Збірник праць Інституту математики НАН України 2017, т. 14, № 2, 71–87

УДК 532.595

Просторовий рух пружного резервуара, цілком заповненого ідеальною нестисливою рідиною

І. О. Луковський

Інститут математики НАН України, Київ; lukovsky@imath.kiev.ua

Within the framework of hypothesises of the dynamics of relative motions of mechanical systems, the paper considers a generalised N. Joukowskii' problem [1] stated here for reservoirs with deformable walls. A finite set of generalised coordinates is introduced, by using which necessary kinematic and dynamic parameters of the reservoirs-liquid mechanical system are defined. Derivations of the governing equations and the solving of basic boundary value problems with respect of the velocity potential are done by employing variational principles of the continuum mechanics.

У розрізі гіпотез динаміки відносного руху механічних систем у роботі розглядається узагальнення задачі М. Є. Жуковського [1], сформульованої тут для випадку резервуарів з деформівними стінками. У розгляд вводиться злічена множина узагальнених координат, через які визначаються необхідні кінематичні і динамічні величини механічної системи резервуар-рідина. Вивід рівнянь руху механічної системи та розв'язування базових крайових задач для потенціалу швидкостей рідини здійснюється на основі варіаційних принципів механіки та формулюваннях відповідних варіаційних проблем.

Вступ

При дослідженні руху матеріальної системи, яка складається із "несучого" твердого деформівного тіла (резервуар) і обмеженого об'єму рідини $Q(t)$ ("тіло", що переноситься), передбачається дві постановки задач динаміки.

У першій задачі динаміки припускається рух "несучого" твердого тіла заданим, а визначенню підлягає рух рідини у резервуарі, а також сил взаємодії між рідиною і пружними стінками резервуара.

Друга, більш загальна задача динаміки, передбачає визначення як руху самого резервуару, так і руху рідини усередині резервуару, а також сил взаємодії між рідиною і резервуаром.

Положення всієї системи у цьому випадку буде визначатися, взагалі кажучи, 6-ма проекціями квазішвидкостей і зліченою кількістю узагальнених координат $q_n(t)$, що характеризують вектор пружних переміщень стінок резервуара.

Розгляд цього дослідження зручно розпочати з постановки першої задачі динаміки системи резервуар-рідина.

1 Крайова задача теорії просторового руху резервуара, цілком заповненого ідеальною нестисливою рідиною

Нехай резервуар з пружними стінками, цілком заповнений ідеальною нестисливою рідиною, здійснює поступальний і обертальний рух із заданою поступальною швидкістю $\boldsymbol{v}_0$ і миттєвою кутовою швидкістю $\boldsymbol{\omega}(t)$. Введему в розгляд абсолютну систему координат $O'x'y'z'$ і систему координат $Oxyz$, незмінно зв'язану з резервуаром з абсолютно жорсткими стінками.

Цей "твердий скелет" у розглядуваній тут теорії являє собою несуче тіло. До тіл, що переносяться, відноситься обмежений об'єм рідини $Q(t)$ і частинки пружної його поверхні, які здійснюють малі рухи відносно тих положень, які б вони займали при абсолютно жорстких стінках резервуара. Положення точок M скелета задамо радіус-вектором $\boldsymbol{\rho}$; через $\boldsymbol{r}'_0$ позначимо радіус-вектор полюса O відносно нерухомих осей з початком у точці O'.

Переміщення частинки, яка знаходиться у точці M, задамо вектором $\boldsymbol{u}(x, y, z, t)$. При цьому припускається, що час входить в $\boldsymbol{u}$ через параметри $q_\alpha(t)$, які у подальшому грають роль узагальнених координат. Вектор переміщень $\boldsymbol{u}(x, y, z, t)$ у рамках методів аналітичної механіки з скінченним числом ступенів вільності також вважатимемо відомою функцією поряд з векторами $\boldsymbol{v}_0(t)$ і $\boldsymbol{\omega}(t)$.

Рух резервуара з рідиною розглядатимемо у потенціальному силовому полі, для якого потенціал сил тяжіння має вигляд

$$U = -\boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{r}' = -\boldsymbol{g} \cdot (\boldsymbol{r}_0' + \boldsymbol{r}), \tag{1}$$

де $\boldsymbol{r}'$ — радіус-вектор точки системи резервуар-рідина відносно точки O'; $\boldsymbol{r}_0'$ — радіус-вектор точки O відносно нерухомої точки O'; $\boldsymbol{r}$ — радіус-вектор якої-небудь точки системи відносно точки O; $\boldsymbol{g}$ — вектор прискорення сил тяжіння.

Далі будемо припускати, що у початковий момент часу рідина знаходиться у стані спокою, або у стані безвихрового руху. Для ідеальної нестисливої рідини це означає, що на основі відомої теореми Лагранжа її подальший рух у потенціальному силовому полі буде також безвихровий. Вектор швидкостей частинок рідини у нерухомій системі координат $O'x'y'z'$, задовольняє умову

$$rot\, \boldsymbol{v} = 0, \tag{2}$$

і у розгляд можна ввести однозначний потенціал швидкостей — гармонічну функцію $\Phi_1(x', y', z')$ координат частинок рідини, градієнт якої дорівнює вектору абсолютної швидкості $\boldsymbol{v}_a$ частинки.

