

Оптимальні еліптичні маневри космічного апарату з сонячною електрореактивною рушійною системою

Б. М. Кіфоренко¹, Я. В. Ткаченко², І. Ю. Васильєв³

¹ *Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ;
bkifor@ukr.net*

² *Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ;
yaruslavvt@ukr.net*

³ *Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
Київ; igor_v@univ.kiev.ua*

The analysis of the optimal controls ensuring the minimization of the consumption of the working fluid of an electric propulsion (EP) of a spacecraft that makes a flight between close elliptical orbits is provided. When modeling the thrust of the EP, features of its generation in the plasma EPs and the volt-ampere characteristics of a solar battery are accounted for. In illustrative examples, the shadow effect on the efficiency of the EP operation was studied. It is shown that there are such relations of location and duration of the shadow arcs of the transfer trajectory, in which the shadow does not affect the quality of the optimal maneuver performance.

Проведено аналіз оптимальних керувань, які забезпечують мінімізацію витрати робочої речовини електрореактивного двигуна (ЕРД) космічного апарату, що здійснює переліт між близькими еліптичними орбітами. При моделюванні тяги ЕРД враховані особливості її генерування в плазмових ЕРД і вольт-амперна характеристика сонячної батареї. На конкретних прикладах досліджено вплив тіні на ефективність роботи ЕРД. Показано, що існують такі співвідношення розташування і тривалості тінювих дуг перехідної траєкторії, при яких тінь не впливає на якість виконання оптимального маневру.

Вступ

В останні роки при створенні космічних апаратів (КА) для дослідження Сонячної системи і навколоземного космічного простору використовуються електричні ракетні двигуни (ЕРД) [1,2]. Особливістю цих двигунів є можливість регулювання робочих процесів генерації тяги у широких межах. Ця особливість дозволила спеціалістам з теорії керування польотом досліджувати задачі механіки польоту з використанням математичної моделі так званого ідеально керованого двигуна, вважаючи величини тяги і потужності двигуна незалежними функціями керування [3]. Однак необхідність врахування особливостей регулювання реальних ЕРД стимулювало розробку удосконалених математичних моделей [4–6]. У цій роботі оцінка ефективності ЕРД з живленням від сонячної батареї буде проведена з урахуванням відсутності електропостачання при знаходженні КА з тіні. Рівняння руху центру мас апарату в навколопланетному просторі нелінійні, що суттєво ускладнює процедуру дослідження оптимального керування. Запропонований у роботах [6, 7] і використаний у цій роботі підхід до застосування під час аналізу спеціально розроблених математичних моделей оптимально керованих рушійних систем дає можливість одержувати аналітичні розв'язки рівнянь обчислення функцій керування при використанні принципу максимуму Л. С. Понтрягіна, що спрощує алгоритм інтегрування рівнянь оптимального руху центру мас КА.

1 Постановка задачі

Як відомо [8], тягу T реальних електрореактивних двигунів (ЕРД) та відповідну витрату робочої речовини q розраховують за формулами

$$T = \eta_b \mu i \sqrt{2U\eta(U)}, \quad q = \frac{\eta_b \mu^2}{\eta_c} i, \quad (1)$$

де U – величина електричної напруги, i – величина струму, η_b – відношення іонного струму, що безпосередньо генерує тягу, до сумарного струму (зазвичай приймається сталою), $\eta(U)$ – втрати напруги у реальних двигунах, $\mu = \sqrt{m_a/e}$ – залежить від типу робочої речовини (m_a – маса атома, e – заряд електрона), η_c – відношення анодної витрати до повної витрати робочої речовини ЕРД. Формули (1) використовують при формалізації математичної моделі ЕРД обмеженої

