Збірник праць Інституту математики НАН України 2016, т. 13, № 3, 69–84

УДК 531.36; 517.928.7

Оценка скорости убывания решений нелинейной системы с совпадающими частотами *

В. В. Грушковская [1,2]

[1] *Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Славянск;*
[2] *Institute for Systems Theory and Automatic Control, University of Stuttgart, Stuttgart, Germany;*
grushkovskaya@ist.uni-stuttgart.de

This paper continues a series of studies on the stability and asymptotic behavior of solutions to systems of nonlinear differential equations whose matrix of linear approximation has purely imaginary eigenvalues and eigenvalues with negative real parts. In this paper, we consider the case of several purely imaginary eigenvalues related via second-order resonances. For such a system, sufficient conditions for the asymptotic stability regardless of forms higher than the third order are obtained. The main result provides a power estimate for the norm of solutions in the case of a diagonalizable matrix of linear approximation. The results obtained are illustrated by an example of a 7-DOF pendulum system.

Дана стаття продовжує серію робіт, присвячених дослідженню стійкості та асимптотичної поведінки розв'язків систем нелінійних диференціальних рівнянь, матриця лінійного наближення яких має суто уявні власні значення і власні значення з від'ємними дійсними частинами. У цій роботі розглядається випадок декількох суто уявних власних значень, пов'язаних резонансними співвідношеннями другого порядку. Для такої системи отримано достатні умови асимптотичної стійкості за формами третього порядку. Основним результатом є степенева оцінка норми рішень для випадку діагоналізуємої матриці лінійного наближення системи. Отримані результати проілюстровано на прикладі маятникової системи з сімома ступенями свободи.

*Работа выполнена при поддержке Фонда Александра фон Гумбольдта

1 Введение

Данная статья посвящена исследованию асимптотического поведения решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = Ax + R\,(x)\,, \tag{1}$$

где $x = (x_1, ..., x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ – фазовый вектор системы, $R\,(x) = O(\|x\|^2)$ при $x \to 0$ – вещественная функция, аналитическая в некоторой окрестности нуля, A – вещественная $[n \times n]$ матрица, спектр которой состоит из чисто мнимых собственных значений и собственных значений с отрицательными вещественными частями. Предполагается, что нулевое решение системы (1) *асимптотически устойчиво по формам третьего порядка*, т.е. для любой гладкой функции $\Phi : D \to \mathbb{R}^n$ такой, что $\|Ax + R(x) - \Phi(x)\| = O(\|x\|^4)$, решение $x = 0$ системы $\dot{x} = \Phi(x)$ асимптотически устойчиво по Ляпунову.

Интерес к изучению скорости убывания решений системы (1) обусловлен тем, что, в отличие от линейных систем, для которых асимптотическая устойчивость эквивалентна экспоненциальной, решения систем в критических случаях имеют степенную асимптотику вида $\|x(t)\| = O(t^{-\frac{1}{2}})$ при $t \to +\infty$, при условии, что нулевое решение системы асимптотически устойчиво по формам третьего порядка. В предыдущих работах асимптотическое поведение решений системы (1) было изучено для случая, когда собственные значения матрицы A *не связаны никакими резонансными соотношениями* до четвертого порядка включительно [3, 7, 13, 15], а также при наличии *резонансов четвертого порядка* [2, 12]. Отметим, что устойчивость системы (1) в случае *двух пар совпадающих* собственных значений исследовалась в таких работах, как [6, 8, 10, 14, 16]. Кроме того, в работе [11] было проведено исследование асимптотического поведения системы в указанном частном случае. В отличие от перечисленных работ, в данной статье получены условия асимптотической устойчивости и построена степенная оценка для нормы решений системы (1) в случае *произвольного числа совпадающих* чисто мнимых собственных значений матрицы A, то есть предполагается, что спектр матрицы содержит множество $\{\pm i\omega_1, \dots, \pm i\omega_L\}$, где $\omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega_L$, $L \geq 2$. Доказательство основного результата данной работы основано на исследовании модельной системы и явном построении функции Ляпунова, которое существенно отличается от указанных выше работ.

Статья построена следующим образом. Раздел 2 кратко описывает применение принципа сведения и метода нормальных форм для преобразования системы (1). В разделе 3 исследуются условия устойчивости по формам третьего порядка системы с несколькими парами совпадающих чисто мнимых собственных значений. Степенная оценка для нормы решений построена в разделе 4. В разделе 5 применение полученных результатов проиллюстрировано на примере маятниковой системы с частичной диссипацией. Некоторые технические детали приведены в приложениях.

2 Построение модельной системы

Предположим, что характеристическое уравнение матрицы A имеет q пар чисто мнимых собственных значений $(\pm i\omega_1, ..., \pm i\omega_q)$, первые L пар которых совпадают:

$$\omega_1 = \cdots = \omega_{m_L},\ 1 \le L \le q,$$

и $p = n - 2q$ корней с отрицательными вещественными частями $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$. Предположим также, что другие резонансы до четвертого порядка в системе отсутствуют, и матрица A диагонализируема. Тогда существует такая невырожденная $n \times n$ матрица P, что замена $(\xi^T,\ \eta^T,\ w^T)^T = Px,\ \xi \in \mathbb{R}^q,\ \eta \in \mathbb{R}^q,\ w \in \mathbb{R}^p$, приводит (1) к виду

$$\begin{aligned}
&\dot{\xi}_s = -\,\omega_s \eta_s + X_s\left(\xi, \eta, w\right), \\
&\dot{\eta}_s = \omega_s \xi_s + Y_s\left(\xi, \eta, w\right), \\
&\dot{w}_j = \sum_{i=1}^{p} b_{ji} w_i + W_j\left(\xi, \eta, w\right),\ s = \overline{1, q},\ j = \overline{1, p},
\end{aligned} \tag{2}$$

где матрица $(b_{ij})_{i,j=1}^{p}$ имеет только собственные значения с отрицательными вещественными частями, а разложения в ряд Маклорена функций $X_s(\xi, \eta, w)$, $Y_s(\xi, \eta, w)$, $W_j(\xi, \eta, w)$ не содержат членов ниже второго порядка. В соответствии с принципом сведения [5], введем переменные

$$\zeta_j = w_j + \Phi_j(\xi, \eta),\ z_s = \xi_s + i\eta_s + \Psi_s(\xi, \eta, \zeta),\ \bar{z}_s = \xi_s - i\eta_s + \overline{\Psi}_s(\xi, \eta, \zeta),$$