За допомогою формул перетворення координат потенціал швидкостей Φ_1 у рухомій системі координат можна представити як функцію, гармонічну за координатами x, y, z, в яку тепер увійде і час t:

$$\Phi_1(x', y', z') = \Phi(x, y, z, t).$$

Тепер абсолютна швидкість $\boldsymbol{v}_a$ у рухомій системі координат представляється як

$$\boldsymbol{v}_a = grad\, \Phi, \tag{3}$$

причому Φ залишається гармонічною функцією за змінними x, y, z.

Позначивши через $\boldsymbol{r}\{x(t), y(t), z(t)\}$ радіус-вектор частинки рідини у зв'язаній системі координат $Oxyz$, а через $\boldsymbol{r}\{\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)\}$ її відносну швидкість, на основі теореми про розподіл швидкостей у складному русі механічної системи, маємо:

$$\boldsymbol{v}_a = \nabla\Phi = \boldsymbol{v}_o + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} + \overset{*}{\boldsymbol{r}}. \tag{4}$$

Тут і у подальшому зірочкою позначені вектори, проекції яких на осі зв'язаної системи координат $Oxyz$ дорівнюють похідним за часом від проекцій на них відповідних векторів [2].

Для потенціалу швидкостей $\Phi(x,y,z,t)$, який описує абсолютний рух рідини у рухомій системі координат, на основі зазначеного вище можна сформулювати наступну крайову задачу:

$$\nabla^2\Phi = 0, \;\; \boldsymbol{r} \in Q(t), \tag{5}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = \boldsymbol{v}_0 \cdot \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\nu}) + \frac{\partial u_\nu}{\partial t}, \;\; \boldsymbol{r} \in S(t), \tag{6}$$

де $\boldsymbol{\nu}$ — орт зовнішньої нормалі до поверхні $S(t)$ обмеженого об'єму рідини $Q(t)$; u_ν — проекція пружного переміщення $\boldsymbol{u}(x,y,z,t)$ на напрям зовнішньої нормалі до поверхні $S(t)$.

Формулювання крайової умови (6) задачі (5)–(6) одержано шляхом прирівнювання нормальних складових абсолютної швидкості стінок резервуара і частинок рідини об'єму $Q(t)$. У випадку абсолютно жорстких стінок резервуара $\dfrac{\partial u_\nu}{\partial t} = 0$.

Тиск в ідеальній рідині у випадку потенціальних рухів визначається, як відомо, із інтеграла Лагранжа–Коші, який у зв'язаній системі координат приймає вигляд

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 - \nabla\Phi \cdot (\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) + U + \frac{p}{\rho} = 0, \tag{7}$$

де ρ — масова густина рідини; U — потенціал сил тяжіння (1).

Зауважимо, що похідна за часом $\dfrac{\partial \Phi}{\partial t}$ у (7) обчислюється у рухомій системі координат, тобто для точки M, яка незмінно зв'язана з рухомою системою координат і має відносно неї координати x, y, z.

Умови розв'язності крайової задачі (5)-(6) має вигляд

$$\int\limits_{S(t)} F dS = 0, \tag{8}$$

де функція F приймає на $S(t)$ значення у відповідності з (6).

2 Варіаційний принцип у задачі про просторовий рух пружного резервуара, цілком заповненого рідиною

Покажемо, що крайова задача (5)–(6) випливає із варіаційного принципу Гамільтона–Остроградського, в якому роль функції Лагранжа відіграє вираз

$$L = \int\limits_{Q(t)} p\,dQ = -\rho \int\limits_{Q(t)} \left[\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 - \nabla\Phi\cdot(\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) + U\right] dQ, \tag{9}$$

де ρ — масова густина; $Q(t)$ — об'єм рідини, обмежений пружними стінками резервуара $S(t)$.

У відповідності з цим принципом для дійсних рухів рідини у силовому полі (1), викликаних нормальними пружними переміщеннями $u_\nu(x, y, z, t)$, інтеграл

$$W = \int\limits_{t_1}^{t_2} L\,dt \tag{10}$$

приймає стаціонарні значення, тобто

$$\delta W = \delta \int\limits_{t_1}^{t_2} L\,dt = 0. \tag{11}$$

При цьому вважається, що дійсні рухи і всі рухи порівняння починаються одночасно у момент часу t_1 і закінчуються також одночасно у момент часу t_2. Початкове і кінцеве положення системи повинні бути одними і тими ж для дійсних рухів і рухів порівняння.

Відповідна цьому принципу варіаційна задача формулюється так: із всіх функцій $\Phi(x, y, z, t)$, неперервних разом з похідними першого порядку за просторовими змінними і часом t, знайти таку, яка доставляє інтегралу W стаціонарне значення. Дійсні рухи тут визначаються функцією $\Phi(x, y, z, t)$, рухи порівняння — функціями $\Phi + \delta\,\Phi$, причому

$$\delta\,\Phi(x, y, z, t_1) = 0, \quad \delta\,\Phi(x, y, z, t_2) = 0. \tag{12}$$

Першу варіацію $\delta\,W$ обчислимо, прийнявши до уваги вираз

$$\rho \int\limits_{Q(t)} U dQ = -\rho \int\limits_{Q(t)} \boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{r}'\,dQ = -m_1\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{r}'_{1C}, \tag{13}$$

де

$$\boldsymbol{r}'_{1C} = \boldsymbol{r}'_0 + \boldsymbol{r}_{1C}; \tag{14}$$

$\boldsymbol{r}'_{1C}$ — радіус-вектор центра мас об'єму рідини $Q(t)$ відносно точки O'; $\boldsymbol{r}_{1C}$ — радіус-вектор центра мас рідини відносно точки O; m_1 — маса рідини.