потужності $N = iU \leq N_{max}$ та обмеженої тяги $T \leq T_{max}$. Максимальні значення потужності N_{max} та тяги T_{max} залежать від вольт-амперної характеристики джерела енергії. Рівняння вольт-амперної характеристики сонячної батареї має вигляд [8]:

$$i = i_{kz} \left\{ 1 - \frac{U}{U_{xx}} \exp \left[\frac{U - U_{xx}}{U_* - U_{xx}} \ln \left(\frac{U_{xx}}{U_*} \left(1 - \frac{i_*}{i_{kz}} \right) \right) \right] \right\}, \quad (2)$$

де i_{kz} – струм короткого замикання, U_{xx} – напруга холостого ходу, U_* , i_* – напруга та струм при максимальній потужності сонячної батареї. У роботі [6] розроблена математична модель плазмового ЕРД як об'єкта керування і наведені необхідні для аналізу характеристики джерела потужності. Сформульована варіаційна задача про виконання заданого міжорбітального переходу космічним апаратом (КА) з мінімальною витратою робочого тіла ЕРД. Рух КА представлено у термінах механіки матеріальної точки змінної маси. Аналіз оптимального керування проведено з використанням принципу максимуму Л. С. Понтрягіна. Проведено звуження множини допустимих керувань до частини дуги вольт-амперної характеристики сонячної батареї від точки максимальної тяги до напруги холостого ходу. Однак, через нелінійну залежність тяги T від напруги U , або струму i (див. формули (1)–(2)) оптимальні програми $T(t)$, $U(t)$, $i(t)$ отримано виключно чисельними методами.

Формули (1)–(2) являють собою параметричний запис функціональної залежності $T(i)$. На множині допустимих керувань ця залежність з достатнім ступенем адекватності може бути апроксимована методом найменших квадратів поліномом другого порядку

$$\begin{aligned} T &= a_2 i^2 + a_1 i + a_0, \\ i &\in [0; i_{T_{max}}], \end{aligned} \quad (3)$$

де $i_{T_{max}}$ – значення струму при максимальній тязі. Такий підхід при використанні принципу максимуму Понтрягіна дає змогу отримати аналітичні формули для обчислення оптимальних керувань.

Розглянемо клас оптимальних динамічних маневрів КА, мета яких полягає у малій зміні оскулюючих параметрів еліптичної орбіти за час, що відповідає одному оберту навколо гравітаційного центра, причому вважатимемо, що деяка частина перехідної траєкторії знаходиться у тіні. За критерій оптимальності виберемо мінімум витрати робочої речовини ЕРД для виконання маневру. Рух КА моделюємо

рухом матеріальної точки, на яку діють гравітаційна сила та тяга ЕРД. Для опису руху КА введемо вектор $\vec{x} = [\vartheta, e, \omega, I, \Omega]$, компонентами якого є п'ять безрозмірних оскулюючих орбітальних параметрів: $\vartheta = \ln \sqrt{a(1-e^2)}$ (тут a – велика піввісь) – логарифм кутового моменту, e – ексцентриситет, ω – кутова відстань перицентра до вузла, I – кут нахилу площини орбіти, Ω – довгота висхідного вузла. Положення КА на орбіті визначатиметься величиною ексцентричної аномалії E . Тоді рівняння руху КА матимуть вигляд [9]

$$\frac{dx_j}{dt} = \exp \vartheta \sum_{k=1}^3 F_{jk} W c_k \delta_{sh}, \quad (4)$$

$$\frac{dE}{dt} = F_{60} + \exp \vartheta \sum_{k=1}^3 F_{6k} W c_k \delta_{sh}, \quad j = \overline{1, 5}, k = \overline{1, 3},$$

