

## Обобщённая нелинейная модальная модель третьего порядка малости колебаний жидкости в соосных конических резервуарах \*

*А. В. Солодун*

*Институт математики НАН Украины, Киев;  
solodun@imath.kiev.ua*

For the problem on the resonant sloshing in coaxial conical reservoirs occurring due to harmonic horizontal tank excitations, an infinite-dimensional governing system of third-order ordinary differential equations is derived. The derivation scheme is based on the non-conformal mapping technique and the Moiseev–Narimanov asymptotics.

Для задачі про резонансі коливання рідини у соосних конічних ємностях, що знаходяться під дією гармонічних горизонтальних збурень, виведено нескінченномірну нелінійну модальну систему нелінійних звичайних диференціальних рівнянь третього порядку, базуючись на техніці неконформних перетворень області та використовуючи асимптотики Моїсєєва–Наріманова.

### Введение

В последние годы исследования по динамике твердых тел с жидкостью пополнились новыми задачами, связанными с проектированием водонапорных башен, а также с перевозками сжиженного природного газа [12, 24, 25]. При резонансном возмущении баков, частично заполненных жидкостью, с частотой, близкой к низшей собственной частоте колебаний жидкости, движение свободной поверхности становится существенно нелинейным. При этом гидродинамический отклик (силы и моменты) значительно превышает амплитуду внешних сил, приложенных к баку, что может дестабилизировать движения системы

---

\*Робота виконана при частинчній підтримці НІР № 0117U004077.

бак-жидкость. Большинство работ, описывающих нелинейные колебания жидкости, относятся к случаю баков с вертикальными стенками (круговой цилиндр [3, 17, 22] и др., прямоугольный бак [13, 14] и др.). Случаю невертикальных стенок посвящены исследования в работах [4, 7, 8, 11, 16, 18, 20] и др. Обширная библиография относительно задач о нелинейных колебаниях жидкости приведена в [3, 15, 19] и др.

В настоящей работе развивается нелинейный мультимодальный метод, использование которого оправдано в ряде случаев исследований волновых движений жидкости. Преимущества, недостатки и ограничения метода обсуждаются в книгах [3, 15]. Это обобщение на случай баков с невертикальными стенками связывается с методом неконформных отображений Луковского [2, 20], который требует построения форм собственных колебаний жидкости в аналитическом виде, точно удовлетворяющих уравнению Лапласа и условию непрерывности на стенках сосуда. Такие собственные формы были построены для ряда конических [2, 5, 6, 18, 20] и сферических баков [16]. С использованием таких форм было построено ряд компактных и малоразмерных нелинейных модальных систем для V-образных конических баков [4, 7, 18, 20]. Такие системы базируются на асимптотике Моисеева-Нариманова, однако не являются “полными”, поскольку не все обобщенные координаты второго и третьего порядка малости включены в анализ. Полные в смысле Моисеева-Нариманова нелинейные модальные системы построены для усеченного конического [10], вертикального цилиндрического [22] и сферического [16] баков. Данная статья обобщает эти результаты на случай V-образных соосных конических баков.

## 1 Постановка задачи

Рассмотрим абсолютно твердый бак в форме обратного вертикального соосного кругового конуса с общей вершиной углами полураствора внешнего  $\theta_0$  и внутреннего  $\theta_1$  и невозмущенной свободной поверхностью  $\Sigma_0$  единичного радиуса  $r_0$  (рис. 1). Бак частично заполнен идеальной несжимаемой жидкостью плотности  $\rho$  и совершает безвихревые волновые поступательные движения со скоростью  $\vec{v}_0(t)$ , имеющей проекции на оси подвижной системы координат  $Oxyz$   $\{\dot{\eta}_1(t), \dot{\eta}_2(t), \dot{\eta}_3(t)\}$ . Начало координат размещено в вершине конуса  $O$ . Ось  $Ox$  направлена вдоль оси конуса в направлении, противоположном вектору ускорения сил земного тяготения  $\vec{g}$  в статическом

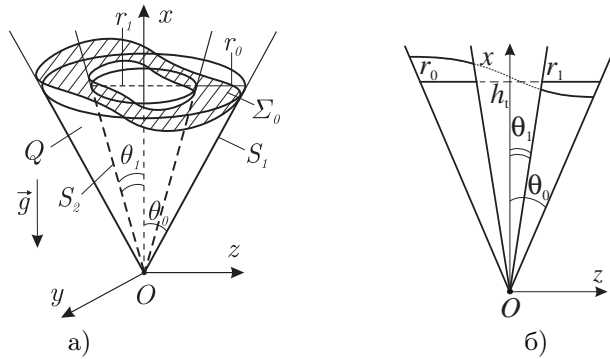


Рис. 1. Рассматриваемая модель: а) эскиз; б) меридиональное сечение.

положении бака.

В предположениях теории потенциальных движений жидкости [3] потенциал скоростей  $\Phi(x, y, z, t)$  абсолютного движения жидкости в подвижной системе координат  $Oxyz$  и возмущенная форма свободной поверхности, удовлетворяющая уравнению  $\zeta(x, y, z, t) = 0$ , описываются следующей краевой задачей:

$$\nabla^2 \Phi = 0, \quad \vec{r} \in Q(t), \quad (1a)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = \vec{v}_0 \cdot \vec{\nu}, \quad \vec{r} \in S(t), \quad (1b)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = \vec{v}_0 \cdot \vec{\nu} - \frac{\zeta_t}{|\nabla \zeta|^2}, \quad \vec{r} \in \Sigma(t), \quad (1c)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 - \nabla \Phi \cdot \vec{v}_0 + U = 0, \quad \vec{r} \in \Sigma(t), \quad (1d)$$

$$\int_{Q(t)} dQ = \text{const}, \quad (1e)$$

где  $\vec{\nu}$  — орт внешней нормали к поверхности области  $Q(t)$ , занятой жидкостью,  $S(t) = S_1(t) + S_2$  — смоченная боковая стенка и дно, соответственно,  $\Sigma(t)$  — свободная поверхность жидкости,  $\vec{r} = (x, y, z)$  — радиус-вектор точек объема жидкости  $Q(t)$  и ее границ.  $U$  — потенциал сил земного тяготения, заданный в неинерциальной системе координат  $Oxyz$ . Интегральное соотношение (1e) выражает условие

сохранения объема жидкости и является необходимым условием разрешимости задачи Неймана (1a)-(1c).

Эволюционная задача со свободной границей (1a)-(1d) требует подчинения ее решения начальным условиям, которые состоят в задании начального профиля свободной поверхности  $\Sigma(t_0)$  и распределения скоростей на  $\Sigma(t)$  в начальный момент времени  $t = t_0$   $\zeta(x, y, z, t_0) = \zeta_0(x, y, z)$ ,  $\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} \right|_{\Sigma(t_0)} = \Phi_0(x, y, z)$ , где  $\zeta_0(x, y, z)$  и  $\Phi_0(x, y, z)$  являются известными функциями.