Для "функції Лагранжа" (9) спочатку одержимо вираз

$$L = -\rho \int\limits_{Q(t)} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 - \nabla\Phi \cdot (\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})\right] dQ + m_1 \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{r}'_{1C}, \quad (15)$$

після чого у відповідності з (11) знайдемо

$$\delta W = -\rho \int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_{Q(t)} \{[\delta\Phi_t + \nabla\Phi \cdot \nabla(\delta\Phi) - \boldsymbol{v}_0 \cdot \nabla(\delta\Phi) -$$

$$- (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) \cdot \nabla(\delta\Phi)]\, dQ\}\, dt + m_1 \int\limits_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{g} \cdot \delta \boldsymbol{r}'_{1C} dt = 0. \quad (16)$$

Інтеграли

$$\int\limits_{Q(t)} \nabla\Phi \cdot \nabla(\delta\Phi)\, dQ, \quad \int\limits_{Q(t)} \boldsymbol{v}_0 \cdot \nabla(\delta\Phi)\, dQ \;\; i \;\; \int\limits_{Q(t)} (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) \cdot \nabla(\delta\Phi)\, dQ$$

перетворимо, застосувавши теорему Гріна

$$\int\limits_{Q(t)} \nabla\varphi \cdot \nabla\psi dQ = \int\limits_{S(t)} \psi \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} dS - \int\limits_{Q(t)} \psi \nabla^2 \varphi dQ. \quad (17)$$

Поклавши у (17) $\nabla\varphi = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}_1(\omega_2 z - \omega_3 y) + \boldsymbol{i}_2(\omega_3 x - \omega_1 z) + \boldsymbol{i}_3(\omega_1 y - \omega_2 x)$ і прийнявши до уваги, що $\nabla(\boldsymbol{v}_0 \cdot \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{v}_0$, одержимо

$$\int\limits_{Q(t)} \nabla\Phi \cdot \nabla(\delta\Phi) dQ = \int\limits_{S(t)} \delta\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} dS - \int\limits_{Q(t)} \delta\Phi \nabla^2 \Phi dQ,$$

$$\int\limits_{Q(t)} \boldsymbol{v}_0 \cdot \nabla(\delta\Phi) dQ = \int\limits_{Q(t)} \nabla(\boldsymbol{v}_0 \cdot r) \cdot \nabla(\delta\Phi) dQ = \int\limits_{S(t)} \delta\Phi \boldsymbol{v}_0 \cdot \boldsymbol{\nu} dS, \quad (18)$$

$$\int\limits_{Q(t)} (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) \cdot \nabla(\delta\Phi) dQ = \int\limits_{S(t)} \delta\Phi (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{\nu} dQ.$$

У силу того, що час не варіюється, то

$$\int\limits_{Q(t)} \delta\Phi_t dQ = \int\limits_{Q(t)} \frac{\partial}{\partial t}(\delta\Phi)dQ. \tag{19}$$

Застосовуючи до цього виразу формулу

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{Q(t)} f dQ = \int\limits_{Q(t)} \frac{\partial f}{\partial t}dQ + \int\limits_{S(t)} f v_\nu dS, \tag{20}$$

справедливу для довільної функції $f(x, y, z, t)$ у випадку, коли область $Q(t)$ залежить від часу, одержимо

$$\int\limits_{Q(t)} \frac{\partial}{\partial t}(\delta\Phi)dQ = \frac{d}{dt}\int\limits_{Q(t)} \delta\Phi dQ - \int\limits_{S(t)} \delta\Phi v_\nu dS, \tag{21}$$

де v_ν означає нормальну швидкість границі області $Q(t)$.

Останній вираз у (16) перетворимо з врахуванням формули для віртуального (можливого) переміщення довільної точки M_i розглядуваної механічної системи

$$\delta\boldsymbol{r}_i = \delta\boldsymbol{r}'_0 + \delta\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{r}_i + \delta_1\boldsymbol{r}_i, \tag{22}$$

де $\delta\boldsymbol{r}'_0$ — віртуальне переміщення полюса O рухомої системи координат $Oxyz$; $\delta\boldsymbol{\theta}$ — вектор нескінченно малого повороту резервуара відносно точки O; δ_1 означає варіацію при фіксованих ортах зв'язаної системи $\boldsymbol{i}_s$.

З врахуванням (22) одержимо

$$m_1\int\limits_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{g}\cdot\delta\boldsymbol{r}'_{1C}dt = \int\limits_{t_1}^{t_2}[m_1\boldsymbol{g}\cdot\delta\boldsymbol{r}'_0 + (m_1\boldsymbol{r}_{1C}\times\boldsymbol{g})\delta\boldsymbol{\theta} + m_1\delta\boldsymbol{r}_{1C}]dt. \tag{23}$$

У силу того, що рух резервуара вважається відомим, то $\delta\boldsymbol{r}'_0 = 0$ і $\delta\boldsymbol{\theta} = 0$, а значить

$$m_1\int\limits_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{g}\cdot\delta\boldsymbol{r}'_{1C}dt = m_1\int\limits_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{g}\cdot\delta\boldsymbol{r}_{1C}dt = 0, \tag{24}$$

де $m_1\boldsymbol{r}_{1C} = \rho \int\limits_{Q(t)} \boldsymbol{r}dQ$.

