Збірник праць Інституту математики НАН України 2017, т. 14, № 2, 110–121

УДК 517.521

Розподіл значень однієї сингулярної немонотонної функції канторівського типу

М. В. Працьовитий, [1]***, О. В. Свинчук,*** [2]

[1] *Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова; prats4444@gmail.com,*
[2] *Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова; 7011990@ukr.net*

Let f be a non-monotonic singular function of the Cantor type defined in terms of quinary representation of the numbers and let X be a random variable whose digits of its quinary representation are independent of the random variables. We study a Lebesgue structure of distribution of the random variable $Y = f(X)$, topological, metric and fractal properties of its spectrum.

Для немонотонної сингулярної функції канторівського типу f, означеної в термінах п'ятіркового зображення чисел, і випадкової величини X, цифри п'ятіркового зображення якої є незалежними випадковими величинами, вивчається лебегівська структура розподілу випадкової величини $Y = f(X)$, тополого-метричні і фрактальні властивості його спектра.

Для немонотонной сингулярной функции канторовского типа f, определенной в терминах пятеричного изображения чисел, и случайной величины X, цифры пятеричного изображения которой являются независимыми случайными величинами, изучается лебеговская структура распределения случайной величины $Y = f(X)$, тополого-метрические и фрактальные свойства её спектра.

1 Вступ

Розподіли випадкових величин, цифри зображення яких у тій чи іншій системі кодування (зображення) є незалежними випадковими величинами, інтенсивно вивчаються протягом кількох останніх десятиліть [1], [2], [7] [6], а саме: досліджується їх лебегівська структура, тополого-метричні і фрактальні властивості спектрів та носіїв тощо. Серед цих розподілів переважають сингулярні (тобто такі, що зосереджені на множинах нульової міри Лебега), їх значну частину складають канторівські розподіли (ті, що зосереджені на досконалих ніде не щільних множинах нульової міри Лебега). У кожного з них функція розподілу є неперервною, неспадною, а сумарна довжина відрізків сталості функції є множиною повної міри.

Нагадаємо, що неперервна функція, відмінна від константи, називається *сингулярною*, якщо її похідна дорівнює нулю майже скрізь у розумінні міри Лебега. Неперервна функція називається *сингулярною функцією канторівського типу*, якщо її множина несталості є ніде не щільною множиною нульової міри Лебега. Сингулярні розподіли випадкових величин мають сингулярні функції розподілу, які є монотонними. Разом з цим серед сингулярних функцій канторівського типу значний підклас утворюють немонотонні сингулярні функції, розподіли значень яких є самостійним об'єктом дослідження. Саме такому об'єкту присвячена дана робота. У ній досліджується розподіл випадкової величини $Y = f(X)$, де f — немонотонна сингулярна функція канторівського типу, властивості якої частково вивчалися в [4], [5], а X — випадкова величина, розподіл якої індукується розподілами цифр її п'ятіркового зображення, що є незалежними випадковими величинами. Нас цікавить структура і властивості розподілу випадкової величини Y.

2 Основний об'єкт

Нехай $A_5 \equiv \{0, 1, 2, 3, 4\}$ — алфавіт 5-ової системи числення, $L \equiv A_5 \times \ldots \times A_5 \times \ldots$;

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k(x)}{5^k} \equiv \Delta^5_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}$$

— 5-ове зображення числа $x \in [0, 1]$, $(\alpha_k) \in L$.

Нехай (ε_n) — послідовність додатних дійсних чисел, причому $0 \leq \varepsilon_n \leq 1$; $(\overline{g_n})$ — послідовність векторів, де $\overline{g_n} = (g_{0n}, g_{1n}, g_{2n}, g_{3n}, g_{4n})$, таких, що: $g_{0n} = g_{4n} = \dfrac{2 + \varepsilon_n}{4}$, $g_{1n} = g_{3n} = \dfrac{-\varepsilon_n}{4}$, $g_{2n} = 0$.