где Φ_j являются квадратичными формами, Ψ_s – линейными по ξ, η и квадратичными по ζ, с которыми система (2) может быть записана в виде

$$\begin{aligned}\dot{z}_s = i\omega_s z_s + \sum_{|k_1|+|k_2|=2}^{3} Y_s^{(k_1,k_2)} {z_1}^{k_{11}} \ldots z_q^{k_{1q}} \bar{z}_1^{k_{21}} \ldots \bar{z}_q^{k_{2q}} \\ + \sum_{|k_1|+|k_2|\geq 3} P_s^{(k_1,k_2)}(\zeta) {z_1}^{k_{11}} \ldots z_q^{k_{1q}} \bar{z}_1^{k_{21}} \ldots \bar{z}_q^{k_{2q}} + H_s(z,\bar{z},\zeta),\end{aligned} \tag{3}$$

$$\dot{\zeta}_j = \sum_{l=1}^{p} b_{jl}\zeta_l + \sum_{|k_1|+|k_2|\geq 4} Q_j^{(k_1,k_2)}(\zeta) z_1^{k_{11}} \ldots z_q^{k_{1q}} \bar{z}_1^{k_{21}} \ldots \bar{z}_q^{k_{2q}} + E_j(z,\bar{z},\zeta),$$

где $Y_s^{(k_1,k_2)}$ – постоянные коэффициенты, $P_s^{(k_1,k_2)}(\zeta)$ и $Q_j^{(k_1,k_2)}(\zeta)$ – линейные формы, функции $H_s(z,\bar{z},\zeta)$, $E_j(z,\bar{z},\zeta)$ содержат члены как минимум второго порядка по ζ, либо как минимум четвертого порядка по z; $k_i=(k_{i1},...,k_{iq})$, $|k_i|=\sum\limits_{s=1}^{q} k_{is}$, $i=1,2$. Уравнения $\dot{\bar{z}}$ являются комплексно-сопряженными к уравнениям для $\dot{z}$. Для системы (3) функция Ляпунова может быть получена как сумма функций Ляпунова для критической подсистемы

$$\dot{z}_s = i\omega_s z_s + \sum_{|k_1|+|k_2|=2}^{3} Y_s^{(k_1,k_2)} {z_1}^{k_{11}} ... z_q^{k_{1q}} \bar{z}_1^{k_{21}} \ldots \bar{z}_q^{k_{2q}}, \tag{4}$$

и для линейной устойчивой подсистемы

$$\dot{\zeta}_j = \sum_{l=1}^{p} p_{jl}\zeta_l, \quad j=\overline{1,p}. \tag{5}$$

Лемма 2.1. [5,13] *Пусть $V_1(z)$ является положительно определенной функцией с отрицательно определенной полной производной $V_1^{'}$ в силу системы* (4)*, и пусть $V_2(\zeta)$ является положительно определенной квадратичной формой $V_2(\zeta) = (T\zeta,\zeta)$, полная производная которой в силу системы* (5) *равна $V_2^{'} = -C^2 \sum\limits_{j=1}^{p} \zeta_j^2$, $C \neq 0$. Тогда функция $V(z,\zeta) = V_1(z) + V_2(\zeta)$ является функцией Ляпунова для системы* (3)*. Кроме того, для любого $\delta_1 \in (0,1)$ существует такое $\varepsilon_1 > 0$, что*

$$\dot{V} \leq -(1-\delta_1)\left(\left|V_1^{'}\right| + \left|V_2^{'}\right|\right), \text{ для всех } (z,\zeta) \in B_{\varepsilon_1}(0) \subseteq \mathbb{C}^q \times \mathbb{R}^p, \tag{6}$$

где $\dot{V}$ – полная производная функции V в силу системы (3).

Для построения функции Ляпунова V_1 перейдем к нормальной форме системы (4) заменой переменных $u_s = z_s + \sum_{j=2}^{3} Q_s^{(j)}(z, \bar{z})$, где $Q_s^{(j)}(z, \bar{z})$ являются формами j-го порядка, определяемыми коэффициентами правой части системы (4) (явные формулы приведены, например, в [9, 13]). Далее, перейдем к вещественным переменным r_s, θ_s по формулам $u_s = r_s e^{i\theta_s}$. Получаем систему

$$\begin{aligned} \dot{r}_s &= r_s \sum_{k=1}^{q} A_{sk} r_k^2 + F_{1s}(r, \theta) + R_s(r, \theta), \\ r_s \dot{\theta}_s &= i\omega_s r_s + r_s \sum_{k=1}^{q} B_{sk} r_k^2 + F_{2s}(r, \theta) + \Theta_s(r, \theta), \end{aligned} \tag{7}$$

где $R_s(r, \theta)$, $\Theta_s(r, \theta)$ не содержат членов ниже четвертого порядка, а $F_{1s}(r, \theta)$, $F_{2s}(r, \theta)$ являются формами третьей степени по r, явные выражения приведены в приложении 1.

3 Условия устойчивости

Из результатов предыдущего раздела следует, что асимптотической устойчивости инвариантного множества $\{(r, \theta) : r = 0\}$ следующей *модельной системы* достаточно для асимптотической устойчивости по формам третьего порядка нулевого решения системы (1) [5, 13]:

$$\dot{r}_s = r_s \sum_{j=1}^{q} A_{sj} r_j^2 + F_{1s}(r, \theta),\ r_s \dot{\theta}_s = r_s \sum_{j=1}^{q} B_{sj} r_j^2 + F_{2s}(r, \theta) + i\omega_s r_s. \tag{8}$$

Отметим, что в нерезонансном случае, т. е. при $F_s \equiv 0$, критерий асимптотической устойчивости по формам третьего порядка был предложен, например, в [9]. В [10] показано, что для случая резонансов четных порядков алгебраического критерия асимптотической устойчивости не существует. В данной работе приводятся достаточные условия, обеспечивающие существование полиномиальных функций Ляпунова для (8). В отличие от [6, 10] и др., рассматривается случай произвольного числа совпадающих частот.

Теорема 3.1. *Инвариантное множество* $\{(r, \theta) : r = 0\}$ *системы* (8) *асимптотически устойчиво, если существуют такие постоянные* $c_{j_1 j_2}$, $j_1, j_2 = \overline{1, q}$, *что матрица* $(c_{j_1 j_2})_{j_1, j_2 = 1}^{q}$ *положительно определенная и симметричная, и следующая квадратичная форма* W_1 *является отрицательно определенной при всех* $\rho_s \geq 0$, $s = \overline{1, q}$:

$$W_1(\rho)=\sum_{j=1}^{q}\big(c_{jj}A_{jj}+c_{jj}\sum_{\substack{j_1,j_2=1\\ j_1\neq j_2; j_1,j_2\neq j}}^{L}\big(d_{jjj_1j_2}+\sum_{j_3=1}^{q}|c_{j_1j_2}|d_{j_1j_2jj}\big)+\sigma_j\big)\rho_j^2$$

$$+\sum_{\substack{j_1,j_2=1\\ j_1\neq j_2}}^{q}\rho_{j_1}\rho_{j_2}\big(2c_{j_1j_1}A_{j_1j_2}+\frac{1}{2}\sum_{\substack{j_3=1\\ j_3\neq j_2}}^{q}\big(|c_{j_1j_3}|(|A_{j_3j_2}|+|A_{j_1j_2}|)\big)$$