При обчисленні варіації $\delta\boldsymbol{r}_{1C}$ приймалося до уваги, що змочувана поверхня резервуара здійснює наперед задані переміщення $\boldsymbol{u}(x, y, z, t)$.

Підставляючи співвідношення (18), (21) і (24) у (16), одержимо

$$\delta W = \rho \int\limits_{t_1}^{t_2} \left\{ \int\limits_{S(t)} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \nu} - \boldsymbol{v}_0 \cdot \boldsymbol{\nu} - (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{\nu} - \frac{\partial u_\nu}{\partial t} \right] \delta\Phi dS - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{Q(t)} \nabla^2 \Phi \delta\Phi dQ + \frac{d}{dt} \int\limits_{Q(t)} \delta\Phi dQ \right\} dt = 0. \tag{25}$$

Останній доданок у цьому рівнянні обертається у нуль у відповідності з умовами (12).

У силу незалежності варіацій $\delta\Phi$ із (25) випливає крайова задача (5)-(6).

Варіаційне формулювання крайової задачі (5)-(6) можна використати для побудови наближених методів визначення потенціалу швидкостей $\Phi(x, y, z, t)$, а разом з цим і виводу рівнянь руху розглядуваної механічної системи у цілому.

Кінематична крайова умова задачі (6) дозволяє подати потенціал швидкостей $\Phi(x, y, z, t)$ у вигляді

$$\Phi(x, y, z, t) = \boldsymbol{v}_0 \cdot \boldsymbol{V} + \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\Omega} + \varphi, \tag{26}$$

де $\boldsymbol{V}(x, y, z)$ і $\boldsymbol{\Omega}(x, y, z)$ — гармонічні вектори, тобто вектори, проекції яких V_1, V_2, V_3 і $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ на осі $Oxyz$ є гармонічними функціями, що задовольняють крайові умови:

$$\left.\frac{\partial V_1}{\partial \nu}\right|_{S(t)} = \nu_1, \ \left.\frac{\partial V_2}{\partial \nu}\right|_{S(t)} = \nu_2, \ \left.\frac{\partial V_3}{\partial \nu}\right|_{S(t)} = \nu_3; \tag{27}$$

$$\left.\frac{\partial \Omega_1}{\partial \nu}\right|_{S(t)} = y\nu_3 - z\nu_2, \ \left.\frac{\partial \Omega_2}{\partial \nu}\right|_{S(t)} = z\nu_1 - x\nu_3, \ \left.\frac{\partial \Omega_3}{\partial \nu}\right|_{S(t)} = x\nu_2 - y\nu_1. \tag{28}$$

Тут ν_1, ν_2, ν_3 — проекції орта $\boldsymbol{\nu}$ на вісі системи $Oxyz$. Гармонічна функція $\varphi(x, y, z)$, яка входить у представлення (26), задовольняє крайову задачу

$$\nabla^2\varphi = 0,\ \boldsymbol{r} \in Q(t),\ \left.\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right|_{S_0} = \frac{\partial u_\nu}{\partial t}. \tag{29}$$

Потенціал швидкостей рідини φ виникає за рахунок пружних коливань стінок резервуара, обумовлених пружними переміщеннями $\boldsymbol{u}(x, y, z, t)$.

У відповідності зі змістом п. 1 частинки пружної поверхні резервуара здійснюють малі рухи відносно тих положень, які б вони займали при абсолютно жорстких стінках резервуара. Цим обумовлена функціональна залежність вектора пружних переміщень $\boldsymbol{u}(x, y, z, t)$ як від координат x, y, z точок несучого тіла, так і від узагальнених координат $\boldsymbol{q}_k(t)$, в якості яких ми виберемо узагальнені коефіцієнти Фур'є у розвиненні

$$\boldsymbol{u}(x, y, z, t) = \sum_k^n \boldsymbol{q}_k(t)\varphi_k^*(x, y, z), \tag{30}$$

де φ_k^* — повна ортогональна разом з константою система функцій, задана на поверхні резервуара S_0 у його натуральному стані.

Таку повну систему функцій пов'яжемо з розв'язками розглянутої раніше автором наступної задачі на власні значення з параметром $\varkappa^*$ у граничній умові на недеформованій поверхні резервуара [3], [4]:

$$\nabla^2\varphi^* = 0,\ \boldsymbol{r} \in Q;\ \left.\frac{\partial\varphi^*}{\partial\nu}\right|_{S_0} = \varkappa^*\varphi^*. \tag{31}$$

На абсолютно жорстких частинах змочуваної поверхні резервуара формулюється умова $\dfrac{\partial\varphi^*}{\partial\nu} = 0$.

Варіаційним методом встановлені дискретність спектра та повнота систем власних функцій спектральних задач типу (31) у роботах [4], [5] та інших.

Розв'язки крайових задач (27) з точністю до довільної функції часу мають вигляд

$$V_1 = x,\ V_2 = y,\ V_3 = z, \tag{32}$$

так що $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{r}$.