Розглядається функція

$$f(x) = \delta_{\alpha_1(x)1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\delta_{\alpha_k(x)k} \prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j(x)j} \right) \equiv \Delta^G_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}, \qquad (1)$$

де $\delta_{0n} = 0$, $\delta_{1n} = \dfrac{2+\varepsilon_n}{4}$, $\delta_{2n} = \dfrac{2}{4} = \delta_{3n}$, $\delta_{4n} = \dfrac{2-\varepsilon_n}{4}$, тобто $\delta_{[i+1]n} = \delta_{in} + g_{in} = \sum\limits_{j=0}^{i} g_{jn}, n \in N$.

Властивості функції f вивчались у роботі [5]. Нагадаємо деякі з них.

Теорема 2.1. *Функція $f(x)$ є:*

1) коректно означеною та неперервною на $[0;1]$;

2) сталою на кожному циліндрі виду $\Delta^5_{c_1c_2\ldots c_m2}$ і крім цього на циліндрах $\Delta^5_{c_1c_2\ldots c_{n-1}1}$ і $\Delta^5_{c_1c_2\ldots c_{n-1}3}$, якщо $\varepsilon_n = 0$;

3) монотонною (а точніше: неспадною) — тоді і тільки тоді, коли $\varepsilon_n = 0, n \in N$;

4) сингулярною функцією канторівського типу, множиною несталості якої є множина канторівського типу $C[5;\{0,1,3,4\}] = \{x : x \in [0,1], \alpha_n(x) \in \{0,1,3,4\}\}$ з фрактальною розмірністю Гаусдорфа-Безиковича $\log_5 4$.

Вона набуває всіх значень з відрізка $[0,1]$, не має проміжків монотонності, крім проміжків сталості, якщо нерівність $\varepsilon_n \neq 0$ виконується для нескінченної множини значень n, і має графік, симетричний відносно точки $C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Теорема 2.2. *Варіація функції f обчислюється за формулою*

$$V_0^1(f) = \prod_{i=1}^{\infty}(1+\varepsilon_i).$$

Функція f має обмежену варіацію тоді і тільки тоді, коли

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i < \infty. \qquad (2)$$

Наслідок 2.1. *Якщо $0 < \varepsilon_0 \leq \varepsilon_n$ або $0 < \varepsilon_n = const$, то функція f є функцією необмеженої варіації.*

3 Розподіл значень функції $f(x)$ при заданому розподілі випадкового аргументу

Нехай (τ_k) — послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин, які набувають значення $0, 1, 2, 3, 4$ з ймовірностями $p_{0n}, p_{1n}, p_{2n}, p_{3n}, p_{4n}$, $n \in N$ відповідно, тобто

$$P\{\tau_n = i\} = p_{in}, \; i = \overline{0,4},$$

$$p_{0n} + p_{1n} + p_{2n} + p_{3n} + p_{4n} = 1, \; \forall n \in N.$$

$X = \Delta^5_{\tau_1 \tau_2 \tau_3 \ldots}$ — неперервна випадкова величина з незалежними 5-овими цифрами.

Розподіл випадкової величини X добре вивчений [3]. Його лебегівську структуру висвітлює наступне твердження.

Теорема 3.1. *[3] Випадкова величина X має розподіл чистого лебегівського типу, причому:*

1) чисто дискретний тоді і тільки тоді, коли

$$M \equiv \prod_{k=1}^{\infty} \max_i \{p_{ik}\} > 0;$$

2) чисто абсолютно неперервний тоді і тільки тоді, коли

$$L \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{4} (1 - 5p_{ik})^2 < \infty;$$

3) чисто сингулярно неперервний тоді і тільки, коли $M = 0$ і $L = \infty$.

Теорема 3.2. *Множина всіх рівнів функції f, які містять відрізки сталості, є зліченою множиною, причому:*

1) рівень $y_0 = f\left(\Delta^5_{(2)}\right) = \frac{1}{2}$ містить лише один відрізок сталості;

2) кожен з рівнів виду

$$y_0 = f\left(\Delta^5_{c_1 c_2 \ldots c_m 0(2)}\right) = f\left(\Delta^5_{c_1 c_2 \ldots c_m 3(2)}\right),$$

$$y_0 = f\left(\Delta^5_{c_1 c_2 \ldots c_m 1(2)}\right) = f\left(\Delta^5_{c_1 c_2 \ldots c_m 4(2)}\right)$$

містить два відрізки сталості;

3) рівень функції більше двох відрізків містити не може.