$$+|c_{j_1j_2}|\sum_{\substack{j_3,j_4=1\\ j_3\neq j_4; j_3,j_4\neq j_2}}^{L}d_{j_2j_2j_3j_4}+\sigma^{(1)}_{j_1j_2}+\sigma^{(2)}_{j_1j_2}\big),$$

$$\text{где } \sigma_j=\sum_{\substack{j_1=1\\ j_1\neq j}}^{L}\Big(c_{jj}\sum_{\substack{j_2=1\\ j_2\neq j}}^{L}d_{jj_1j_2}+|c_{jj_1}|\sum_{\substack{j_2=1\\ j_2\neq j_1}}^{q}d_{j_1jj_2j_2}+\sum_{j_2=1}^{q}\big(|c_{jj_2}|(d_{jj_1}+\tilde d_{jj_1})$$

$$+|c_{j_1j_2}|d_{j_1jj}\big)\Big) \text{ при } j=\overline{1,L},\ \ \sigma_j=0,\ \text{ при } j=\overline{L+1,q};$$

$$\sigma^{(1)}_{j_1j_2}=|c_{j_1j_2}|\sum_{\substack{j_3,j_4=1\\ j_3,j_4\neq j_2}}^{L}d_{j_2j_3j_4}+\sum_{\substack{j_3=1\\ j_3\neq j_2}}^{L}|c_{j_1j_3}|(d_{j_3j_2}+\tilde d_{j_3j_2})$$

$$+\sum_{\substack{j_3=1\\ j_3\neq j_1,j_2}}^{L}\sum_{j_4\neq j_2}|c_{j_1j_3}|d_{j_3j_2j_4j_4} \text{ при } j_2=\overline{1,L},\ \ \sigma^{(1)}_{j_1j_2}=0 \text{ при } j_2=\overline{L+1,q};$$

$$\sigma^{(2)}_{j_1j_2}=\sum_{j_3\neq j_1,j_2}\sum_{j_4=1}^{L}|c_{j_3j_4}|d_{j_4j_1j_2}+\sum_{j_3=1}^{q}\Big(\sum_{\substack{j_4=1\\ j_4\neq j_1,j_2}}^{q}|c_{j_3j_4}|d_{j_4j_4j_1j_3}$$

$$+\sum_{\substack{j_4,j_5=1\\ j_5\neq j_3,j_4}}^{L}|c_{j_4j_5}|d_{j_4j_5j_1j_2}\Big) \text{ при } j_1,j_2=\overline{1,L},\ \ \sigma^{(2)}_{j_1j_2}=0 \text{ в ост. случаях};$$

$$d_\alpha=(a_\alpha^2+b_\alpha^2)^{1/2},\ \tilde d_\alpha=\big((a_\alpha+\tilde a_\alpha)^2+(b_\alpha-\tilde b_\alpha)^2\big)^{1/2},$$

a_α, b_α – *коэффициенты* F_{1s}, α – *соответствующий показатель.*

Доказательство. Для доказательства используется функция Ляпунова $V_1(r)=\sum_{j_1,j_2=1}^{q}c_{j_1j_2}r_{j_1}r_{j_2}$. Можно показать, что полная производная функции V_1 в силу системы (8) оценивается сверху выражением $W_1(\rho)$ с $\rho_s=r_s^2$, и, следовательно, является определенно отрицательной по r_s. Таким образом, инвариантное множество $\{(r,\theta){:}r{=}0\}$

системы (8) асимптотически устойчиво [1]. $\square$

Очевидно, что для выполнения условий теоремы 3.1 необходима отрицательность всех диагональных коэффициентов A_{ss}. В нерезонансном случае это условие действительно является необходимым для асимптотической устойчивости по формам третьего порядка. Отличительным свойством системы (8) с совпадающими частотами является то, что свойство асимптотической устойчивости может выполняться даже при с неотрицательными диагональными коэффициентами A_{ss}, при условии, что соответствующие резонансные коэффициенты достаточно велики по модулю. Однако, требование отрицательности диагональных коэффициентов A_{ss} для $s\in\overline{L+1,q}$ остается необходимым. В таких случаях, условия асимптотической устойчивости могут быть получены с помощью функций Ляпунова с периодическими по θ коэффициентами, как показывает следующая теорема.

Теорема 3.2. *Инвариантное множество* $\{(r,\theta){:}r{=}0\}$ *системы* (8) *асимптотически устойчиво, если существуют константы* $c_j > 0$, $c_{1j_1j_2}$, $c_{2j_1\alpha_2}$, *(*$c_{1j_1j_2}{=}c_{1j_2j_1}$, $c_{2j_1j_2}{=}{-}c_{2j_2j_1}$, $j{=}\overline{1,q}$, $j_1,j_2\in\mathcal{M}_l$, $l{=}\overline{1,L}$*), с которыми следующие условия выполнены для всех* $\rho_s\geq 0$, $s{=}\overline{1,q}$:

1. $$\sum_{j=1}^{q} c_j\rho_s^2-\sum_{s=1}^{L}\sum_{\substack{j_1,j_2\in\mathcal{M}_s\\ j_1\neq j_2}}\rho_{j_1}\rho_{j_2}\big(c_{1j_1j_2}^2+c_{2j_1j_2}^2\big)^{1/2}\geq 0;$$

2. $W_2(\rho)\leq 0$, *где* $W_2(\rho)$ *– следующая квадратичная форма:*

$$W_2(\rho){=}2\sum_{j=L+1}^{q} c_jA_{jj}\rho_j^2{+}2\sum_{\substack{j_1,j_2=1\\ j_1\neq j_2}}^{q} c_jA_{j_1j_2}\rho_{j_1}\rho_{j_2}{+}\sum_{j_1=1}^{L}\rho_{j_1}^2\Big(2c_{j_1}A_{j_1j_1}w_{1j_1j_2}$$
$$+\sum_{\substack{j_2=1\\ j_2\neq j_1}}^{L}\big({+}2(c_{1j_1j_2}a_{j_2j_1j_1j_1}{-}c_{2j_1j_2}b_{j_2j_1j_1j_1})\big)\Big){+}\sum_{\substack{j_1,j_2=1\\ j_1\neq j_2}}^{L}\rho_{j_1}\rho_{j_2}\big(2(c_{1j_1j_2}\tilde{a}_{j_1j_2}$$
$$+c_{2j_1j_2}\tilde{b}_{j_1j_2}){+}w_{2j_1j_2}\big){+}\sum_{j_1=1}^{q}\sum_{\substack{j_2,j_3=1\\ j_2\neq j_3;j_2,j_3\neq j_1}}^{L}\rho_{j_1}\rho_{j_2}\Big(2(c_{1j_2j_3}a_{j_3j_2j_1j_1}$$
$$-c_{2j_2j_3}b_{j_3j_2j_1j_1}){+}w_{1j_1j_2j_3}\Big){+}\frac{1}{2}\sum_{\substack{j_1,j_2,j_3\in 1\\ j_2,j_3\neq j_1}}^{L}\rho_{j_1}\rho_{j_3}w_{2j_1j_2j_3}.$$

(9)

Коэффициенты $w_{1j_1j_2}$, $w_{2j_1j_2}$, $w_{1j_1j_2j_3}$, $w_{2j_1j_2j_3}$ *приведены в приложении 2,* $\delta_{j_1j_2}$ *обозначает символ Кронекера,* $d_\alpha = (a_\alpha^2 + b_\alpha^2)^{1/2}$, $\tilde{d}_\alpha = (\tilde{a}_\alpha^2 + \tilde{b}_\alpha^2)^{1/2}$, *для всех индексов* α.