Розв'язки крайових задач для Ω_i з умовами (28) єдині при умові

$$\int\limits_{S(t)} \frac{\partial\Omega_i}{\partial\nu} dS = 0, \tag{33}$$

у чому можна пересвідчитися, застосувавши формулу Гауса–Остроградського для перетворення поверхневого інтеграла в об'ємний

$$\int\limits_{S(t)} F\nu_1 dS = \int\limits_{Q(t)} \frac{\partial F}{\partial x} dQ, \quad \int\limits_{S(t)} F\nu_2 dS = \int\limits_{Q(t)} \frac{\partial F}{\partial y} dQ,$$

$$\int\limits_{S(t)} F\nu_3 dS = \int\limits_{Q(t)} \frac{\partial F}{\partial z} dQ, \tag{34}$$

де F — неперервна функція разом з частинними похідними в області $Q(t)$ і на її границі.

Наприклад, для функції Ω_1 маємо

$$\int\limits_{S(t)} \frac{\partial \Omega_1}{\partial \nu} dS = \int\limits_{S(t)} (y\nu_3 - z\nu_2) dS = \int\limits_{Q(t)} \left(\frac{\partial y}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial y} \right) dQ \equiv 0. \tag{35}$$

Для складової потенціалу швидкостей $\varphi(x, y, z, t)$ умовою розв'язності крайової задачі (29) є

$$\int\limits_{S_0} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} dS = \int\limits_{S_0} \frac{\partial u_\nu}{\partial t} dS = 0. \tag{36}$$

Таким чином, у випадку заданого руху резервуара з пружними стінками рух рідини можна вважати відомим, якщо знайдені розв'язки крайових задач Неймана для функцій Ω_i і φ.

3 Визначення сил взаємодії між пружними стінками резервуара і рідиною

Абсолютний рух рідини, що цілком заповнює резервуар з пружними стінками $S(t)$, у потенціальному полі сил тяжіння описується крайовою задачею (5)-(6). У рухомій системі координат $Oxyz$, незмінно зв'язаній з резервуаром з абсолютно жорсткими стінками, тиск у рідині визначається із інтеграла Лагранжа–Коші (7). При цьому переміщення частинки, яка знаходилася у точці M "жорсткого скелету" , задається, як зазначалося вище, вектором переміщень

$\boldsymbol{u}(x, y, z, t)$. Таким чином, вважається відомою (заданою) функціональна залежність вектора $\boldsymbol{u}$ як від координат x, y, z точки у недеформованому стані резервуара, так від узагальнених координат $q_k(t)$:

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(x, y, z; q_1, q_2, ..., q_n). \tag{37}$$

За означенням головний вектор $\boldsymbol{P}$ і головний момент $\boldsymbol{N}$ сил тиску, які діють з боку рідини на рухомий резервуар, дорівнюють

$$\boldsymbol{P} = \int\limits_S p\boldsymbol{\nu}\,dS, \quad \boldsymbol{N} = \int\limits_S \boldsymbol{r} \times p\boldsymbol{\nu}\,dS. \tag{38}$$

Підставивши p із (7) у вирази (38), одержимо

$$\boldsymbol{P} = -\rho\int\limits_S \left[\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 - \nabla\Phi\cdot(\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) + U\right]\boldsymbol{\nu}\,dS, \tag{39}$$

$$\boldsymbol{N} = -\rho\int\limits_S \boldsymbol{r}\times\left[\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 - \nabla\Phi\cdot(\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) + U\right]\boldsymbol{\nu}\,dS. \tag{40}$$

Вирази для головного вектора $\boldsymbol{P}$ (39) і головного момента $\boldsymbol{N}$ (40) сил тиску перетворимо, застосувавши відповідні інтегральні теореми теорії поля. Передусім наведемо формулу

$$\frac{d}{dt}\int\limits_Q f dQ = \int\limits_Q \frac{\partial f}{\partial t}dQ + \int\limits_S f v_\nu dS, \tag{41}$$

справедливу для довільної функції $f(x, y, z, t)$ у випадку, коли область Q залежить від часу t, де v_ν означає нормальну швидкість границі області Q, яка приймається позитивною в напрямі зовнішньої нормалі до границі.

Поверхневі інтеграли, які фігурують у виразах (39) і (40), перетворимо в об'ємні, застосувавши теорему Гауса–Остроградського. Спочатку отримаємо

$$\rho\int\limits_S \frac{\partial\Phi}{\partial t}\boldsymbol{\nu}\,dS = \rho\int\limits_Q \nabla\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)dQ = \rho\int\limits_Q \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\Phi)dQ, \tag{42}$$

$$\rho \int\limits_S \left(\boldsymbol{r} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t} \boldsymbol{\nu} \right) dS = \rho \int\limits_Q \left(\boldsymbol{r} \times \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) dQ = \rho \int\limits_Q \left[\boldsymbol{r} \times \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \Phi) \right] dQ =$$

$$= \rho \int\limits_Q \frac{\partial}{\partial t} (\boldsymbol{r} \times \nabla \Phi) dQ - \rho \int\limits_Q (\boldsymbol{v}_r \times \nabla \Phi) dQ. \qquad (43)$$

Далі, на основі формули (41) одержимо:

$$\rho \int\limits_Q \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \Phi) dQ = \overset{*}{\boldsymbol{K}} - \rho \int\limits_S \nabla \Phi v_\nu dS, \qquad (44)$$

$$\rho \int\limits_Q \frac{\partial}{\partial t} (\boldsymbol{r} \times \nabla \Phi) dQ - \rho \int\limits_Q (\boldsymbol{v}_r \times \nabla \Phi) dQ =$$

$$= \overset{*}{\boldsymbol{G}} - \rho \int\limits_S (\boldsymbol{r} \times \nabla \Phi) v_\nu dS - \rho \int\limits_Q (\boldsymbol{v}_r \times \nabla \Phi) dQ, \qquad (45)$$

де $\boldsymbol{v}_r$ — відносна швидкість руху рідини, $\overset{*}{\boldsymbol{K}} = \rho \int\limits_Q \nabla \Phi dQ$ — кількість руху об'єму рідини Q, $\overset{*}{\boldsymbol{G}} = \rho \int\limits_Q \boldsymbol{r} \times \nabla \Phi dQ$ — момент кількості руху об'єму рідини відносно точки O.