Доведення. Очевидно, що проміжки сталості функції вичерпуються циліндрами: Δ_2, Δ_{02}, Δ_{12}, Δ_{32}, Δ_{42} і т. д., загальний вигляд яких $\Delta_{c_1c_2\ldots c_m(2)}$, де $c_i \neq 2$, $i = \overline{1,m}$, $m \in N$, тобто рівні, які містять проміжки, мають вигляд $f^{-1}\left(f\left(\Delta^5_{c_1c_2\ldots c_m(2)}\right)\right)$. Оскільки $f(\Delta^5_{\underbrace{0\ldots0}_{m}(2)}) \neq f(\Delta^5_{\underbrace{0\ldots0}_{k}(2)})$ при $m \neq k$, то таких рівнів зліченна кількість.

1. Доведемо, що рівень $y_0 = \frac{1}{2} = f\left(\Delta^5_{(2)}\right)$ містить лише один відрізок сталості. Припустимо, що знайдеться такий циліндр, для якого виконується рівність $f\left(\Delta^5_{c_1c_2\ldots c_m(2)}\right) = \frac{1}{2}$. Тоді

$$\delta_{c_1} + \delta_{c_2}g_{c_1} + \ldots + \delta_{c_m}\prod_{j=1}^{m-1} g_{c_j} + \frac{1}{2}\prod_{j=1}^{m} g_{c_j} = \frac{1}{2}.$$

Значення функції у внутрішніх точках циліндра Δ^5_1 більші за $\frac{1}{2}$, а на Δ^5_3 — менші за $\frac{1}{2}$. Тому далі досить провести аналіз лише на циліндрах Δ^5_0 і Δ^5_4. Оскільки графік функції f симетричний відносно точки $C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, то зосередимось на дослідженні циліндра Δ^5_0. Отже,

$$\frac{3}{4}\left(\delta_{c_2} + \delta_{c_3}g_{c_2} + \ldots + \delta_{c_m}\prod_{j=2}^{m-2} g_{c_j} + \frac{1}{2}\prod_{j=2}^{m-1} g_{c_j}\right) = \frac{1}{2},$$

$$3\left(\delta_{c_2} + \delta_{c_3}g_{c_2} + \ldots + \delta_{c_m}\prod_{j=2}^{m-2} g_{c_j} + \frac{1}{2}\prod_{j=2}^{m-1} g_{c_j}\right) = 2.$$

Оскільки добуток $\prod\limits_{j=2}^{m-1} g_{c_j}$ є правильним звичайним дробом зі знаменником 4^{m-2}, а δ_{c_i} — зі знаменником 4, то, домноживши останню рівність на 4^m, отримаємо

$$3\cdot\left(4^m\delta_{c_2} + 4^m\delta_{c_3}g_{c_2} + \ldots + 4^m\delta_{c_m}\prod_{j=2}^{m-2} g_{c_j} + 4^m\frac{1}{2}\prod_{j=2}^{m-1} g_{c_j}\right) = 2\cdot 4^m.$$

Звідси бачимо, що ліва частина рівності ділиться на 3, а права — ні. Отримане протиріччя доводить, що рівень $\frac{1}{2}$ містить лише один відрізок сталості.

2. Доведемо, що всі інші рівні містять два відрізки сталості. Нехай $A \equiv \delta_{c_1} + \sum\limits_{k=2}^{m} \left(\delta_{c_k} \prod\limits_{j=1}^{k-1} g_{c_j} \right)$. Розглянемо різницю значень функції:

$$f(\Delta^5_{c_1c_2\ldots c_m0(2)}) - f(\Delta^5_{c_1c_2\ldots c_m3(2)}) =$$

$$= A + g_0 \prod_{j=1}^{m} g_{c_j} \frac{1}{2} - A - \delta_3 \prod_{j=1}^{m} g_{c_j} \frac{1}{2} - g_3 \prod_{j=1}^{m} g_{c_j} \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{3}{8} \prod_{j=1}^{m} g_{c_j} - \frac{1}{2} \prod_{j=1}^{m} g_{c_j} + \frac{1}{8} \prod_{j=1}^{m} g_{c_j} = 0,$$

$$f(\Delta^5_{c_1c_2\ldots c_m1(2)}) - f(\Delta^5_{c_1c_2\ldots c_m4(2)}) =$$

$$= A + \delta_1 \prod_{j=1}^{m} g_{c_j} + g_1 \prod_{j=1}^{m} g_{c_j} \frac{1}{2} - A - \delta_4 \prod_{j=1}^{m} g_{c_j} - g_4 \prod_{j=1}^{m} g_{c_j} \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{3}{4} \prod_{j=1}^{m} g_{c_j} - \frac{1}{8} \prod_{j=1}^{m} g_{c_j} - \frac{1}{4} \prod_{j=1}^{m} g_{c_j} - \frac{3}{8} \prod_{j=1}^{m} g_{c_j} = 0.$$