Доказательство. Можно показать, что при выполнении условий теоремы функция

$$V_1(r) = \sum_{j=1}^{q} c_j r_j^2 + \sum_{\substack{j_1,j_2=1\\ j_1\neq j_2}}^{L} r_{j_1} r_{j_2}\left(c_{1j_1j_2}\cos\theta_{j_1j_2} + c_{2j_1j_2}\sin\theta_{j_1j_2}\right) \tag{10}$$

является функцией Ляпунова для (8). Ее полная производная в силу системы (8) ограничена сверху функцией (9) с $\rho_j = r_j^2$. □

Заметим, что теорема 3.1 может рассматриваться как частный случай теоремы 3.2, поэтому в дальнейшем будем ссылаться на теорему 3.2 как на достаточные условия асимптотической устойчивости для системы (8).

4 Оценка скорости убывания решений

Пусть выполнены условия теоремы 3.2. Тогда можно показать, что для функции (10) существует $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, с которыми $V_1 \le \lambda_1 \|r\|^2$, $\dot{V}_1 \le -\lambda_2 \|r\|^4$. Отсюда, $\dot{V}_1 \le -\frac{\lambda_2}{\lambda_1^2} V_1^2$. С учетом членов старше третьего порядка, полная производная функции V_1 в силу системы (7) с начальными условиями из некоторой ε_2-окрестности нуля может быть оценена как $\dot{V}_1 \le -\frac{\lambda_2}{\lambda_1^2}(1-\delta_2)V_1^2, \quad \delta_2 \in (0,1),\ \|r\| \le \varepsilon_2$, Аналогично подходу, использовавшемуся в [13], вернемся к переменным (z, ζ) и запишем функцию Ляпунова для системы (3), используя лемму 2.1:

$$V(z,\zeta) = V_1(z) + V_2(\zeta), \tag{11}$$

где $V_1(z)$ представляет собой функцию (10) в переменных z, и

$$|V_1^{'}| \ge \frac{\lambda_2}{\lambda_1^2}(1-\delta_2)V_1^2 \text{ при } \|z\| \le \varepsilon_2, \tag{12}$$

а $V_2(\zeta)$ – положительно определенную квадратичную форму из леммы 2.1, и

$$\left|V_2^{'}\right| \ge \frac{C^2}{\mu_{max}} V_2, \tag{13}$$

Здесь $\mu_{\max} > 0$ является наибольшим собственным значением матрицы T. Неравенства (6), (12) и (13) дают оценку полной производной функции (11) в силу (3): $\dot{V} \le -(1-\delta_1)\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1^2}(1-\delta_2)V_1^2 + \frac{C^2}{\mu_{max}}V_2\right)$, или

$$\dot{V} \le -\lambda V^2 \text{ при } \|(z,\zeta)\| < \varepsilon_3, \tag{14}$$

где $\lambda = \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1^2}(1-\delta_1)(1-\delta_2)$, ε_3 определяется так, что $2V_1 + V_2 \le \mu_{\max}/\lambda$ при $\|(z,\zeta)\| < \varepsilon_3$. Решая соответствующее дифференциальное уравнение сравнения $\dot{V} = -\lambda V^2$, получаем

$$V \le \left(\lambda\,(t-t_0) + V_0^{-1}\right)^{-1}, \ \text{ при } t \ge t_0. \tag{15}$$

Переходя к переменной x в (11), получаем функцию Ляпунова для системы (1): $V = (Gx,x) + \widetilde{R}(x)$, где $\widetilde{R}(x) = O\left(\|x\|^3\right)$ при $x \to 0$, G является положительно определенной матрицей, и $g_{\min}\|x\|^2 \le (Gx,x) \le g_{\max}\|x\|^2$, где $g_{\min}$ и $g_{\max}$ – минимальное и максимальное собственные значения G. Отсюда, для любого $\tilde{\delta}\in(0,1)$ существует такое $\varepsilon_4>0$, что

$$V(x) \ge g_{\min}(1-\tilde{\delta})\|x\|^2,\ V_0 = V(x_0) \le g_{\max}(1+\tilde{\delta})\|x_0\|^2, \ \text{ при } \|x_0\| \le \varepsilon_4.$$

Из этих неравенств и (15) следует следующее утверждение.

Теорема 4.1. *Пусть выполнены условия теоремы 3.2. Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что для всех решений системы (1) с начальными условиями $\|x_0\| < \varepsilon$ справедлива оценка*

$$\|x(t)\| \le \left(\gamma_1(t-t_0) + \gamma_2\|x_0\|^{-2}\right)^{-1/2},\ t \ge t_0, \tag{16}$$

где γ_1 и γ_2 положительные постоянные.

Отметим, что, по построению, $\gamma_1 = (1-\tilde{\delta})\lambda g_{\min}$, $\gamma_2 = \frac{g_{\min}(1-\tilde{\delta})}{g_{\max}(1+\tilde{\delta})}$.

5 Пример: оценка скорости затухания колебаний маятниковой системы с частичной диссипацией