де $W = T/m$ – вектор реактивного прискорення (m – поточна маса КА), c_k – направляючі косинуси вектора тяги, δ_{sh} – функція, яка дорівнює 1 на освітлених частинах траєкторії та 0 на тінювих, а F_{jk} розраховуються за формулами

$$F_{11} = 0; \quad F_{12} = \frac{1 - e \cos E}{1 - e^2}; \quad F_{13} = 0;$$

$$F_{21} = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin E}{1 - e \cos E}; \quad F_{22} = \cos E + \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E}; \quad F_{23} = 0;$$

$$F_{31} = -\frac{\cos E - e}{e(1 - e \cos E)}; \quad F_{32} = \frac{2 - e^2 - e \cos E}{e\sqrt{1 - e^2}(1 - e \cos E)} \sin E;$$

$$F_{33} = -\cot I \left(\frac{\sin \omega}{1 - e^2} (\cos E - e) + \frac{\cos \omega}{\sqrt{1 - e^2}} \sin E \right); \quad (5)$$

$$F_{41} = F_{42} = 0; \quad F_{43} = \frac{\cos \omega}{1 - e^2} (\cos E - e) - \frac{\sin \omega}{\sqrt{1 - e^2}} \sin E;$$

$$F_{51} = F_{52} = 0; \quad F_{53} = F_{33} / \cos I;$$

$$F_{60} = \frac{(1 - e^2)^{3/2}}{\exp(3\vartheta)(1 - e \cos E)}; \quad F_{61} = \left(\frac{\cos E - e}{e(1 - e \cos E)} - 1 \right) \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}};$$

$$F_{62} = \frac{2 - e \cos E}{e(1 - e \cos E)}; \quad F_{63} = 0.$$

Співвідношення (4) – (5) та всі подальші співвідношення записані у безрозмірній формі: лінійний розмір віднесено до характерної величини r^* , час t віднесено до t^* – періоду обертання КЛА по круговій

орбіті радіусом r^* , розділеного на 2π , масу КА m – до початкової маси M_0 , тягу T – до гравітаційної сили, що діє на тіло масою M_0 на відстані r^* від гравітаційного центру, струм i – до струму в точці максимальної тяги $i_{T_{max}}$.

Позначимо значення фазового вектора на початку маневру $\vec{x}_0 = [\vartheta_0, e_0, \omega_0, I_0, \Omega_0]^T$. Нехай протягом оберту фазовий вектор отримає малий приріст $\vec{\Delta} = [\Delta\vartheta, \Delta e, \Delta\omega, \Delta I, \Delta\Omega]^T$. Враховуючи малість компонентів вектора $\vec{\Delta}$, малість реактивного прискорення W та малість витрати робочої речовини ЕРД протягом одного оберту, проведемо лінеаризацію рівнянь руху (4) і перейдемо від незалежної змінної t до незалежної змінної E . Тепер, приймаючи до уваги (1, 3–5), можемо записати математичну постановку задачі про переліт між близькими еліптичними орбітами за один оберт з мінімальною витратою робочої речовини ЕРД

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dE} &= -q_0 \widehat{F}_E(E, \vec{x}_0) i \delta_{sh}, \quad m(E_0) = m_0 = 1, \quad m_f \rightarrow \min, \\ \frac{dx_j}{dE} &= F_E(E, \vec{x}_0) \sum_{k=1}^3 F_{jk}(E, \vec{x}_0) \frac{T}{m_0} c_k \delta_{sh}, \\ \vec{x}(E_0) &= \vec{x}_0, \quad \vec{x}(E_0 + 2\pi) = \vec{x}_0 + \vec{\Delta}, \\ T &= a_2 i^2 + a_1 i + a_0, \\ i &\in [0; 1], \\ c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 &= 1, \end{aligned} \quad (6)$$

де $F(E) = \exp(\vartheta_0)/F_{60}(E, \vec{x}_0)$, $\widehat{F}_E = 1/F_{60}(E, \vec{x}_0)$, E_0 – початкове значення ексцентричної аномалії, а $m_f = m(E_0) - m(E_0 + 2\pi)$ – витрата робочої речовини ЕРД при виконанні маневру. У співвідношеннях (6) q_0 – це безрозмірний коефіцієнт, який обчислюється згідно з формулою (1) та введеними вище характерними величинами за формулою

$$q_0 = \frac{\eta_b \mu^2 i_{kz} t^*}{\eta_c M_0}.$$

2 Оптимальні керування

Задача (6) являє собою задачу оптимального керування з обмеженими керуваннями c_1, c_2, c_3 та i . Для знаходження її розв'язку використаємо принцип максимуму Понтрягіна. Гамільтоніан H задачі (6)