Відповідні значення збігаються. Отже, дані рівні містять два відрізки.

3. Тепер доведемо, що такі рівні містять не більше двох відрізків. Розглянемо випадки.

1) Припустимо, що знайдеться такий циліндр, для якого виконується рівність

$$f(\Delta^5_{c_1c_2\ldots c_m0(2)}) = f(\Delta^5_{c_1c_2\ldots c_m\ldots c_{m+k}(2)})$$

або

$$f(\Delta^5_{c_1c_2\ldots c_{m-k}\ldots c_m0(2)}) = f(\Delta^5_{c_1c_2\ldots c_{m-k}(2)}),\ k \in N,\ k < m.$$

1.1.

$$f(\Delta^5_{c_1c_2\ldots c_m0(2)}) = f(\Delta^5_{c_1c_2\ldots c_mc_{m+1}\ldots c_{m+k}(2)}).$$

$$\frac{3}{8} \prod_{j=1}^{m} g_{c_j} = \prod_{j=1}^{m} g_{c_j} \left(\delta_{c_{m+1}} + \ldots + \delta_{c_{m+k}} \prod_{j=m+1}^{m+k-1} g_{c_j} + \frac{1}{2} \prod_{j=m+1}^{m+k} g_{c_j} \right),$$

$$\frac{3}{8} = \delta_{c_{m+1}} + \ldots + \delta_{c_{m+k}} \prod_{j=m+1}^{m+k-1} g_{c_j} + \frac{1}{2} \prod_{j=m+1}^{m+k} g_{c_j},$$

$$3 = 8 \left(\delta_{c_{m+1}} + \ldots + \delta_{c_{m+k}} \prod_{j=m+1}^{m+k-1} g_{c_j} + \frac{1}{2} \prod_{j=m+1}^{m+k} g_{c_j} \right).$$

Оскільки добуток $\prod\limits_{j=m+1}^{m+k} g_{c_j}$ є правильним звичайним дробом із знаменником 4^{k-1}, а δ_{c_i} — зі знаменником 4, то, домноживши останню рівність на 4^k, отримаємо

$$3 \cdot 4^k = 8 \left(4^k \delta_{c_{m+1}} + \ldots + 4^k \delta_{c_{m+k}} \prod_{j=m+1}^{m+k-1} g_{c_j} + 4^k \frac{1}{2} \prod_{j=m+1}^{m+k} g_{c_j} \right).$$

Звідси бачимо, що ліва частина рівності ділиться на 3, а права — ні. Прийшли до суперечності.

1.2.

$$f(\Delta^5_{c_1 c_2 \ldots c_{m-k} c_{m-k+1} \ldots c_m 0(2)}) = f(\Delta^5_{c_1 c_2 \ldots c_{m-k}(2)}).$$

$$\prod_{j=1}^{m-k} g_{c_j} \left(\delta_{c_{m-k+1}} + \ldots + \delta_0 \prod_{j=m-k+1}^{m} g_{c_j} + \frac{3}{8} \prod_{j=m-k+1}^{m+1} g_{c_j} \right) = \frac{1}{2} \prod_{j=1}^{m-k} g_{c_j},$$

$$\delta_{c_{m-k+1}} + \delta_{c_{m-k+2}} g_{c_{m-k+1}} \ldots + \frac{3}{8} \prod_{j=m-k+1}^{m+1} g_{c_j} = \frac{1}{2},$$

$$2\delta_{c_{m-k+1}} + 2\delta_{c_{m-k+2}} g_{c_{m-k+1}} \ldots + 3 \prod_{j=m-k+1}^{m+1} g_{c_j} = 1.$$