В качестве примера рассмотрим механическую систему, представляющую собой два двойных маятника, соединенных горизонтальным стержнем и подвешенных на пружине массы m_0 (рис. 1). Каждый маятник состоит из двух невесомых стержней, соединенных шарнирами массой $m_{1,1}$ и $m_{1,2}$ каждый. Стержни могут колебаться в вертикальной плоскости, верхняя пружина может совершать только строго вертикальные колебания, трение в шарнирах и сопротивление воздуха не учитываются. К нижним стержням маятников с помощью пружин прикреплены точечные массы $m_{2,1}$ и $m_{2,2}$, на которые действуют силы вязкого трения, пропорциональные относительным скоростям их движений. Пусть κ, κ_1, κ_2 обозначают коэффициенты трения пружин, φ_1, φ_2, ψ_1, ψ_2 – углы между стержнями и вертикалью, z, z_1, z_2 – длины пружин, ν_1, ν_2 – коэффициенты вязкого трения нижних пружин, как отмечено на рисунке. Тогда уравнения Лагранжа второго рода для рассматриваемой системы имеют вид:

$$
\begin{aligned}
&l_i\ddot{\varphi}_i-\ddot{z}\varphi_i+\frac{m_{2,i}}{m_{1,i}+m_{2,i}}\Big(z_i\ddot{\psi}_i\cos(\psi_i-\varphi_i)+\ddot{z}_i\sin(\psi_i-\varphi_i)\\
&+\dot{\psi}_i\big(2\dot{z}_i\cos(\psi_i-\varphi_i)-z_i\dot{\psi}_i\sin(\psi_i-\varphi_i)\big)\Big)+g\sin\varphi_i=0,\\
&z_i\ddot{\psi}_i+l_i\ddot{\varphi}_i\cos(\psi_i-\varphi_i)-\ddot{z}\sin\varphi_i+2\dot{z}_i\psi_i+l_i\dot{\varphi}_i^2+g\sin\psi_i=0,\\
&M\ddot{z}-\sum_{i=1}^{2}\Big((m_{1,i}+m_{2,i})l_i\ddot{\varphi}_i+m_{2,i}\big(z_i\ddot{\psi}_i\sin\psi_i-\ddot{z}_i\cos\psi_i+2\dot{z}_i\dot{\psi}_i\sin\psi_i\big)\\
&+(m_{1,i}+m_{2,i})l_i\dot{\varphi}_i^2\cos\varphi_i+m_{2,i}z_i\dot{\psi}_i^2\cos\psi_i\Big)+\varkappa z-Mg=0,\\
&\ddot{z}_i+l_i\ddot{\varphi}_i\sin(\psi_i-\varphi_i)+\ddot{z}\cos\psi_i-z_i\dot{\psi}_i^2-z_i\dot{\varphi}_i^2\cos(\psi_i-\varphi_i)-g\cos(\psi_i-\varphi_i)\\
&+\frac{\varkappa_i}{m_{2,i}}z=-\frac{\nu_i}{m_{2,i}}\dot{z}_i,\ i=1,2,
\end{aligned}
$$

где g – ускорение свободного падения, $M{=}m_0{+}\sum_{i,j=1}^{2}m_{i,j}$. Разрешим уравнения Лагранжа относительно старших производных и разложим полученные выражения в ряд Тейлора в окрестности нижнего положения равновесия системы, $\varphi_1{=}\varphi_2{=}\psi_1{=}\psi_2{=}0$, $z_1{=}\frac{m_{2,1}g}{\kappa_1}$, $z_2{=}\frac{m_{2,2}g}{\kappa_2}$, $z{=}\frac{m_0 g}{\kappa}$. Далее, вводя переменные $x_1{=}\varphi_1$, $x_2{=}\varphi_2$, $x_3{=}\psi_1$, $x_4{=}\psi_2$, $x_5{=}z_1{-}\frac{m_{2,1}g}{\kappa_1}$, $x_6{=}z_2{-}\frac{m_{2,2}g}{\kappa_2}$, $x_7{=}z{-}\frac{Mg}{\kappa}$, $x_8{=}\dot{\varphi}_1$, $x_9{=}\dot{\varphi}_2$, $x_{10}{=}\dot{\psi}_1$, $x_{11}{=}\dot{\psi}_2$, $x_{12}{=}\dot{z}$, $x_{13}{=}\dot{z}_1$, $x_{14}{=}\dot{z}_2$ и полагая $m_{1,1}{=}m_{1,2}{=}m_{2,1}{=}m_{2,2}{=}m$, $\kappa_1{=}\kappa_2{=}\varkappa$, получим уравнения возмущенного движения вида

$$
\begin{aligned}
&\dot{x}_1{=}x_8,\ \dot{x}_2{=}x_9,\ \dot{x}_3{=}x_{10},\ \dot{x}_4{=}x_{11},\ \dot{x}_5{=}x_{12},\ \dot{x}_6{=}x_{13},\ \dot{x}_7{=}x_{14},\\
&\dot{x}_8=-g(2x_1-x_3)/l+X_1(x),\ \dot{x}_9=-g(2x_2-x_4)/l+X_2(x),\\
&\dot{x}_{10}{=}2\varkappa(x_1-x_3)/m+X_3(x),\ \dot{x}_{11}=2\varkappa(x_2-x_4)/m+X_4(x),\\
&\dot{x}_{12}{=}-\frac{1}{m_0+2m}\big(\varkappa(x_5-x_6+x_7)+\nu_1x_{13}+\nu_2x_{14}\big)+X_5(x),
\end{aligned}
\tag{17}
$$

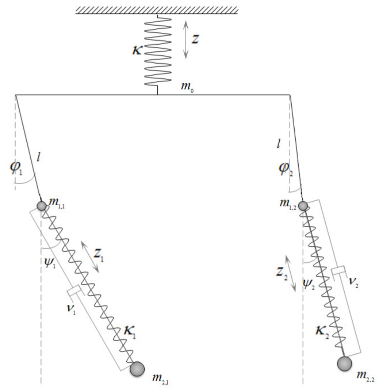

Рис 1. Маятниковая система с частичной диссипацией

$$\dot{x}_{13}=\frac{1}{m_0+2m}\big(\varkappa(x_5-(m_0+4m)x_6-x_7)-\nu_1(m_0+3m)x_{13}-\nu_2x_{14}\big)+X_6(x),$$
$$\dot{x}_{14}=\frac{1}{m_0+2m}\big(\varkappa(x_5-x_6-(m_0+4m)x_7)-\nu_1x_{13}-\nu_2(m_0+3m)x_{14}\big)+X_7(x),$$

где $X_s(x)$, $s=\overline{1,7}$, не содержат членов ниже второго порядка. Матрица линейного приближения системы (17) имеет две пары совпадающих чисто мнимых собственных значений $\pm i\omega_1=\pm i\omega_2$, $\pm i\omega_3=\pm i\omega_4$, $\omega_{1,3}=\sqrt{\frac{\varkappa l+mg\pm\sqrt{\varkappa^2l^2+m^2g^2}}{ml}}$, и три пары собственных значений с отрицательными вещественными частями. Отметим, что в данном примере имеется два множества совпадающих частот, что иллюстрирует возможность распространения полученных результатов на общие классы систем с несколькими группами кратных частот. Применяя принцип сведения и метод нормальных форм, как было описано ранее, выделяем устойчивую линейную подсистему вида (5) и модельную подсистему вида (8). Для простоты, запишем только уравнения для $\dot{r}$, используя упрощенные обозначения коэффициентов:

