Мат. заметки. — 1981. — Т. 29, № 1. — С. 117–130.

[3] Konovalov V. N., Leviatan D. Shape preserving widths of Sobolev-type classes of s-monotone functions on a finite interval // Israel J. Math. — 2003. — Vol. 133.— P. 239–268.

[4] Бондаренко А. В., Примак А. В. Отрицательные результаты в формосохраняющем приближении высших порядков // Матем. заметки. — 2004. — Т. 76, № 6. — С. 812-–823.

[5] Kopotun K. A., Leviatan D., Prymak A. V., Shevchuk I. A. Uniform and Pointwise Shape Preserving Approximation by Algebraic Polynomials // Surveys in Approximation Theory. — 2011. — Vol. 6. — P. 24–74.

[6] Konovalov V. N., Leviatan D. Estimates on the approximation of 3-monotone function by 3-monotone quadratic splines // East J. Approx.— 2001. — Vol. 7. — P. 333–349.

[7] Prymak A. V. Three-convex approximation by quadratic spline with arbitrary fixed knots // East J. Approx. — 2002. — Vol. 8, no. 2.— P. 185–196.

[8] Shevchuk I. A. One construction of cubic convex spline // Proceedings of ICAOR. — 1997. — Vol. 1. — P. 357–368.

[9] Leviatan D., Prymak A. V. On 3-monotone approximation by piecewise polynomials // J. Approx. Theory. — 2005. — Vol. 133.— P. 147–172.

[10] Примак А. В. Згладжування зі збереженням форми 3-опуклих сплайнів 4-го степеня // Укр. мат. журн. — 2005. — Т. 57, № 2. — С. 277–283.

[11] Bondarenko A. V., Leviatan D., Prymak A. V. Pointwise Estimates for 3-monotone Approximation // J. Approx. Theory. — 2012. — Vol. 164. — P. 1205–1232.

[12] Dzyubenko G. A., Gilewicz J. Nearly coconvex pointwise approximation // East Jour. on Approx. — 2000. — Vol. 6. — P. 357–383.

[13] Popoviciu T. Sur quelques proprietes des fonctiones d'une ou de deux variables. — Roclloa Mathematica, 1934. — 85 p.

[14] Шевчук И. А. Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций. — К., Наукова думка, 1992. — 224 с. 111