Оскільки добуток $\prod\limits_{j=m-k+1}^{m+1} g_{c_j}$ є звичайним правильним дробом із знаменником 4^k, а δ_{c_i} — зі знаменником 4, то, домноживши останню рівність на 4^k, отримаємо

$$2 \cdot 4^k \delta_{c_{m-k+1}} + 2 \cdot 4^k \delta_{c_{m-k+2}} g_{c_{m-k+1}} \ldots + 3 \cdot 4^k \prod_{j=m-k+1}^{m+1} g_{c_j} = 4^k.$$

Звідси бачимо, що права частина рівності ділиться на 2, а ліва — ні, оскільки останній доданок виразу не ділиться на 2. Прийшли до суперечності.

2) Припустимо, що знайдеться такий циліндр, для якого виконується рівність

$$f(\Delta^5_{c_1c_2\ldots c_m4(2)}) = f(\Delta^5_{c_1c_2\ldots c_m\ldots c_{m+k}(2)})$$

або

$$f(\Delta^5_{c_1c_2\ldots c_m4(2)}) = f(\Delta^5_{c_1c_2\ldots c_{m-k}(2)}).$$

2.1.

$$f(\Delta^5_{c_1c_2\ldots c_m4(2)}) = f(\Delta^5_{c_1c_2\ldots c_mc_{m+1}\ldots c_{m+k}(2)}).$$

$$\frac{5}{8}\prod_{j=1}^{m} g_{c_j} = \prod_{j=1}^{m} g_{c_j}\left(\delta_{c_{m+1}} + \ldots + \delta_{c_{m+k}}\prod_{j=m+1}^{m+k-1} g_{c_j} + \frac{1}{2}\prod_{j=m+1}^{m+k} g_{c_j}\right).$$

Проводимо аналогічні міркування і отримуємо

$$5\cdot 4^k = 8\left(4^k\delta_{c_{m+1}} + \ldots + 4^k\delta_{c_{m+k}}\prod_{j=m+1}^{m+k-1} g_{c_j} + 4^k\frac{1}{2}\prod_{j=m+1}^{m+k} g_{c_j}\right).$$

Ліва частина рівності ділиться на 5, а права — ні. Прийшли до суперечності.

2.2.

$$f(\Delta^5_{c_1c_2\ldots c_{m-k}c_{m-k+1}\ldots c_m4(2)}) = f(\Delta^5_{c_1c_2\ldots c_{m-k}(2)}).$$

$$\prod_{j=1}^{m-k} g_{c_j}\left(\delta_{c_{m-k+1}} + \ldots + \delta_0\prod_{j=m-k+1}^{m} g_{c_j} + \frac{5}{8}\prod_{j=m-k+1}^{m+1} g_{c_j}\right) = \frac{1}{2}\prod_{j=1}^{m-k} g_{c_j},$$

Проводимо аналогічні міркування і отримуємо

$$2\cdot 4^k\delta_{c_{m-k+1}} + 2\cdot 4^k\delta_{c_{m-k+2}}g_{c_{m-k+1}}\ldots + 5\cdot 4^k\prod_{j=m-k+1}^{m+1} g_{c_j} = 4^k.$$

Права частина рівності ділиться на 2, а ліва — ні, оскільки останній доданок виразу не ділиться на 2. Прийшли до суперечності.

Отже, рівень функції f більше двох відрізків містити не може. □

Лема 3.1. *Образом п'ятіркового циліндра при відображенні f є G — циліндр або точка, причому точкою є тоді тільки тоді, коли в основі циліндра є принаймні одна 2.*

Доведення. Якщо в основі циліндра $\Delta^5_{c_1\ldots c_m}$ є принаймні одна двійка, тобто $c_i = 2$ $(1 \le i \le m)$, то очевидно, що $f(\Delta^5_{c_1c_2\ldots c_m}) = \Delta^G_{c_1c_2\ldots c_{i-1}2(0)}$, де $\Delta^G_{c_1c_2\ldots c_{i-1}2(0)}$ є точкою.

Тепер доведемо, що образом циліндра $\Delta^5_{c_1c_2\ldots c_m}$, $c_i \ne 2$, $1 \le i \le m$ є циліндр.