$$\begin{aligned}
&\dot{r}_1=A_1r_1^3+A_{13}r_1r_3^2+r_1r_2^2\big(a_{12}\cos 2\theta_{12}+b_{12}\sin 2\theta_{12}\big)+r_2r_3r_4\big(a_{13}\cos(\theta_{12}\\
&-\theta_{34})+b_{13}\sin(\theta_{12}-\theta_{34})+a_{14}\cos(\theta_{12}+\theta_{34})+b_{14}\sin(\theta_{12}+\theta_{34})\big),\\
&\dot{r}_2=A_2r_2^3+A_{24}r_2r_4^2+r_1^2r_2\big(a_{22}\cos 2\theta_{12}-b_{22}\sin 2\theta_{12}\big)+r_1r_3r_4\big(a_{23}\cos(\theta_{12}\\
&+\theta_{34})-b_{23}\sin(\theta_{12}+\theta_{34})+a_{24}\cos(\theta_{12}-\theta_{34})-b_{24}\sin(\theta_{12}-\theta_{34})\big),
\end{aligned}\qquad(18)$$

$$\dot r_3{=}A_3r_3^3{+}A_{31}r_1^2r_3{+}r_3r_4^2\big(a_{32}\cos 2\theta_{34}{+}b_{32}\sin 2\theta_{34}\big){+}r_1r_2r_4\big(a_{33}\cos(\theta_{12}$$
$$-\theta_{34}){-}b_{33}\sin(\theta_{12}{-}\theta_{34}){+}a_{34}\cos(\theta_{12}{+}\theta_{34}){+}b_{34}\sin(\theta_{12}{+}\theta_{34})\big),$$
$$\dot r_4{=}A_4r_4^3{+}A_{42}r_2^2r_4{+}r_3^2r_4\big(a_{42}\cos 2\theta_{34}{-}b_{42}\sin 2\theta_{34}\big){+}r_1r_2r_3\big(a_{43}\cos(\theta_{12}$$
$$+\theta_{34}){-}b_{43}\sin(\theta_{12}{+}\theta_{34}){+}a_{44}\cos(\theta_{12}{-}\theta_{34}){+}b_{44}\sin(\theta_{12}{+}\theta_{44})\big).$$

Примем следующие значения механических параметров системы:

$$m{=}0.5\text{ кг},\ m_0{=}5\text{ кг},\ \varkappa{=}2\kappa{=}2\text{ Н/м},\ l{=}1\text{ м},\ \nu_1{=}\nu_2{=}1\text{ кг/с}. \qquad (19)$$

Вычислим коэффициенты системы (18):

$$A_1{=}A_2{\approx}{-}0.0018, A_3{=}A_4\approx -0.0115, A_{13}{=}A_{24}{\approx}0.0015,$$
$$A_{31}{=}A_{42}{\approx}{-}0.0037, a_{12}{=}a_{22}{\approx}0.0006, b_{12}{=}b_{22}{\approx}0.0001,$$
$$a_{32}{=}a_{42}{\approx}0.0007, b_{32}{=}b_{42}{\approx}{-}0.0026, a_{13}{=}a_{24}{\approx}0.0011,$$
$$a_{23}{=}a_{14}{\approx}{-}0.00002, a_{33}{=}a_{44}{\approx}{-}0.0011, a_{43}{=}a_{34}{\approx}{-}0.0001,$$
$$b_{13}{=}b_{24}\approx 0.0007, b_{23}{=}b_{14}{\approx}{-}0.0001, b_{33}{=}b_{44}{\approx}0.0006, b_{43}{=}b_{34}{\approx}0.0001.$$

Инвариантное множество $\{(r,\theta){:}r{=}0\}$ системы (18) при выбранных значениях механических параметров асимптотически устойчиво, что доказывается с использованием функции Ляпунова $V_1(r) = r_1^2 + r_2^2$, для которой $\dot V_1(r) \le -\lambda_2 V_1$, с $\lambda_2 \approx 0.0011$. Функцию Ляпунова $V_2(\zeta)$ берем в виде $V_2(\zeta){=}(T\zeta,\zeta){=}\sum_{j,k=1}^{6}\tau_{jk}\zeta_j\zeta_k$, где $T{=}(\tau_{jk})_{j,k=1}^{6}$ – положительно определенная матрица, и $V_2'{=}-\sum\limits_{j=1}^{6}\zeta_j^2$. Тогда функция Ляпунова для (17) имеет $V(x) = (Gx,x) + \widetilde R(x)$, где

$$(Gx,x){=}\sum_{i=1,3}\omega_i^2\sum_{j=1,2}\Big(x_j^2{+}\frac{(2mg{-}\omega_i^2ml)x_{j+2}}{2\varkappa l}\Big){+}\sum_{i=1,3}\sum_{j=8,9}\Big(x_j^2$$
$$+\frac{(2mg{-}\omega_i^2ml)x_{j+2}}{2\varkappa l}\Big){+}\sum_{j=1}^{3}x_{j+4}\big(\sum_{k=1}^{3}\tau_{jk}x_{k+2}{+}\sum_{k=8}^{10}\tau_{jk}x_{k+4}\big)$$
$$+\sum_{j=8}^{10}x_{j+4}\big(\sum_{k=1}^{3}\tau_{jk}x_{k+4}{+}\sum_{k=8}^{10}\tau_{jk}x_{k+4}\big),$$

а $\widetilde R(\xi,\eta,w)$ не содержит членов ниже третьего порядка. По теореме 4.1, существует такое $\varepsilon > 0$, что для всех решений $x(t)$ системы (17) с начальными условиями $\|x(0)\| < \varepsilon$ справедлива степенная асимптотика $\|x(t)\| \sim (\gamma_1 t)^{-1/2}$, $t \ge t_0$. Используя значение λ_2 и оценивая сверху $\|x\|^2$ через $V(x)$, получаем $\gamma_1 \approx 0.0016$.

6 Выводы

В данной работе рассмотрена нелинейная система, матрица линейного приближения которой имеет чисто мнимые собственные значения, связанные резонансным соотношением второго порядка. В отличие от известных результатов в этой области, в статье рассмотрен более общий случай *нескольких равных между собой частот.* Для такого класса систем явно построены модельная система и функция Ляпунова, получены достаточные условия асимптотической устойчивости и проведен анализ асимптотического поведения решений системы. Показано, что в случае диагонализируемой матрицы линейного приближения, решения системы убывают как $O(t^{-1/2})$. Отметим, что в работе сделано предположение о диагонализируемости матрицы линейного приближения, и рассмотрен случай *одной* группы совпадающих частот, что позволяет получить более тонкие условия асимптотической устойчивости. Предполагается, что наличие жордановых клеток приведет к более низкой скорости убывания решения, что является одним из направления для дальнейших исследований асимптотического поведения траекторий нелинейных систем в критических случаях. Другим возможным направлением является распространение полученных результатов на более общий класс систем с несколькими группами совпадающих частот. Для частного случая, такое исследование было проведено в этой статье на примере маятниковой системы с частичной диссипацией.