Нелинейная краевая задача (1) имеет вариационную формулировку, связанную с известным вариационным принципом Бейтмана-Люка [3, 8], в котором в качестве функции Лагранжа выступает выражение

$$L = -\rho \int_{Q(t)} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 - \nabla \Phi \cdot \vec{v}_0 + gx \right) dQ. \quad (2)$$

Луковский [1] и Майлс [23] в соответствии с принципом Бейтмана-Люка свели задачу (1) к нахождению экстремальных значений функционала действия  $A(\zeta, \Phi) = \int_{t_1}^{t_2} L dt$  на пробных функциях [3], удовлетворяющих условиям  $\delta \Phi|_{t_1, t_2} = 0$ ,  $\delta \zeta|_{t_1, t_2} = 0$ . При этом предполагается, что свободная поверхность представима в форме  $\zeta = x - f(y, z, t) = 0$  и  $f(y, z, t)$  раскладывается в обобщенный ряд Фурье  $f(y, z, t) = \sum_i \beta_i(t) f_i(y, z)$  с зависимыми от времени коэффициентами  $\beta_i(t)$ , играющими роль обобщенных координат. При этом

$$f_{mi}(y, z) = (\sigma_{mi}/g) \phi_{mi}(h_t, y, z) \quad (3)$$

— полная ортогональная вместе с константой система функций, удовлетворяющая условию сохранения объема (1e).

Потенциал скоростей представляется в виде

$$\Phi(x, y, z, t) = \vec{v}_0 \cdot \vec{r} + \sum_j R_j(t) \phi_j(x, y, z), \quad (4)$$

где  $\phi_j(x, y, z)$  — полный линейно независимый набор гармонических функций в  $Q(t)$ , удовлетворяющих уравнению Лапласа и условию Неймана на смоченных стенках бака, а  $R_j(t)$  — параметры, характеризующие изменение потенциала скоростей во времени. Базовой задачей в этой теории является спектральная задача на собственные

значения следующего вида:

$$\Delta\phi = 0, \quad \vec{r} \in Q_0, \quad \frac{\partial\phi}{\partial\nu} = 0, \quad \vec{r} \in S_0, \quad \frac{\partial\phi}{\partial\nu} = \varkappa\phi, \quad \vec{r} \in \Sigma_0, \quad \int_{\Sigma_0} \frac{\partial\phi}{\partial\nu} dS = 0. \quad (5)$$

Подставляя представление для свободной поверхности и потенциала скоростей в условия стационарности действия по Гамильтону-Остроградскому согласно схеме, описанной в [3], получим модальные уравнения для обобщенных координат  $\beta_i(t)$  и параметров  $R_j(t)$

$$\frac{dA_N}{dt} \equiv \sum_K \frac{\partial A_N}{\partial \beta_K} \dot{\beta}_K - \sum_K A_{NK} R_K = 0, \quad N, K, i = 1, 2, \dots, \quad (6a)$$

$$\sum_N \dot{R}_N \frac{\partial A_N}{\partial \beta_i} + \frac{1}{2} \sum_{NK} \frac{\partial A_{NK}}{\partial \beta_i} R_N R_K + (\ddot{v}_0 - \vec{g}) \frac{\partial \vec{l}}{\partial \beta_i} = 0, \quad (6b)$$

где

$$A_N = \rho \int_{Q(t)} \phi_N dQ, \quad A_{NK} = \rho \int_{Q(t)} (\nabla\phi_N, \nabla\phi_K) dQ, \quad \vec{l} = \rho \int_{Q(t)} \vec{r} dQ, \quad (7)$$

Поскольку область жидкости  $Q(t)$  определяется при помощи свободной поверхности  $\Sigma(t)$ , которая определяются в свою очередь при помощи уравнения  $\zeta(x, y, z, t, \{\beta_N\}) = 0$ , то интегральные величины  $A_N$ ,  $A_{NK}$  и  $\vec{l}$  выражаются сложным образом через обобщенные координаты  $\{\beta_N\}$ .

## 2 Нелинейные модальные системы

### 2.1 Модальные представления $\zeta$ и $\Phi$

Для того, чтобы дать подходящее представление свободной поверхности, что невозможно в рамках декартовой параметризации, следуя работам [3, 18, 20], введем в рассмотрение криволинейную систему координат  $Ox_1x_2x_3$  с помощью соотношений  $x = x_1$ ,  $y = x_1x_2 \cos x_3$ ,  $z = x_1x_2 \sin x_3$ . Рисунок 1 б) иллюстрирует, как введенное преобразование трансформирует меридиональное сечение  $G$  невозмущенного объема жидкости в меридиональное сечение  $G^*$ , представляющее собой в плоскости  $Ox_1x_2$  прямоугольник со сторонами  $h = x_{10}$ ,  $x_{20} = \tan\theta_0$  и  $x_{21} = \tan\theta_1$ . Таким образом, усеченный конический

объем невозмущенного объема жидкости трансформируется в системе  $(x_1, x_2, x_3)$  в параллелепипед  $(0 \leq x_1 \leq x_{10}, x_{21} \leq x_2 \leq x_{20}, 0 \leq x_3 \leq 2\pi)$ .

Подходящие собственные формы колебаний жидкости (моды) для  $V$ -образных конических баков были предложены в [2, 6]. Решения представлены в криволинейной системе координат в виде

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = \begin{matrix} \psi_{Mi}(x_1, x_2) \cos(Mx_3) \\ \psi_{mi}(x_1, x_2) \sin(mx_3) \end{matrix}, \quad (8)$$

где  $\psi_{Mi}(x_1, x_2) \cos(Mx_3)$  и  $\psi_{mi}(x_1, x_2) \sin(mx_3)$  возникают из соответствующей спектральной проблемы в  $G^*$ . За исключением осесимметричной моды  $M = 0$ , существуют две  $\cos$ - и  $\sin$ -моды для каждой собственной частоты  $\sigma_{mi}$ . Индекс  $i$  перенумеровывает все собственные частоты и моды для одного волнового числа  $m$  в угловом направлении, что соответствует иному волновому профилю в радиальном направлении. Заглавная буква  $M$  подразумевает смену индекса от нуля до бесконечности ( $M = 0, 1, 2, \dots$ ), а прописная  $m$  – от единицы до бесконечности ( $m, i = 1, 2, \dots$ ).