Нехай $x \in \Delta^5_{c_1c_2\ldots c_m}$, тобто $x = \Delta^5_{c_1c_2\ldots c_m\alpha_{m+1}\ldots\alpha_{m+k}\ldots}$, і

$$f(\Delta^5_{c_1c_2\ldots c_m(0)}) = \Delta^G_{c_1c_2\ldots c_m(0)} = a,$$

$$f(\Delta^5_{c_1c_2\ldots c_m(4)}) = \Delta^G_{c_1c_2\ldots c_m(4)} = b.$$

Тоді за властивістю циліндрів, а саме, що функція на $\Delta^G_{c_1c_2\ldots c_m}$ набуває найбільшого і найменшого значення на його кінцях, випливає, що

$$f(\Delta^5_{c_1c_2\ldots c_m}) \subset [A, B],$$

де $A = \min\{a, b\}$, $B = \max\{a, b\}$.

Оскільки $f(x)$ — неперервна на відрізку $\Delta^5_{c_1c_2\ldots c_m}$ функція, то вона набуває всіх проміжних значень між A і B, тобто

$$f(\Delta^5_{c_1c_2\ldots c_m}) = [A, B].$$

□

Теорема 3.3. *Якщо $X = \Delta^5_{\tau_1\tau_2\ldots\tau_n\ldots}$ — неперервна випадкова величина, цифри τ_n п'ятіркового зображення якої є незалежними випадковими величинами, що мають розподіли*

$$P\{\tau_n = i\} = p_{in}, \ i \in A_5, \ n \in N,$$

то розподіл випадкової величини $Y = f(X)$ є чисто дискретним, якщо

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[p_{2n}\prod_{k=1}^{n-1}(1 - p_{2k})\right] = 1,$$

і є нетривіальною сумішшю дискретного і неперервного розподілів, коли

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[p_{2n}\prod_{k=1}^{n-1}(1 - p_{2k})\right] < 1.$$

Доведення. Як відомо з теореми 3.2, множина рівнів функції f, які містять відрізки, є зліченною. Більше того, рівень не може містити більше двох відрізків. Тому подія

$$P\{Y = f(\Delta^5_{c_1\ldots c_m 2}) = \Delta^G_{c_1\ldots c_m 2(0)}\}$$

рівносильна події

$$X \in \Delta^5_{c_1\ldots c_m 2},$$

якщо рівень $y_0 = \Delta^G_{c_1\ldots c_m 2(0)}$ містить один відрізок, або ж

$$X \in \Delta^5_{c_1\ldots c_m 2} \bigcup \Delta^5_{c'_1\ldots c'_m 2},$$

де $f(\Delta^5_{c_1\ldots c_m 2(0)}) = f(\Delta^5_{c'_1\ldots c'_m 2(0)})$, якщо рівень містить два відрізки.

У першому випадку, в силу незалежності цифр випадкової величини X, маємо

$$P\{Y = f(\Delta^5_{c_1\ldots c_m 2(0)})\} = P\{X \in \Delta^5_{c_1\ldots c_m 2}\} \equiv \left(\prod_{i=1}^{m} p_{c_i i}\right) p_{2,m+1}.$$

У другому випадку вважатимемо, що число $y = f(\Delta^5_{c_1\ldots c_m 2(0)})$ має дві "складові" y і y^*, які є формально різними числами.

Тому $y = f(\Delta^5_{c_1\ldots c_m 2(0)})$ є атомом розподілу тоді і тільки тоді, коли

$$p_{c_i i} \neq 0 \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, m\} \quad \text{і} \quad p_{2,m+1} \neq 0.$$

Сумарна маса атомів розподілу Y обчислюється за формулою

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \left[p_{2n} \prod_{k=1}^{n-1} (p_{0k} + p_{1k} + p_{3k} + p_{4k}) \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \left[p_{2n} \prod_{k=1}^{n-1} (1 - p_{2k}) \right].$$

Очевидно, що остання сума є скінченним числом, причому вона містить скінченну кількість доданків, якщо існує $p_{2k} = 1$, і нескінченну — в протилежному випадку.

Якщо $p_{0n} = p_{1n} = p_{2n} = p_{3n} = p_{4n}$ для всіх $n \in N$, то $S = 1$ і розподіл є чисто атомарний (дискретний). Якщо ж всі p_{in} різні і $S < 1$, то, враховуючи теорему Лебега про структуру ймовірнісної міри, робимо висновок, що розподіл Y, маючи атоми, має і нетривіальну неперервну компоненту.