Подальші перетворення пов'язані із застосуванням формули

$$\frac{1}{2} \int\limits_S [\boldsymbol{\nu} a^2 - 2(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{a}) \boldsymbol{a}] dS = \int\limits_Q [\boldsymbol{a} (\nabla \cdot \boldsymbol{a}) - \boldsymbol{a} \times (\nabla \times \boldsymbol{a})] dQ, \qquad (46)$$

яка є наслідком теореми Гауса–Остроградського і наступних співвідношень векторної алгебри:

$$\nabla (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \times (\nabla \times \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a} \cdot \nabla) \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} \times (\nabla \times \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{b} \cdot \nabla) \boldsymbol{a},$$

$$(\nabla \cdot \boldsymbol{b}) \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} (\nabla \cdot \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{b} \cdot \nabla) \boldsymbol{a}.$$

Поклавши у (46) $\boldsymbol{a} = \nabla \Phi$, знайдемо

$$\frac{1}{2} \rho \int\limits_S (\nabla \Phi)^2 \boldsymbol{\nu} dS = \rho \int\limits_S \nabla \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} dS. \qquad (47)$$

За аналогєю з (46) має місце співвідношення

$$\frac{1}{2}\int\limits_S \boldsymbol{r}\times[\boldsymbol{\nu}a^2 - 2(\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{a}]dS = \int\limits_Q \boldsymbol{r}\times[\boldsymbol{a}\times(\nabla\cdot\boldsymbol{a}) - \boldsymbol{a}\times(\nabla\times\boldsymbol{a})]dQ, \quad (48)$$

із якого при $\boldsymbol{a} = \nabla\Phi$ випливає

$$\frac{1}{2}\rho\int\limits_S [\boldsymbol{r}\times(\nabla\Phi)^2\boldsymbol{\nu}]dS = \rho\int\limits_S \left(\boldsymbol{r}\times\nabla\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}\right)dS. \quad (49)$$

За теоремою Гауса–Остроградського можна встановити співвідношення

$$\int\limits_S [\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}]dS =$$

$$= \int\limits_Q [\boldsymbol{a}\times(\nabla\times\boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}\times(\nabla\times\boldsymbol{a}) - \boldsymbol{a}(\nabla\cdot\boldsymbol{b})]dQ,$$

із якого при $\boldsymbol{a} = \nabla\Phi$ і $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$ випливає

$$\rho\int\limits_S [\nabla\Phi\cdot(\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})]\boldsymbol{\nu}dS = \rho\int\limits_S \nabla\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}dS - \rho\int\limits_Q (\boldsymbol{\omega}\times\nabla\Phi)dQ, \quad (50)$$

$$\rho\int\limits_S \boldsymbol{r}\times[\nabla\Phi\cdot(\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})]\boldsymbol{\nu}dS =$$

$$= \rho\int\limits_S \boldsymbol{r}\times\nabla\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}dS - \rho\int\limits_Q \boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{\omega}\times\partial\Phi)dQ - \rho\int\limits_S (\boldsymbol{r}\times\nabla\Phi)v_\nu dS. \quad (51)$$

Перетворимо тепер у виразах (39) і (40) для головного вектора і головного моменту сил тиску рідини поверхневі інтеграли, які залежать від силової функції U. Одержимо

$$\rho\int\limits_S U\boldsymbol{\nu}dS = -\rho\int\limits_S [\boldsymbol{g}\cdot(\boldsymbol{r}_0' + \boldsymbol{r})]\boldsymbol{\nu}dS = -\rho\int\limits_Q \nabla(\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{r})dQ = -m_1\boldsymbol{g}, \quad (52)$$

$$\rho\int\limits_S \boldsymbol{r}\times U\boldsymbol{\nu}dS = -\rho\int\limits_S \boldsymbol{r}\times[\boldsymbol{g}\cdot(\boldsymbol{r}_0' + \boldsymbol{r})]\boldsymbol{\nu}dS =$$

$$= -\rho \int_Q \boldsymbol{r} \times \nabla(\boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{r}) dQ = -m_1 \boldsymbol{r}_{1C} \times \boldsymbol{g}. \tag{53}$$

Підставивши вирази (44), (47) (50) і (52) у формулу для головного вектора $\boldsymbol{P}$ (39), а вирази (45), (49) (51) і (53) у формулу для головного моменту $\boldsymbol{N}$ (40), одержимо:

$$\boldsymbol{P} = m_1 \boldsymbol{g} - \overset{*}{\boldsymbol{K}} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{K}, \tag{54}$$

$$\boldsymbol{N} = m_1 \boldsymbol{r}_{1C} \times \boldsymbol{g} - \overset{*}{\boldsymbol{G}} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{G} - \boldsymbol{v}_0 \times \boldsymbol{K}. \tag{55}$$

При цьому було прийнято до уваги, що

$$\boldsymbol{v}_r \times \nabla\Phi = -\boldsymbol{v}_0 \times \nabla\Phi - (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) \times \nabla\Phi,$$

$$\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{r} \times \nabla\Phi) = \boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \nabla\Phi) - \nabla\Phi \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}).$$

Рівності (54) та (55) являють собою математичне формулювання т е о р е м и про зміну кількості руху і т е о р е м и про зміну моменту кількості руху відносно точки O механічної системи резервуар-рідина.