Свободную поверхность и потенциал скоростей можно задать в следующем виде:

$$f^*(x_2, x_3, t) = x_{10} + \beta_0(t) + \sum_{Mi} p_{Mi}(t) f_{Mi}(x_2) \cos(Mx_3) + \sum_{Mi} r_{mi}(t) f_{mi}(x_2) \sin(mx_3), \quad (9)$$

$$\Phi^*(x_1, x_2, x_3, t) = \vec{v}_0 \cdot \vec{r} + \sum_{Mi} P_{Mi}(t) \psi_{Mi}(x_1, x_2) \cos(Mx_3) + \sum_{mi} R_{mi}(t) \psi_{mi}(x_1, x_2) \sin(mx_3), \quad (10)$$

где  $p_{Mi}$  и  $r_{mi}$  играют роль обобщенных координат. Теперь, согласно (9) и (10), интегралы (7) полностью определяются обобщенными координатами  $p_{Mi}$ ,  $r_{mi}$ .

Особенностью нецилиндрических баков является то, что собственные функции (3) не гарантируют выполнение нелинейного условия сохранения объема (1e). Поэтому модальное представление (9) содержит функцию  $\beta_0(t)$ , которая параметрически зависит от других обобщенных координат и выбирается из необходимости удовлетворения условия (1e).

## 2.2 Кинематические и динамические уравнения

Учитывая представления (9) и (10), можно переписать модальные уравнения (6) в соответствующей форме относительно введенных обозначений обобщенных координат. Кинематические модальные уравнения (6а) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \sum_{Mn} \frac{\partial A_{Ab}^p}{\partial p_{Mn}} \dot{p}_{Mn} + \sum_{mn} \frac{\partial A_{Ab}^p}{\partial r_{mn}} \dot{r}_{mn} &= \sum_{Mn} A_{Ab,Mn}^{pp} P_{M,n} + \sum_{mn} A_{Ab,mn}^{pr} R_{mn} = 0, \\ \sum_{Mn} \frac{\partial A_{ab}^r}{\partial p_{Mn}} \dot{p}_{Mn} + \sum_{mn} \frac{\partial A_{ab}^r}{\partial r_{mn}} \dot{r}_{mn} &= \sum_{Mn} A_{Mn,ab}^{pr} P_{Mn} + \sum_{mn} A_{Ab,mn}^{rr} R_{mn} = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

а динамические модальные уравнения (6б) соответственно вид:

$$\begin{aligned} \sum_{Mn} \frac{\partial A_{Mn}^p}{\partial p_{Ab}} \dot{P}_{Mn} + \sum_{mn} \frac{\partial A_{mn}^r}{\partial p_{Ab}} \dot{R}_{mn} + \frac{1}{2} \sum_{MnLk} \frac{\partial A_{Mn,Lk}^{pp}}{\partial p_{Ab}} P_{Mn} P_{Lk} + \\ + \frac{1}{2} \sum_{mnlk} \frac{\partial A_{mn,lk}^{rr}}{\partial p_{Ab}} R_{mn} R_{lk} + \sum_{Mnlk} \frac{\partial A_{Mn,lk}^{pr}}{\partial p_{Ab}} P_{Mn} R_{lk} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial l_i}{\partial p_{Ab}} \ddot{\eta}_i = 0, \\ \sum_{Mn} \frac{\partial A_{Mn}^p}{\partial r_{ab}} \dot{P}_{Mn} + \sum_{mn} \frac{\partial A_{mn}^r}{\partial r_{ab}} \dot{R}_{mn} + \frac{1}{2} \sum_{MnLk} \frac{\partial A_{Mn,Lk}^{pp}}{\partial r_{ab}} P_{Mn} P_{Lk} + \\ + \frac{1}{2} \sum_{mnlk} \frac{\partial A_{mn,lk}^{rr}}{\partial r_{ab}} R_{mn} R_{lk} + \sum_{Mnlk} \frac{\partial A_{Mn,lk}^{pr}}{\partial r_{ab}} P_{Mn} R_{lk} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial l_i}{\partial r_{ab}} \ddot{\eta}_i = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

При помощи представления свободной поверхности (9) с учетом представления  $\beta_0(p_{Mi}, r_{mi}, t)$  получаем явные выражения для интегралов (7). Компоненты вектора  $A_N = \{\{A_{Ab}^p\}, \{A_{ab}^r\}\}$  определяются следующими интегралами:

$$\begin{aligned} A_{Ab}^p &= \rho \int_0^{2\pi} \int_{x_{21}}^{x_{20}} \cos Ax_3 \Theta_{Ab}^0(x_1, x_2, p_{Ij}, r_{ij}) dx_2 dx_3, \\ A_{ab}^r &= \rho \int_0^{2\pi} \int_{x_{21}}^{x_{20}} \sin ax_3 \Theta_{ab}^0(x_1, x_2, p_{Ij}, r_{ij}) dx_2 dx_3, \end{aligned} \quad (13)$$

а компоненты матрицы  $A_{NK} = \{\{A_{Ab,Cd}^{pp}, A_{Ab,cd}^{pr}\}, \{A_{Ab,cd}^{pr}, A_{ab,cd}^{rr}\}\}$  соответственно следующими интегралами:

$$\begin{aligned}
A_{Ab,Cd}^{pp} &= \rho \int_0^{2\pi} \int_{x_{21}}^{x_{20}} (\cos Ax_3 \cos Cx_3 \Theta_{AbCd}^1(x_1, x_2, p_{Ij}, r_{ij}) + \\
&\quad + \sin Ax_3 \sin Cx_3 \Theta_{AbCd}^2(x_1, x_2, p_{Ij}, r_{ij})) dx_2 dx_3, \\
A_{ab,cd}^{rr} &= \rho \int_0^{2\pi} \int_{x_{21}}^{x_{20}} (\sin ax_3 \sin cx_3 \Theta_{abcd}^1(x_1, x_2, p_{Ij}, r_{ij}) + \\
&\quad + \cos ax_3 \cos cx_3 \Theta_{abcd}^2(x_1, x_2, p_{Ij}, r_{ij})) dx_2 dx_3, \\
A_{Ab,cd}^{pr} &= \rho \int_0^{2\pi} \int_{x_{21}}^{x_{20}} (\cos Ax_3 \sin cx_3 \Theta_{Abcd}^1(x_1, x_2, p_{Ij}, r_{ij}) - \\
&\quad - \sin Ax_3 \cos cx_3 \Theta_{Abcd}^2(x_1, x_2, p_{Ij}, r_{ij})) dx_2 dx_3, \quad (14)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\Theta_N^0(x_1, x_2, p_{Ij}, r_{ij}) &= \int_0^{f^*+x_{10}} x_1^2 \psi_N dx_1, \\
\Theta_{NK}^1(x_1, x_2, p_{Ij}, r_{ij}) &= \int_0^{f^*+x_{10}} \left( x_1^2 x_2 \frac{\partial \psi_N}{\partial x_1} \frac{\partial \psi_K}{\partial x_1} + \right. \\
&\quad \left. + x_2 (1 + x_2^2) \frac{\partial \psi_N}{\partial x_2} \frac{\partial \psi_K}{\partial x_2} - x_1 x_2^2 \left( \frac{\partial \psi_N}{\partial x_1} \frac{\partial \psi_K}{\partial x_2} + \frac{\partial \psi_N}{\partial x_2} \frac{\partial \psi_K}{\partial x_1} \right) \right) dx_1, \\
\Theta_{NK}^2(x_1, x_2, p_{Ij}, r_{ij}) &= \int_0^{f^*+x_{10}} \frac{1}{x_2} \frac{\partial \psi_N}{\partial x_3} \frac{\partial \psi_K}{\partial x_3} dx_1. \quad (15)
\end{aligned}$$