має вигляд

$$H = -\widehat{F}_E q_0 i \delta_{sh} + (a_2 i^2 + a_1 i + a_0) F_e \delta_{sh} [\lambda_1 F_{12} c_2 + \lambda_2 [F_{21} c_1 + F_{22} c_2] + \lambda_3 [F_{31} c_1 + F_{32} c_2 + F_{33} c_3] + \lambda_4 F_{43} c_3 + \lambda_5 F_{53} c_3], \quad (7)$$

де $\lambda_i, i = \overline{1, 5}$ — спряжені функції, які задовольняють рівняння

$$\frac{d\lambda_i}{dE} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}. \quad (8)$$

Завдяки тому, що праві частини рівнянь руху з (6) не залежать від фазових змінних, гамільтоніан (7) також не залежить від них. Отже, як випливає з (8), $\lambda_i, i = \overline{1, 5}$ являють собою константи, які визначаються з кінцевих умов задачі (6). Оптимальні керування $c_i, i = \overline{1, 3}$ знаходимо з умови максимуму функції H поверхні $c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1$ за допомогою методу множників Лагранжа

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{A_1}{A}, \quad c_2 = \frac{A_2}{A}, \quad c_3 = \frac{A_3}{A}, \\ A_1 &= \lambda_2 F_{21} + \lambda_3 F_{31}, \\ A_2 &= \lambda_1 F_{12} + \lambda_2 F_{22} + \lambda_3 F_{32}, \\ A_3 &= \lambda_3 F_{33} + \lambda_4 F_{43} + \lambda_5 F_{53}, \\ A &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Оптимальний струм i , що задовольняє умову максимуму гамільтоніана (7), з врахуванням співвідношень (9), обчислюється за формулою

$$i = \begin{cases} 0, & \tilde{i} < 0, \\ \tilde{i} \delta_{sh}, & 0 \leq \tilde{i} \leq 1, \\ \delta_{sh}, & \tilde{i} > 1, \end{cases} \quad (10)$$

$$\tilde{i} = \frac{q_0}{2a_2 \exp(\vartheta_0) A} - \frac{a_1}{2a_2}.$$

Формули (9 – 10) являють собою аналітичні вирази для оптимальних керувань задачі (6), в які входять невідомі сталі $\lambda_i, i = \overline{1, 5}$. Ці сталі визначаються чисельно для кожного конкретного маневру з відомим розподілом тіньових та освітлених дуг перехідної траєкторії (заданою функцією δ_{sh}) шляхом підстановки виразів (9 – 10) у праві частини фазових рівнянь з (6), подальшого їх інтегрування та задоволення кінцевих умов.

3 Результати розрахунків

При розрахунках прийнято наступні характеристики сонячної батареї [5], [8]: $i_{kz} = 675 \text{ A}$, $U_{xx} = 900 \text{ B}$, $U_* = 751.14 \text{ A}$, $i_* = 643.21 \text{ A}$. Робочою речовиною ЕРД вважаємо ксенон $\mu = 3.6887 \times 10^{-4}$. Коефіцієнти η_b та η_c дорівнюють $\eta_b = 0.75$ та $\eta_c = 0.9302$ [5]. Функція втрат $\eta(U)$ обчислюється за формулою [6]:

$$\eta(U) = 1 - \alpha_\eta \exp\left(-\beta_\eta \frac{U}{U_{xx}}\right),$$

де значення $\alpha_\eta = 0.2479$ та $\beta_\eta = 2.3427$ отримані методом найменших квадратів з експериментальних даних, наведених у роботі [5]. Початкову масу КА прийнято рівною 2000 кг, а характерний лінійний розмір r^* дорівнює 6678245 м (радіусу кругової орбіти висотою 300 км).