Конкретизуємо тепер рівності (54) та (55), вибравши розв'язок крайової задачі (5)-(6) для потенціалу швидкостей $\Phi(x, y, z, t)$ у формі (26).

Спочатку для векторів кількості руху $\boldsymbol{K}$ і моменту кількості руху $\boldsymbol{G}$ одержимо вирази:

$$\boldsymbol{K} = \rho \int_Q \nabla\Phi dQ = m_1 \boldsymbol{v}_0 + \rho \int_Q \nabla(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\Omega}) dQ + \rho \int_Q \nabla\varphi dQ, \tag{56}$$

$$\boldsymbol{G} = \rho \int_Q \boldsymbol{r} \times \nabla\Phi dQ = \rho \int_Q \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}_0 dQ + \rho \int_Q \boldsymbol{r} \times \nabla(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\Omega}) dQ + \rho \int_Q \boldsymbol{r} \times \nabla\varphi dQ =$$

$$= m_1 \boldsymbol{r}_{1C} \times \boldsymbol{v}_0 + \rho \int_S (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\Omega})(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\nu}) dS + \rho \int_S (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\nu}) \varphi dS. \tag{57}$$

З врахуванням крайових умов (27) і (28) вирази (56) і (57) можна подати у наступному вигляді:

$$\boldsymbol{K} = m_1 (\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{1C} + \overset{*}{\boldsymbol{r}}_{1C}), \tag{58}$$

$$
\boldsymbol{G} = m_1 \boldsymbol{r}_{1C} \times \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{J}^1 + \rho \int\limits_S \boldsymbol{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} dS = m_1 \boldsymbol{r}_{1C} \times \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{J}^1 +
$$

$$
+ \rho \frac{d}{dt} \int\limits_Q \boldsymbol{\Omega} dQ - \rho \int\limits_Q \frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} dQ = m_1 \boldsymbol{r}_{1C} \times \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{J}^1 + \overset{*}{\boldsymbol{l}}_\omega - \boldsymbol{l}_{\omega t}, \quad (59)
$$

де $\boldsymbol{J}^1_{ij} = \rho \int\limits_S \frac{\partial \Omega_i}{\partial \nu} \Omega_j dS$ — компоненти тензора інерції об'єму рідини $Q(t)$ відносно полюса O; $\boldsymbol{r}_{1C}$ — радіус-вектор центру мас об'єму рідини $Q(t)$ відносно точки O; $\boldsymbol{l}_\omega = \rho \int\limits_Q \boldsymbol{\Omega} dQ$; $\boldsymbol{l}_{\omega t} = \rho \int\limits_Q \frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} dQ$.

За означенням вектор центру мас $\boldsymbol{r}_{1C}$ визначається формулою

$$
m_1 \boldsymbol{r}_{1C} = \rho \int\limits_{Q(t)} \boldsymbol{r} dQ, \quad (60)
$$

у відповідності з якою по (35)

$$
m_1 \overset{*}{\boldsymbol{r}}_{1C} = \rho \int\limits_S \boldsymbol{r} v_\nu dS = \rho \int\limits_S \boldsymbol{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} dS = \rho \int\limits_{S_0} \boldsymbol{r} \frac{\partial u_\nu}{\partial t} dS. \quad (61)
$$

З врахуванням (58) і (59) формули (54) і (55) для головного вектора і головного моменту сил тиску рідини приймуть наступний вигляд:

$$
\boldsymbol{P} = m_1 \boldsymbol{g} - m_1 [\overset{*}{\boldsymbol{v}}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{1C}) +
$$

$$
+ \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r}_{1C} + 2\boldsymbol{\omega} \times \overset{*}{\boldsymbol{r}}_{1C} + \overset{**}{\boldsymbol{r}}_{1C}], \quad (62)
$$

$$
\boldsymbol{N} = m_1 \boldsymbol{r}_{1C} \times (\boldsymbol{g} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_0 - \overset{*}{\boldsymbol{v}}_0) - \boldsymbol{J}^1 \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} -
$$

$$
- \overset{*}{\boldsymbol{J}}{}^1 \cdot \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{J}^1 \cdot \boldsymbol{\omega}) - \overset{**}{\boldsymbol{l}}_\omega + \overset{*}{\boldsymbol{l}}_{\omega t} - \boldsymbol{\omega} \times (\overset{*}{\boldsymbol{l}}_\omega - \boldsymbol{l}_{\omega t}). \quad (63)
$$

Зауважимо, що $\dot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + \overset{*}{\boldsymbol{\omega}} = \overset{*}{\boldsymbol{\omega}}$, оскільки система координат $Oxyz$ зв'язана з несучим тілом.