### 2.3 Нелинейная форма модальных уравнений

Воспользовавшись адаптивным методом третьего порядка, детально описанным в работах [3, 7, 22], можно получить общую полную бесконечномерную нелинейную модальную систему третьего порядка малости, в которой сохраняются лишь члены третьего порядка малости относительно обобщенных координат. Предполагаем, что

$$p_{Mi} \sim P_{Mi} \sim r_{mi} \sim R_{mi} \sim \epsilon, \quad (16)$$

где  $\epsilon^3 \ll 1$  является порядком величины безразмерного внешнего воздействия  $\eta_1(t) \sim \eta_2(t) \sim \epsilon^3$ , при этом пренебрегаем составляющими выше  $\epsilon^3$ .

Вывод нелинейных модальных уравнений является достаточно утомительной аналитической процедурой. Ограничимся здесь только схемой получения общей модальной системы. На первом этапе находим



элементы вектора  $A_N$  из (13) по симметричным  $A_{Ab}^p$  и антисимметричным  $A_{ab}^r$  компонентам с точностью до слагаемых третьей степени (кубических) относительно обобщенных координат, а также находим с точностью до слагаемых второй степени (квадратичных) относительно обобщенных координат компоненты  $A_{Ab}^{pp}$ ,  $A_{Ab}^{pr}$ ,  $A_{ab}^{rr}$  матрицы  $A_{NK}$  из (14). На втором этапе решаем асимптотически кинематические уравнения (11) относительно обобщенных скоростей, которые в общем виде выражаются через обобщенные координаты следующим образом:

$$\begin{aligned}
 P_{Cd} = & \mathbb{Z}_{Cd}^p \dot{p}_{Cd} + \sum_{MNij} \mathbb{Z}_{Mi,Nj}^{pp,Cd} p_{Mi} \dot{p}_{Nj} + \sum_{mnij} \mathbb{Z}_{mi,nj}^{rr,Cd} r_{mi} \dot{r}_{nj} + \\
 & + \sum_{MNLijk} \mathbb{Z}_{Mi,Nj,Lk}^{ppp,Cd} p_{Mi} p_{Nj} \dot{p}_{Lk} + \sum_{Mnljk} \mathbb{Z}_{Mi,nj,lk}^{ppr,Cd} p_{Mi} r_{nj} \dot{r}_{lk} + \\
 & + \sum_{mnLijk} \mathbb{Z}_{mi,nj,Lk}^{rrp,Cd} r_{mi} r_{nj} \dot{p}_{Lk}, \quad R_{cd} = \mathbb{Z}_{cd}^r \dot{r}_{cd} + \sum_{Mnij} \mathbb{Z}_{Mi,nj}^{pr,c,d} p_{Mi} \dot{r}_{nj} + \\
 & + \sum_{mNij} \mathbb{Z}_{mi,Nj}^{rp,c,d} r_{mi} \dot{p}_{Nj} + \sum_{MNLijk} \mathbb{Z}_{Mi,Nj,lk}^{ppr,c,d} p_{Mi} p_{Nj} \dot{r}_{lk} \\
 & + \sum_{MnLijk} \mathbb{Z}_{Mi,nj,Lk}^{prp,c,d} p_{Mi} r_{nj} \dot{p}_{Lk} + \sum_{mnljk} \mathbb{Z}_{mi,nj,lk}^{rrr,c,d} r_{mi} r_{nj} \dot{r}_{lk}. \quad (17)
 \end{aligned}$$

И, наконец, на финальном этапе, с учетом общего представления вектора  $\vec{l}$  получаем следующие окончательные наиболее общие полные бесконечномерные модальные уравнения до третьего порядка включительно (теория третьего порядка малости):

$$\begin{aligned}
 L_{pEh} = & \sum_{Mi} \delta_{ME} \delta_{ih} \mathbf{d}_{Mi}^{p,Eh} \ddot{p}_{Mi} + \sum_{Mi} \delta_{ME} \delta_{ih} \mathbf{g}_{Mi}^{p,Eh} p_{Mi} + \sum_{mnij} \mathbf{g}_{mi,nj}^{rr,Eh} r_{mi} r_{nj} \\
 & + \sum_{MNij} \mathbf{g}_{Mi,Nj}^{pp,Eh} p_{Mi} p_{Nj} + \sum_{MNij} \mathbf{t}_{Mi,Nj}^{pp,Eh} \dot{p}_{Mi} \dot{p}_{Nj} + \sum_{MNLijk} \mathbf{g}_{Mi,Nj,Lk}^{ppp,Eh} p_{Mi} p_{Nj} p_{Lk} \\
 & + \sum_{Mnljk} \mathbf{g}_{Mi,nj,lk}^{prr,Eh} p_{Mi} r_{nj} r_{lk} + \sum_{MNij} \mathbf{d}_{Mi,Nj}^{pp,Eh} p_{Mi} \ddot{p}_{Nj} + \sum_{Mnljk} \mathbf{d}_{Mi,nj,lk}^{prr,Eh} p_{Mi} r_{nj} \ddot{r}_{lk} \\
 & + \sum_{mnij} \mathbf{t}_{mi,nj}^{rr,Eh} \dot{r}_{mi} \dot{r}_{nj} + \sum_{mnij} \mathbf{d}_{mi,nj}^{rr,Eh} r_{mi} \ddot{r}_{nj} + \sum_{MNLijk} \mathbf{t}_{Mi,Nj,Lk}^{ppp,Eh} p_{Mi} \dot{p}_{Nj} \dot{p}_{Lk} \\
 & + \sum_{MNLijk} \mathbf{d}_{Mi,Nj,Lk}^{ppp,Eh} p_{Mi} p_{Nj} \ddot{p}_{Lk} + \sum_{Mnljk} \mathbf{t}_{Mi,nj,lk}^{prr,Eh} p_{Mi} \dot{r}_{nj} \dot{r}_{lk}
 \end{aligned}$$