Зауважимо, що $S \neq 0$, що є наслідком неперервного розподілу X. $\square$

Наслідок 3.1. *Якщо X — випадкова величина, рівномірно розподілена на $[0,1]$, то випадкова величина Y має чисто дискретний розподіл.*

Теорема 3.4. *Якщо $X = \Delta^5_{\tau_1\tau_2\ldots\tau_n\ldots}$ — неперервна випадкова величина, цифри τ_n п'ятіркового зображення якої є незалежними випадковими величинами і є однаково розподіленими, то випадкова величина $Y = f(X)$ має:*

1) чисто дискретний розподіл, якщо $p_2 \neq 0$;

2) сингулярний розподіл канторівського типу, якщо $p_2 = 0$.

Доведення. 1. Очевидно, що для $c_i \neq 2$ $(i = \overline{1,m})$

$$P\{Y = f\left(\Delta^5_{c_1\ldots c_{m-1}2(0)}\right)\} \geq P\{X \in \Delta^5_{c_1\ldots c_{m-1}2}\} = p_2 \prod_{j=1}^{m-1} p_{c_j}.$$

Але

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{(c_1,\ldots,c_{m-1}) \\ 2\neq c_i \in A_5}} \left(p_2 \prod_{j=1}^{m-1} p_{c_j}\right) = p_2 + p_2(p_0+p_1+p_3+p_4) + \ldots +$$

$$+p_2(p_0+p_1+p_3+p_4)^n + \ldots = \frac{p_2}{1-(p_0+p_1+p_3+p_4)} = 1.$$

Тому для зліченної множини

$$A = \{y : y = f(\Delta^5_{c_1\ldots c_{m-1}2(0)})\},\ c_i \in A_5 \setminus \{2\},\ m \in N$$

маємо $P\{Y \in A\} = 1$, тобто Y має чисто дискретний розподіл.

2. Якщо $p_2 = 0$, то $P\{X \in \Delta^5_{c_1\ldots c_{m-1}2}\} = 0$. Разом з цим $P\{X = x\} = 0$ для будь - якого $x \in [0,1]$ у силу неперервності розподілу випадкової величини X.

Враховуючи, що функція $y = f(x)$ континуальних рівнів не має (крім тих, що містять відрізки), робимо висновок про неперервність розподілу випадкової величини Y. Разом з цим він зосереджений на множині нульової міри Лебега:

$$C = C[5,V],\ \text{де}\ V = \{v : p_{vn} \neq 0\}.$$

Тому розподіл випадкової величини Y є сингулярним розподілом канторівського типу. □

[1] *Працевитый Н. В.* Случайные величины с независимыми Q_2-символами // Асимптотические методы в исследовании стохастических моделей. — К.: Ин–т математики АН УССР, 1987. — С. 92–102.

[2] *Турбин А. Ф., Працевитый Н. В.* Фрактальные множества, функции, распределения. — К.: Наук. думка, 1992. — 208 с.

[3] *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — К.: Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 1998. — 296 с.

[4] *Працьовитий М. В., Свинчук О. В.* Один клас неперервних ніде не монотонних функцій з автомодельними властивостями // Науковий часопис НПУ ім. М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — К.: НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2014. — 16 (2). — С. 81–93.

[5] *Працьовитий М. В., Свинчук О. В.* Про одну сім'ю неперервних немонотонних сингулярних функцій канторівського типу з фрактальними властивостями // Науковий часопис НПУ ім. М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — К.: НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2015. — 17. — С. 37–48.

[6] *Працьовитий М. В., Ратушняк С. П.* Розподіл значень однієї фрактальної функції від випадкового аргумента // Науковий часопис НПУ ім. М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — К.: НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2014. — 16 (2). — С. 150–160.

[7] *Працьовитий М. В., Торбін Г. М., Гончаренко Я. В.* Сучасні задачі та проблеми сингулярних розподілів ймовірностей // Наукові записки: Зб. наук. статей НПУ ім. М. П. Драгоманова. — К.: НПУ, 2001. — Вип. 42. — С. 18–20.