У формулі для головного вектора (62) група членів

$$
\boldsymbol{w}_e = \overset{*}{\boldsymbol{v}}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r}_{1C} + (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{1C}) \times \boldsymbol{\omega} \quad (64)
$$

визначає переносне прискорення, яке складається із прискорення полюса $\boldsymbol{w}_0$, центробіжного прискорення $\boldsymbol{w}^c$ і обертального прискорення $\boldsymbol{w}^{rot}$:

$$\boldsymbol{w}_0 = \overset{*}{\boldsymbol{v}}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_0,\ \boldsymbol{w}^c = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{1C}),\ \boldsymbol{w}^{rot} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r}_{1C}. \tag{65}$$

Доданки

$$\boldsymbol{w}^{Cor} = 2\boldsymbol{\omega} \times \overset{*}{\boldsymbol{r}}_{1C} \quad i \quad \boldsymbol{w}_r = \overset{**}{\boldsymbol{r}}_{1C} \tag{66}$$

є відповідно прискоренням Коріоліса і відносним прискоренням.

Формули (54) і (55) є типовими для динаміки відносного руху складних механічних систем. Для механічних систем, до складу яких входять обмежені об'єми рідини $Q(t)$, характерними є подання векторів $\boldsymbol{K}$ і $\boldsymbol{G}$ у вигляді (56) і (57). При цьому із співвідношення (57) часто буває доцільним виокремити складову

$$\boldsymbol{G}_r^0 = \rho \int\limits_Q \boldsymbol{r} \times \nabla\varphi dQ = \overset{*}{\boldsymbol{l}}_\omega - \boldsymbol{l}_{\omega t}, \tag{67}$$

яка являє собою момент відносної кількості руху об'єму рідини Q відносно полюса O.

Головний момент $\boldsymbol{N}$ тоді набуває вигляду

$$\boldsymbol{N} = m_1\boldsymbol{r}_{1C}\times(\boldsymbol{g}-\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v_0}-\overset{*}{\boldsymbol{v}}_0)-\boldsymbol{J}^1\cdot\dot{\boldsymbol{\omega}}-\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{J}^1\cdot\boldsymbol{\omega})-\overset{*}{\boldsymbol{J}}{}^1\times\boldsymbol{\omega}-\overset{*}{\boldsymbol{G}}{}_r^0-\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{G}_r^0. \tag{68}$$

Групу членів $(-\overset{*}{\boldsymbol{J}} \cdot \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{G}_r^0)$ у (68) трактують звичайно в аналітичній механіці як момент коріолісових сил інерції

$$m_0^{Cor} = -\overset{*}{\boldsymbol{J}}{}^1 \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{G}_r^0. \tag{69}$$

Він прикладений до резервуара і виникає внаслідок рухомості рідини у резервуарі через пружність його стінок.

У випадку просторового руху абсолютно жорсткого резервуара, цілком заповненого рідиною, перетікання рідини по резервуару не змінює положення центру інерції об'єму рідини, тобто $\overset{*}{\boldsymbol{r}}_{1C} = 0$ і $\overset{**}{\boldsymbol{r}}_{1C} = 0$.

Головний вектор і головний момент сил тиску рідини, прикладених до резервуара, у цьому випадку визначаються за формулами:

$$\boldsymbol{P} = m_1[\boldsymbol{g} - \overset{*}{\boldsymbol{v}}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_0 - \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r}_{1C} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{1C})], \tag{70}$$

$$\boldsymbol{N} = m_1 \boldsymbol{r}_{1C} \times (\boldsymbol{g} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_0 - \overset{*}{\boldsymbol{v}}_0) - \boldsymbol{J}^1 \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{J}^1 \cdot \boldsymbol{\omega}). \qquad (71)$$

Формули (63)-(64) одержані М. Є. Жуковським у 1885 р. у роботі [1].

Наведені вище результати можуть бути використанні у першу чергу при виводі рівнянь руху гідропружних систем під дією заданих, прикладених до пружного резервуара зовнішніх сил.

Виписуючи рівняння руху лише резервуара, до правих частин цих рівнянь окрім головного вектора і головного момента зовнішніх сил потрібно включити головний вектор і головний момент сил тиску у відповідності з виразами (62), (63). Окрім цього, для конкретизації вектора пружних переміщень $\boldsymbol{u}(x, y, z, t)$ до розгляду потрібно долучити відповідні рівняння динаміки тонкостінних стержнів, або теорії оболонок [6].

[1] *Жуковский Н. Е.* О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью // Жуковский Н. Е. Собр. соч. — Т. 2. — В. 1. М.–Л.: ГНТИ, 1931.

[2] *Лурье А. И.* Аналитическая механика. — М.: Физматгиз, 1961. — 824 с.

[3] *Луковский И. А.* Применение метода разложения по собственным функциям к решению краевых задач теории возмущенного движения твердого тела с жидкостью // Труды Первой республ. матем. конф. молодых исследов. — К.: Наук. думка, 1965. — 407 с.

[4] *Фещенко С. Ф., Луковский И. А., Рабинович Б. И., Докучаев Л. В.* Методы определения присоединенных масс жидкости в подвижных полостях. — К.: Наук. думка, 1969. — 250 с.

[5] *Комаренко А. Н., Луковский И. А., Фещенко С. Ф.* К задаче о собственных значениях с параметром в краевых условиях // Укр. матем. журн. — 1965. — **17**, 6. — С. 22–30.

[6] *Троценко В. А., Троценко Ю. В.* Неосесимметричные колебания оболочки вращения, частично заполненной жидкостью // Нелінійні коливання. — 2015. — **18**, 3. — С. 394–412.