$$+ \sum_{mNlij k} \mathbf{t}_{mi, Nj, lk}^{rpr, Eh} r_{mi} \dot{p}_{Nj} \dot{r}_{lk} + \sum_{mnLij k} \mathbf{d}_{mi, nj, Lk}^{rrp, Eh} r_{mi} r_{nj} \ddot{p}_{Lk} = -\eta_2 \delta_{1E} e_h, \quad (18a)$$

$$\begin{aligned} L_{r_{eh}} = & \sum_{mi} \delta_{me} \delta_{ih} \mathbf{d}_{mi}^{r, eh} \ddot{r}_{mi} + \sum_{mi} \delta_{me} \delta_{ih} \mathbf{g}_{mi}^{r, eh} r_{mi} + \sum_{Mnij} \mathbf{g}_{Mi, nj}^{pr, eh} p_{Mi} r_{nj} \\ & + \sum_{MNlij k} \mathbf{g}_{Mi, Nj, lk}^{ppr, eh} p_{Mi} p_{Nj} r_{lk} + \sum_{mnlj k} \mathbf{g}_{mi, nj, lk}^{rrr, eh} r_{mi} r_{nj} r_{lk} + \sum_{Mnij} \mathbf{t}_{Mi, nj}^{pr, eh} \dot{p}_{Mi} \dot{r}_{nj} \\ & + \sum_{Mnij} \mathbf{d}_{Mi, nj}^{pr, eh} p_{Mi} \ddot{r}_{nj} + \sum_{mNlij k} \mathbf{t}_{mi, Nj, Lk}^{rpp, eh} r_{mi} \dot{p}_{Nj} \dot{p}_{Lk} + \sum_{MnLij k} \mathbf{d}_{Mi, nj, Lk}^{ppr, eh} p_{Mi} r_{nj} \ddot{p}_{Lk} \\ & + \sum_{mNij} \mathbf{d}_{mi, Nj}^{rp, eh} r_{mi} \ddot{p}_{Nj} + \sum_{MNlij k} \mathbf{t}_{Mi, Nj, lk}^{ppr, eh} p_{Mi} \dot{p}_{Nj} \dot{r}_{lk} + \sum_{MNlij k} \mathbf{d}_{Mi, Nj, lk}^{ppr, eh} p_{Mi} p_{Nj} \ddot{r}_{lk} \\ & + \sum_{mnlj k} \mathbf{t}_{mi, nj, lk}^{rrr, eh} r_{mi} \dot{r}_{nj} \dot{r}_{lk} + \sum_{mnlj k} \mathbf{d}_{mi, nj, lk}^{rrr, eh} r_{mi} r_{nj} \ddot{r}_{lk} = -\eta_3 \delta_{1e} e_h. \quad (18b) \end{aligned}$$

Выражения гидродинамических  $\mathbf{d}$ -,  $\mathbf{g}$ - и  $\mathbf{t}$ -коэффициентов имеют гораздо более сложный вид, чем аналогичные коэффициенты, полученные для баков прямоугольной [13, 14] или цилиндрической [17, 22] формы. Однако количество таких коэффициентов уменьшается за счет того, что многие из них являются либо нулями, либо равны друг другу. Многие из этих гидродинамических коэффициентов равны между собой или являются простой линейной комбинацией других. Это было аналитически показано в работах [6, 22] для вертикальной круговой цилиндрической емкости, в работе [18] для обычного V-образного кругового конического бака, а также в работе [16] для бака сферической формы.

Структура модальной системы (18) аналогична полученной для баков с обычными коническими полостями [4, 18], а вид самих коэффициентов более сложный, хотя алгоритмически они идентичны.

Упростить общие модальные уравнения (18) можно после постулирования конкретных асимптотических соотношений между обобщенными координатами  $p_{Mi}$  и  $r_{mi}$ , выбрав среди них такие, которые имеют первый, второй и третий порядок малости соответственно. Такими интермодальными соотношениями являются асимптотики типа Моисеева-Нариманова.

### 3 Бесконечномерная система нелинейных асимптотических модальных уравнений третьего порядка

#### 3.1 Асимптотика Моисеева-Нариманова

В работе [9] показано, что в случае небольших величин амплитуд почти периодических внешних возмущений ( $\eta_1$  и  $\eta_2$ ) с частотой  $\sigma$ , близкой к самой низкой собственной частоте  $\sigma_{11}$ , и отсутствии вторичного резонанса существуют специальные асимптотические соотношения между обобщенными координатами. Асимптотические соотношения Моисеева-Нариманова являются основой для дальнейшего мультимодального анализа. Для осесимметричных баков, эти соотношения подразумевают, что основные обобщенные координаты  $p_{11}$  и  $r_{11}$  являются доминантными, другие – вспомогательными, и согласно [3, 7, 13, 15, 22] имеют следующие порядки

$$p_{11}, r_{11}, \sim \epsilon \quad p_{0i}, p_{2i}, r_{2i} \sim \epsilon^2, \quad p_{1(i+1)}, r_{1(i+1)}, p_{3i}, r_{3i} \sim \epsilon^3, \quad (19)$$

$i = 1, 2, \dots$ , а остальные обобщенные координаты имеют порядок  $O(\epsilon^3)$  и, следовательно, не учитываются в нелинейном взаимодействии. Примеры подобных нелинейных асимптотических модальных систем, базирующихся на асимптотиках (19), можно найти в [3, 17, 22] для вертикальных круговых цилиндрических емкостей, в [13, 14] для прямоугольных баков, в [16] для сферических баков и в [7, 8, 10, 13, 18] для вертикальных круговых конических баков.