Приложение 1. Функции F_{1j}, F_{2j}

$$F_{1\alpha}=r_\alpha^2\sum_{\substack{j=1\\ j\neq\alpha}}^{L} r_j\left(a_{\alpha j}\cos\theta_{\alpha_j}+b_{\alpha j}\sin\theta_{\alpha j}\right)+r_\alpha\sum_{\substack{j_1,j_2=1\\ j_1,j_2\neq\alpha}}^{L} r_{j_1}r_{j_2}\Big(a_{\alpha j_1 j_2}\cos(\theta_{\alpha j_1}+\theta_{\alpha j_2})$$

$$+b_{\alpha j_1 j_2}\sin\left(\theta_{\alpha j_1}+\theta_{\alpha j_2}\right)\Big)+r_\alpha\sum_{\substack{j_1,j_2=1\\ j_1\neq j_2;j_1,j_2\neq\alpha}}^{L} r_{j_1}r_{j_2}\Big(a_{\alpha\alpha j_1 j_2}\cos\theta_{j_1 j_2}-b_{\alpha\alpha j_1 j_2}$$

$$\times\sin\theta_{j_1 j_2}\Big)+\sum_{\substack{j_1,j_2,j_3=1\\ j_1,j_2,j_3\neq\alpha;j_2\neq j_3}}^{L} r_{j_1}r_{j_2}r_{j_3}\Big(a_{\alpha j_1 j_2 j_3}\cos\left(\theta_{\alpha j_1}+\theta_{j_3 j_2}\right)+b_{\alpha j_1 j_2 j_3}$$

$$\times\sin\left(\theta_{\alpha j_1}+\theta_{j_3 j_2}\right)\Big)+\sum_{\substack{j_1=1\\ j_1\neq\alpha}}^{L}\sum_{j_2\neq\alpha} r_{j_1}r_{j_2}^2\Big(a_{\alpha j_1 j_2 j_2}\cos\theta_{\alpha j_1}+b_{\alpha j_1 j_2 j_2}\sin\theta_{\alpha j_1}\Big),$$

$$F_{2\alpha}=r_\alpha^2\sum_{\substack{j=1\\ j\neq\alpha}}^{L} r_j\Big(\tilde{b}_{\alpha j}\cos\theta_{\alpha_j}+\tilde{a}_{\alpha j}\sin\theta_{\alpha j}\Big)+r_\alpha\sum_{\substack{j_1,j_2=1\\ j_1,j_2\neq\alpha}}^{L} r_{j_1}r_{j_2}\Big(b_{\alpha j_1 j_2}\cos(\theta_{\alpha j_1}+\theta_{\alpha j_2})$$

$$-a_{\alpha j_1 j_2}\sin\left(\theta_{\alpha j_1}+\theta_{\alpha j_2}\right)\Big)+r_\alpha\sum_{\substack{j_1,j_2=1\\ j_1\neq j_2;j_1,j_2\neq\alpha}}^{L} r_{j_1}r_{j_2}\Big(b_{\alpha\alpha j_1 j_2}\cos\theta_{j_1 j_2}+a_{\alpha\alpha j_1 j_2}$$

$$\times\sin\theta_{j_1 j_2}\Big)+\sum_{\substack{j_1,j_2,j_3=1\\ j_1,j_2,j_3\neq\alpha;j_2\neq j_3}}^{L} r_{j_1}r_{j_2}r_{j_3}\Big(b_{\alpha j_1 j_2 j_3}\cos\left(\theta_{\alpha j_1}+\theta_{j_3 j_2}\right)-a_{\alpha j_1 j_2 j_3}$$

$$\times\sin\left(\theta_{\alpha j_1}+\theta_{j_3 j_2}\right)\Big)+\sum_{\substack{j_1=1\\ j_1\neq\alpha}}^{L}\sum_{j_2\neq\alpha} r_{j_1}r_{j_2}^2\Big(b_{\alpha j_1 j_2 j_2}\cos\theta_{\alpha j_1}-a_{\alpha j_1 j_2 j_2}\sin\theta_{\alpha j_1}\Big),$$

$\alpha=\overline{1,L}$,

$$F_{1\beta}=r_\beta\sum_{\substack{j_1,j_2=1\\ j_1\neq j_2}}^{L} r_{j_1}r_{j_2}\left(a_{\beta\beta j_1 j_2}\cos\theta_{j_1 j_2}-b_{\beta\beta j_1 j_2}\sin\theta_{j_1 j_2}\right),$$

$$F_{2\beta}=r_\beta\sum_{\substack{j_1,j_2=1\\ j_1\neq j_2}}^{L} r_{j_1}r_{j_2}\left(b_{\beta\beta j_1 j_2}\cos\theta_{j_1 j_2}+a_{\beta\beta j_1 j_2}\sin\theta_{j_1 j_2}\right),\ \beta=\overline{L+1,q},$$

где $\theta_{jk}=\theta_j-\theta_k$, коэффициенты функций F_s являются вещественными постоянными, определяемыми параметрами системы (1).

Приложение 2. Коэффициенты функции (9).

$$w_{1j_1j_2}=c_{j_1}(d_{j_1j_2}+\tilde{d}_{j_1j_2})+c_{j_2}d_{j_2j_1j_1j_1}+\left(c^2_{1j_1j_2}+c^2_{2j_1j_2}\right)^{1/2}\Big(\left(A^2_{j_1j_1}+B^2_{j_1j_1}\right)^{1/2},$$

$$w_{1j_1j_2}=c_{j_1}(d_{j_1j_2}+\tilde{d}_{j_1j_2})+c_{j_2}d_{j_2j_1j_1j_1}+\left(c^2_{1j_1j_2}+c^2_{2j_1j_2}\right)^{1/2}\Big(\left(A^2_{j_1j_1}+B^2_{j_1j_1}\right)^{1/2}$$

$$+\left(A^2_{j_2j_1}+B^2_{j_2j_1}\right)^{1/2}+\sum_{\substack{j_3=1\\ j_3\neq j_2}}^{L}\frac{d_{j_2j_1j_3}+d_{j_2j_3j_1}}{2}\Big)+\sum_{\substack{j_3=1\\ j_3\neq j_1,j_2}}^{L}\Big(\frac{c_{j_2}}{2}\left(d_{j_2j_1j_1j_3}+d_{j_2j_1j_3j_1}\right)$$

$$+\left(c^2_{1j_1j_2}+c^2_{2j_1j_2}\right)^{1/2}d_{j_1j_3j_2j_2}+\left(c^2_{1j_2j_3}+c^2_{2j_2j_3}\right)^{1/2}d_{j_2j_1j_1j_1}+\sum_{\substack{j_4=1\\ j_4\neq j_1,j_2}}^{L}\big((c^2_{1j_1j_2}$$