#### 3.2 Общие бесконечномерные нелинейные асимптотические модальные уравнения

Опуская обширные и трудоемкие, но не сложные выводы общих модальных уравнений, в конечном итоге моисеевская асимптотика (19) приводит к следующим единственным общим бесконечномерным нелинейным модальным уравнениям для описания резонансных колебаний жидкости в окрестности основной собственной частоты в вертикальных усеченных круговых конических полостях:

$$L_{p_{0h}} = \mu_{0h} (\ddot{p}_{0h} + \sigma_{0h}^2 p_{0h}) + d_{8,h} (\dot{p}_{11}^2 + \dot{r}_{11}^2) + d_{10,h} (p_{11} \ddot{p}_{11} + r_{11} \ddot{r}_{11}) + \mathcal{G}_{0h} (p_{11}^2 + r_{11}^2) = 0, \quad (20a)$$

$$L_{p_{2h}} = \mu_{2h} (\ddot{p}_{2h} + \sigma_{2h}^2 p_{2h}) + d_{7,h} (\dot{p}_{11}^2 - \dot{r}_{11}^2) + \\ + d_{9,h} (p_{11} \ddot{p}_{11} - r_{11} \ddot{r}_{11}) + \mathcal{G}_{4,h} (p_{11}^2 - r_{11}^2) = 0, \quad (20b)$$

$$L_{r_{2h}} = \mu_{2h} (\ddot{r}_{2h} + \sigma_{2h}^2 r_{2h}) + 2d_{7,h} (\dot{p}_{11} \dot{r}_{11}) + \\ + d_{9,h} (p_{11} \ddot{r}_{11} + r_{11} \ddot{p}_{11}) + 2\mathcal{G}_{4,h} p_{11} r_{11} = 0, \quad (20c)$$

$$L_{p_{11}} = \mu_{11} (\ddot{p}_{11} + \sigma_{11}^2 p_{11}) + d_1 (p_{11}^2 \ddot{p}_{11} + p_{11} r_{11} \ddot{r}_{11} + p_{11} \dot{p}_{11}^2 + p_{11} \dot{r}_{11}^2) + \\ + d_2 (r_{11}^2 \ddot{p}_{11} - p_{11} r_{11} \ddot{r}_{11} + 2r_{11} \dot{p}_{11} \dot{r}_{11} - 2p_{11} \dot{r}_{11}^2) + \mathcal{G}_1 (p_{11}^3 + p_{11} r_{11}^2) + \\ + \sum_{j=1} \left( d_3^j (\ddot{p}_{11} p_{2j} + \ddot{r}_{11} r_{2j} + \dot{p}_{11} \dot{p}_{2j} + \dot{r}_{11} \dot{r}_{2j}) + d_4^j (p_{11} \ddot{p}_{2j} + r_{11} \ddot{r}_{2j}) + \right. \\ \left. + d_5^j (p_{0j} \ddot{p}_{11} + \dot{p}_{0j} \dot{p}_{11}) + d_6^j (\ddot{p}_{0j} p_{11}) + \right. \\ \left. + \mathcal{G}_2^j (p_{0j} p_{11}) + \mathcal{G}_3^j (p_{11} p_{2j} + r_{11} r_{2j}) \right) = -\ddot{\eta}_2 e_1, \quad (20d)$$

$$L_{r_{11}} = \mu_{11} (\ddot{r}_{11} + \sigma_{11}^2 r_{11}) + d_1 (p_{11} r_{11} \ddot{p}_{11} + r_{11}^2 \ddot{r}_{11} + r_{11} \dot{p}_{11}^2 + r_{11} \dot{r}_{11}^2) + \\ + d_2 (p_{11}^2 \ddot{r}_{11} - p_{11} r_{11} \ddot{p}_{11} + 2p_{11} \dot{p}_{11} \dot{r}_{11} - 2r_{11} \dot{p}_{11}^2) + \mathcal{G}_1 (p_{11}^2 r_{11} + r_{11}^3) + \\ + \sum_{j=1} \left( d_3^j (\ddot{p}_{11} r_{2j} - \ddot{r}_{11} p_{2j} + \dot{p}_{11} \dot{r}_{2j} - \dot{r}_{11} \dot{p}_{2j}) + d_4^j (p_{11} \ddot{r}_{2j} - r_{11} \ddot{p}_{2j}) + \right. \\ \left. + d_5^j (p_{0j} \ddot{r}_{11} + \dot{p}_{0j} \dot{r}_{11}) + d_6^j (\ddot{p}_{0j} r_{11}) + \right. \\ \left. + \mathcal{G}_2^j (p_{0j} r_{11}) + \mathcal{G}_3^j (p_{11} r_{2j} - r_{11} p_{2j}) \right) = -\ddot{\eta}_3 e_1, \quad (20e)$$

$$L_{p_{3h}} = \mu_{3h} (\ddot{p}_{3h} + \sigma_{3h}^2 p_{3h}) + d_{11,h} (p_{11}^2 \ddot{p}_{11} - r_{11}^2 \ddot{p}_{11} - 2p_{11} r_{11} \ddot{r}_{11}) + \\ d_{12,h} (p_{11} \dot{p}_{11}^2 - p_{11} \dot{r}_{11}^2 - 2r_{11} \dot{p}_{11} \dot{r}_{11}) + \mathcal{G}_{6,h} (p_{11}^3 - 3p_{11} r_{11}^2) + \\ \sum_{j=1} \left( d_{13,h}^j (\ddot{p}_{11} p_{2j} - \ddot{r}_{11} r_{2j}) + d_{14,h}^j (p_{11} \ddot{p}_{2j} - r_{11} \ddot{r}_{2j}) + \right. \\ \left. + d_{15,h}^j (\dot{p}_{11} \dot{p}_{2j} - \dot{r}_{11} \dot{r}_{2j}) + \mathcal{G}_{5,h}^j (p_{11} p_{2j} - r_{11} r_{2j}) \right) = 0, \quad (20f)$$

$$L_{r_{3h}} = \mu_{3h} (\ddot{r}_{3h} + \sigma_{3h}^2 r_{3h}) + d_{11,h} (p_{11}^2 \ddot{r}_{11} - r_{11}^2 \ddot{r}_{11} + 2p_{11} r_{11} \ddot{p}_{11}) +$$

$$\begin{aligned}
 & d_{12,h} (r_{11}\dot{p}_{11}^2 - r_{11}\dot{r}_{11}^2 + 2p_{11}\dot{p}_{11}\dot{r}_{11}) + \mathcal{G}_{6,h} (3p_{11}^2 r_{11} - r_{11}^3) + \\
 & \sum_{j=1} \left( d_{13,h}^j (\ddot{p}_{11}r_{2j} + \ddot{r}_{11}p_{2j}) + d_{14,h}^j (p_{11}\ddot{r}_{2j} + r_{11}\ddot{p}_{2j}) + \right. \\
 & \left. + d_{15,h}^j (\dot{p}_{11}\dot{r}_{2j} + \dot{r}_{11}\dot{p}_{2j}) + \mathcal{G}_{5,h}^j (p_{11}r_{2j} + r_{11}p_{2j}) \right) = 0, \quad (20g)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L_{p_{1k}} = & \mu_{1k} (\ddot{p}_{1k} + \sigma_{1k}^2 p_{1k}) + d_{16,k} (p_{11}^2 \ddot{p}_{11} + p_{11}r_{11}\ddot{r}_{11}) + \\
 & + d_{18,k} (p_{11}\dot{p}_{11}^2 + p_{11}\dot{r}_{11}^2) + d_{17,k} (r_{11}^2 \ddot{p}_{11} - p_{11}r_{11}\ddot{r}_{11}) + \\
 & + d_{19,k} (r_{11}\dot{p}_{11}\dot{r}_{11} - p_{11}\dot{r}_{11}^2) + \mathcal{G}_{1k} (p_{11}^3 + p_{11}r_{11}^2) + \\
 & + \sum_{j=1} \left( d_{20,k}^j (\ddot{p}_{11}p_{2j} + \ddot{r}_{11}r_{2j}) + d_{22,k}^j (\dot{p}_{11}\dot{p}_{2j} + \dot{r}_{11}\dot{r}_{2j}) + \right. \\
 & + d_{21,k}^j (p_{11}\ddot{p}_{2j} + r_{11}\ddot{r}_{2j}) + d_{23,k}^j (p_{0j}\ddot{p}_{11}) + d_{25,k}^j (\dot{p}_{0j}\dot{p}_{11}) + \\
 & \left. + d_{24,k}^j (\ddot{p}_{0j}p_{11}) + \mathcal{G}_{3,k}^j (p_{0j}p_{11}) + \mathcal{G}_{2,k}^j (p_{11}p_{2j} + r_{11}r_{2j}) \right) = 0, \quad (20h)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L_{r_{1k}} = & \mu_{1k} (\ddot{r}_{1k} + \sigma_{1k}^2 r_{1k}) + d_{16,k} (p_{11}r_{11}\ddot{p}_{11} + r_{11}^2 \ddot{r}_{11}) + \\
 & + d_{18,k} (r_{11}\dot{p}_{11}^2 + r_{11}\dot{r}_{11}^2) + d_{17,k} (p_{11}^2 \ddot{r}_{11} - p_{11}r_{11}\ddot{p}_{11}) + \\
 & + d_{19,k} (p_{11}\dot{p}_{11}\dot{r}_{11} - r_{11}\dot{p}_{11}^2) + \mathcal{G}_{1k} (p_{11}^2 r_{11} + r_{11}^3) + \\
 & + \sum_{j=1} \left( d_{20,k}^j (\ddot{p}_{11}r_{2j} - \ddot{r}_{11}p_{2j}) + d_{22,k}^j (\dot{p}_{11}\dot{r}_{2j} - \dot{r}_{11}\dot{p}_{2j}) + \right. \\
 & + d_{21,k}^j (r_{11}\ddot{p}_{2j} - p_{11}\ddot{r}_{2j}) + d_{23,k}^j (p_{0j}\ddot{r}_{11}) + d_{25,k}^j (\dot{p}_{0j}\dot{r}_{11}) + \\
 & \left. + d_{24,k}^j (\ddot{p}_{0j}r_{11}) + \mathcal{G}_{3,k}^j (p_{0j}r_{11}) + \mathcal{G}_{2,k}^j (p_{11}r_{2j} - r_{11}p_{2j}) \right) = 0. \quad (20i)
 \end{aligned}$$

Такая упрощенная форма модальной системы весьма удобна для последующего анализа. Особенностью этих коэффициентов является бесконечное суммирование по порядковому индексу для мод второго и третьего порядка малости в модальном представлении свободной поверхности (9) и потенциала скоростей (10).

Следует отметить, что при удержании в системе (20) только первых семь гармоник ( $m = 0, 1, 2, 3, i, j, h = 1, k = 0$ ) в результате получаем с точностью до переопределения семимодовую модальную систему, эквивалентную полученной в работе [7] со всеми вытекающими последствиями – аналитическим видом коэффициентов и равности их

численных значений. Тем не менее, процедура вывода асимптотической модальной системы есть весьма сложной аналитической задачей, что может порождать вычислительные ошибки и требует особой тщательности в выкладках, а также проверки полученных результатов путем сравнения их с имеющимися в литературе для предельных случаев. Таким предельным случаем является, например, вертикальный круговой цилиндр ( $\theta_0 \rightarrow 0$ ), а также случай  $r_1 \rightarrow 0$ , который соответствует неусеченному конусу. В последнем случае уравнения (20) переходят в пятимодовую модальную систему из работы [18]. Действительно, расчеты показывают, что гидродинамические коэффициенты (20) принимают значения затабулированных коэффициентов из работы [18]. Заметим, что в (20) имеются  $\mathcal{G}$ -коэффициенты, выражающие так называемую геометрическую нелинейность, возникающую в связи с невертикальностью стенок. Такие коэффициенты отсутствуют в уравнениях для кругового цилиндрического бака.

Занимательным, а возможно и существенным фактом является то, что за исключением членов относящихся к “геометрической нелинейности” полученные модальные уравнения (20), имеющие моисеевскую асимптотику и описывающие колебания жидкости в вертикальных круговых полостях вращения, имеют ту же структуру, а соответственные уравнения для конических и сферических полостей вообще имеют идентичную структуру. Предположительно, структура дифференциальных уравнений (20) является инвариантной для баков в форме фигур вращения с невертикальными стенками в рамках используемой методики. Следовательно получается, что геометрия бака влияет на вид и значения гидродинамических коэффициентов и собственных частот, но не на структуру модальных уравнений. Аналитическое определение всех функций и коэффициентов дано в препринте arXiv:1710.01725.

С целью демонстрации конкретных численных результатов, ограничимся для примера некоторыми основными значениями. Так на рис. 2 представлены зависимости  $\sigma_{mn}$ , ( $m = 1, 2, k = 1, \dots, 5$ ) от угла  $\theta_1$  для характерной полости с внешним углом  $\theta_0 = 30^\circ$  полученные из следующих формул:

$$\sigma_{mn}^2 = gh_0^2 \lambda_{mn,mn} \left( \bar{\mathcal{E}}_{mn,mn,0} + \tilde{\mathcal{E}}_{mn,mn,0} \right) / \hat{\mathcal{E}}_{mn,1,mn}^2. \quad (21)$$

Граничные значения на вертикальной оси соответствуют нулевому углу конусности,  $\theta_0 = 0$  и, как видно из рисунков, действительно в пределе совпадают с результатами Луковского из работы [7].

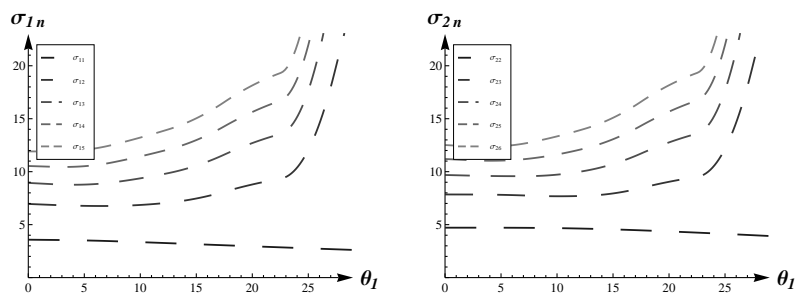


Рис. 2.  $\sigma_{1k}, \sigma_{2k}$  ( $k = 1, \dots, 5$ ) системы (20) относительно  $\theta_1$  для  $\theta_0 = 30^\circ$ .