$$+c^2_{2j_1j_2})^{1/2}\big(d_{j_2j_3j_1j_4}+d_{j_2j_3j_4j_1}\big)+(c^2_{1j_2j_3}+c^2_{2j_2j_3})^{1/2}\big(d_{j_2j_1j_1j_4}+d_{j_2j_1j_4j_1})\big)\Big),$$

$$w_{2j_1j_2}=c_{j_1}(d_{j_1j_2}+\tilde{d}_{j_1j_2}+d_{j_1j_2j_2j_2})+2\big(c^2_{1j_1j_2}+c^2_{2j_1j_2}\big)^{1/2}d_{j_1j_2}+\sum_{\substack{j_3=1\\ j_3\neq j_1}}^{L}\big(c_{j_1}$$

$$+\frac{1}{2}(c^2_{1j_1j_2}+c^2_{2j_1j_2})^{1/2}\big)(d_{j_1j_2j_3}+d_{j_1j_3j_2})+\sum_{\substack{j_3=1\\ j_3\neq j_1,j_2}}^{L}\Big(\frac{c_{j_1}}{2}\big(d_{j_1j_2j_2j_3}+d_{j_1j_2j_3j_2}$$

$$+d_{j_1j_3j_2j_3}+d_{j_1j_3j_3j_2}\big)+\big(c^2_{1j_1j_2}+c^2_{2j_1j_2}\big)^{1/2}(d_{j_1j_3}+\tilde{d}_{j_1j_3})+\big(c^2_{1j_1j_3}+c^2_{2j_1j_3}\big)^{1/2}$$

$$\times(d_{j_1j_2}+\tilde{d}_{j_1j_2})+\sum_{\substack{j_4=1\\ j_4\neq j_1,j_3}}^{L}\frac{\big(c^2_{1j_1j_3}+c^2_{2j_1j_3}\big)^{1/2}}{2}(d_{j_1j_2j_4}+d_{j_1j_4j_2}+d_{j_3j_2j_4}+d_{j_3j_4j_2})\Big),$$

$$w_{1j_1j_2j_3}=c_{j_1}\big(d_{j_1j_1j_2j_3}+d_{j_1j_1j_3j_2}\big)+\big(c^2_{j_2}+c^2_{j_3}\big)^{1/2}(d_{j_2j_3j_1j_1}+d_{j_3j_2j_1j_1})$$

$$+2\big(c^2_{1j_2j_3}+c^2_{2j_2j_3}\big)^{1/2}\big(A^2_{j_3j_1}+B^2_{j_3j_1}\big)^{1/2}+\sum_{\substack{j_4=1\\ j_4\neq j_2,j_3}}^{L}\Big(\big(c^2_{1j_2j_3}+c^2_{2j_2j_3}\big)^{1/2}d_{j_3j_4j_1j_1}$$

$$+\big(c^2_{1j_3j_4}+c^2_{2j_3j_4}\big)^{1/2}d^2_{j_3j_2j_1j_1}\Big),$$

$$w_{2j_1j_2j_3}=\sum_{\substack{j_4=1\\ j_4\neq j_1}}^{L}\Big((1-\delta_{j_2j_3})(1-\delta_{j_2j_4})\big(c_{j_1}(d_{j_1j_2j_3j_4}+d_{j_1j_2j_4j_3}+d_{j_2j_1j_3j_4}$$

$$+d_{j_2j_1j_4j_3})\big)+\big((c^2_{1j_1j_2}+c^2_{2j_1j_2})^{1/2}(d_{j_1j_1j_3j_4}+d_{j_1j_1j_4j_3}+d_{j_2j_2j_3j_4}+d_{j_2j_2j_4j_2})+$$

$$\sum_{\substack{j_5=1\\ j_5\neq j_1,j_2}}^{q}\big((c^2_{1j_1j_2}+c^2_{2j_1j_2})^{1/2}(d_{j_2j_5j_3j_4}+d_{j_2j_5j_4j_3})+(c^2_{1j_2j_5}+c^2_{2j_2j_5})^{1/2}(d_{j_2j_1j_3j_4}$$

$$+d_{j_2j_1j_4j_3}))\big)\Big).$$

[1] *Воротников В. И., Румянцев В. В.* Основы теории частичной устойчивости и управления. – Нижний Тагил : НТИ (филиал) УрФУ, 2014. – 304 с.

[2] *Грушковская В. В., Зуев А. Л.* Асимптотические свойства траекторий нелинейной системы в случае резонанса четвертого порядка // Механика твердого тела. – 2013. – **43**. – С. 109–123.

[3] *Зубов В. И.* Методы А. М. Ляпунова и их применение. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1957. – 263 с.

[4] *Жавнерчик В. Э.* О неустойчивости при наличии нескольких резонансов // Прикладная математика и механика. – 1979. – **43**. – С. 970–974.

[5] *Каменков Г. В.* Устойчивость и колебания нелинейных систем. – М.: Наука, 1972. – 214 с.

[6] *Куницын А. Л., Маркеев А.П.* Устойчивость в резонансных случаях // Достижения науки и техники. Общая механика. – 1979. – **4**. – С. 58–139.

[7] *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. – М.: Физматгиз, 1959. – 212 с.

[8] *Красильников П. С.* Об алгебраических критериях асимптотической устойчивости при резонансе 1:1 // Прикладная математика и механика. – 1993. – **57**. – С. 5–11.

[9] *Молчанов А. М.* Разделение движений и асимптотические методы в теории нелинейных колебаний // Доклады АН СССР. – 1961. – **136**, 5. – С. 1030–1033.

[10] *Хазин Л. Г., Шноль Э. Э.* Устойчивость критических положений равновесия. – Пущино: ОНТИ НЦБИ АН СССР, 1985. – 218 с.

[11] *Grushkovskaya V.* Asymptotic behavior of solutions of nonlinear systems with multiple imaginary eigenvalues // PAMM - Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics. – 2016. – **16**, 1. – P. 271–272.

[12] *Grushkovskaya V.* Asymptotic decay of solutions to an essentially nonlinear system with two-frequency resonances // Applicable Analisys. – 2016. – **95**, 11. – P. 2501–2516.

[13] *Grushkovskaya V., Zuyev A.* Asymptotic behavior of solutions of a nonlinear system in the critical case of q pairs of purely imaginary eigenvalues// Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. – 2013. – **80**. – P. 156–178.

[14] *Fu J.-H.* Liapunov functions and stability criteria for nonlinear systems with multiple critical eigenvalues // Mathematics of Control, Signals and Systems. – 1994. – **7**, 3. – P. 255–278.

[15] *Peiffer K., Savchenko A. Ya.* On the asymptotic behavior of a passively stabilized system with one critical variable. // Rend. Acc. Sc. fis. mat. Napoli. – 2000. –**67**.– P. 157-168.

[16] *Vakakis A. F.* Fundamental and subharmonic resonances in a system with a '1-1' internal resonance // Nonlinear Dyn. – 1992. – **3**, 2. – P. 123-143.