## Выводы

Данная работа является обобщением результатов автора [7], описывающих резонансные колебания жидкости в соосных конических баках с общей вершиной. Такое обобщение мультимодального метода стало возможным благодаря найденным ранее собственным формам колебаний жидкости [5] и использованию техники неконформных отображений области Луковского [2].

В итоге получено три системы нелинейных модальных уравнений. Первая — это общая полная нелинейная модальная система, связывающая обобщенные координаты и скорости ((11) и (12)), известная ранее только для баков с вертикальными боковыми стенками, а на данный момент обобщенная (расширенная) и на некоторые баки с невертикальными стенками (сферические и теперь конические). Вторая система (18) — это общая полная система нелинейных модальных уравнений с обобщенными координатами третьего порядка малости. Данная система в общем случае учитывает резонансные колебания жидкости не обязательно в окрестности наименьшей собственной частоты, т. е. может быть переписана с учетом наличия некоторого внутреннего резонанса. Третья система — это полная нелинейная модальная система третьего порядка малости, записанная с учетом междумодальных асимптотических соотношений моисеевского типа (20), описывающая резонансные колебания жидкости в окрестности основной собственной наименьшей частоты.

- [1] Луковский И. А. Вариационный метод в нелинейных задачах динамики ограниченного объема жидкости со свободной поверхностью Коле-

- бания упругих конструкций с жидкостью.— М.: Волна, 1976. — С. 260–264.
- [2] *Луковський І. А.* До розв'язування спектральних задач лінійної теорії коливань рідини в конічних баках // Доповіді НАН України. Механіка. — 2002. — № 5. — С. 53–58.
- [3] *Луковский И. А.* Математические модели нелинейной динамики твердых тел с жидкостью.— К.: Наук. думка, 2010. — 407 с.
- [4] *Луковский И. А., Билык А. Н.* Вынужденные нелинейные колебания жидкости в подвижных осесимметричных конических полостях // Численно-аналитические методы исследования динамики и устойчивости многомерных систем.— К.: Институт математики АН УССР, 1985. — С. 12–26.
- [5] *Луковский И. А., Солодун А. В.* Вариационный метод исследования спектральной задачи о собственных колебаниях жидкости в соосных конических резервуарах // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2013.— **10**, 3.— С. 88–112.
- [6] *Луковский И. А., Солодун А. В., Тимоха А. Н.* Собственные частоты колебаний жидкости в усеченных конических баках // Акуст. вісник. — 2006.— **9**, 3.— С. 18–34.
- [7] *Луковский И. А., Солодун А. В., Тимоха А. Н.* Нелинейная асимптотическая модальная теория резонансных колебаний жидкости в срезанных конических баках // Акуст. вісник. — 2011.— **14**, 4. — С. 37–64.
- [8] *Луковский И. А., Тимоха А. Н.* Вариационные методы в нелинейной динамике ограниченного объема жидкости. К.: Институт математики НАН України, — 1995. — 400 с.
- [9] *Моисеев Н. Н.* К теории нелинейных колебаний ограниченного объема жидкости // Прикл. мат. мех. — 1958.— **22**. — С. 612–621.
- [10] *Солодун А. В.* Нелинейные модальные модели третьего порядка малости, описывающие резонансные колебания жидкости в усеченных конических резервуарах // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2014.— **11**, 4. — С. 280–307.
- [11] *Bauer H. F., Eidel W.* Non-linear liquid motion in conical container// Acta Mechanica. — 1988. — **73**, (1-4). — P. 11–31.
- [12] *El Damatty A., Korol R. M., Tang L. M.* Analytical and experimental investigation of the dynamic response of liquid-filled conical tanks Proceedings of the World Conference of Earthquake Engineering, New Zeland, — 2000. — Paper No. 966, Topic No. 7.
- [13] *Faltinsen O. M., Rognebakke O. F., Lukovsky I. A., Timokha A. N.* Multidimensional modal analysis of nonlinear sloshing in a rectangular tank



- with finite water depth // J. Fluid Mechanics. — 2000. — **407**. — P. 201–234.
- [14] *Faltinsen O. M., Rognebakke O. F., Timokha A. N.* Resonant three-dimensional nonlinear sloshing in a square base basin // J. Fluid Mechanics. — 2003. — **487**. — P. 1–42.
- [15] *Faltinsen O. M., Timokha A. N.* Sloshing. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2009. — 608 p.
- [16] *Faltinsen O. M., Timokha A. N.* Multimodal analysis of weakly nonlinear sloshing in a spherical tank // 2013. — **719**, — P. 129–164.
- [17] *Gavrilyuk I., Lukovsky I., Timokha A.* A multimodal approach to nonlinear sloshing in a circular cylindrical tank // Hybrid Methods in Engineering. — 2000. — **2**, (Issue 4). — P. 463–483.
- [18] *Gavrilyuk I., Lukovsky I. A., Timokha A. N.* Linear and nonlinear sloshing in a circular conical tank // Fluid Dynamics Research. — 2005. — **37**. — P. 399–429.
- [19] *Ibrahim R.* Liquid sloshing dynamics. Cambridge: — Cambridge Univ. Press, — 2005. — 948 p.
- [20] *Lukovsky I. A., Timokha A. N.* Modal modeling of nonlinear fluid sloshing in tanks with non-vertical walls. Non-conformal mapping technique // International Journal of Fluid Mechanics Research. — 2002. — **29**, Issue 2. — P. 216–242.
- [21] *Lukovsky I. A.* Variational methods of solving dynamic problems for fluid-containing bodies // International Applied Mechanics. — 2004. — **40**, Issue 10. — P. 1092–1128.
- [22] *Lukovsky I. A., Ovchinnikov D. V., Timokha A. N.* Asymptotic nonlinear multimodal method for liquid sloshing in an upright circular cylindrical tank. Part 1: Modal equations // Nonlinear Oscillations. — 2012. — **14**, 4. — P. 512–525.
- [23] *Miles J. W.* Nonlinear surface waves in closed basins // J. Fluid Mech. — 1976. — **75**. — P. 419–448.
- [24] *La Rocca M., Scortino M., Boniforti M.* A fully nonlinear model for sloshing in a rotating container // Fluid Dynamics Research. — 2000. — **27**. — P. 225–229.
- [25] *Shrimali M. K., Jangid R. S.* Earthquake response of isolated elevated liquid storage steel tanks // J. of Constructional Steel Research. — 2003. — **59**. — P. 1267–1288.