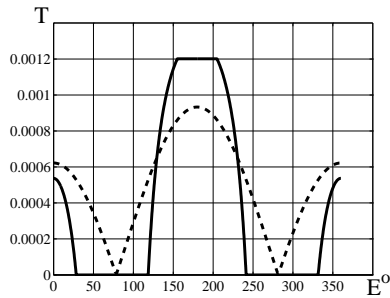


Рис. 1. Залежності $T(E)$ при зміні кута нахилу орбіти.

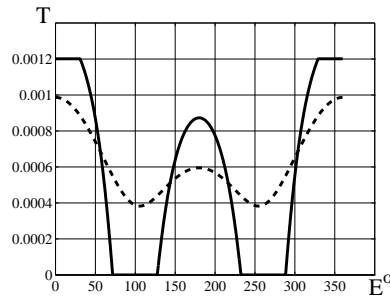


Рис. 2. Залежності $T(E)$ при зміні ексцентриситету орбіти.

На рис.1 суцільна лінія ілюструє оптимальну програму тяги ЕРД при виконанні маневру зміни кута нахилу на величину $\Delta_I = 0.2^\circ$ початкової еліптичної орбіти з параметрами: $a_0 = 1.1$, $e_0 = 0.2$, $\omega_0 = 0$, $I_0 = 49^\circ$, $\Omega_0 = 0$. На цьому ж рисунку штриховою лінією представлено програму оптимальної тяги, обчислену з використанням математичної моделі ідеально регульованого ЕРД. Як відомо [3], модель ідеально регульованого двигуна забезпечує вибір теоретично оптимального керування без пасивних дуг. Оптимальна ж програма тяги плазмового двигуна з вказаними вище параметрами крім дуг зі

змінною тягою включає також дуги сталої максимальної тяги та пасивні дуги. Криві на рис. 2 ілюструють оптимальні програми тяги при виконанні маневру зміни ексцентриситету початкової орбіти на величину $\Delta_e = 0.007$. Оптимальні програми тяги на рис. 1 та рис. 2 побудовані за умови відсутності затінення.

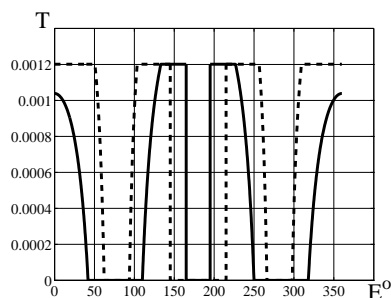


Рис. 3. Вплив затінення на оптимальну програму $T(E)$ при зміні кута нахилу орбіти.

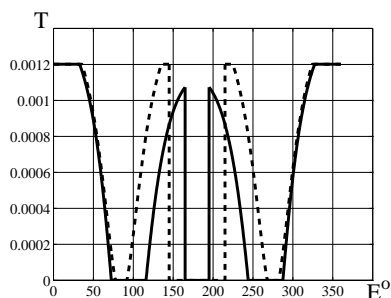


Рис. 4. Вплив затінення на оптимальну програму $T(E)$ при зміні ексцентриситету орбіти.

Криві на рис. 3 та рис. 4 ілюструють вплив тіні, розташованої на дузі $E \in [\pi - \Delta_{sh}/2; \pi + \Delta_{sh}/2]$, на оптимальні програми тяги при виконанні наведених вище маневрів (суцільна лінія – для $\Delta_{sh} = 30^\circ$, штрихова лінія – для $\Delta_{sh} = 70^\circ$). У таблиці 1 наведено витрати робочої речовини ЕРД, необхідної для виконання вказаних маневрів для ряду значень Δ_{sh} .

Кутова ширина тіні Δ_{sh}	Зміна кута нахилу $\Delta_I = 0.2^\circ$	Зміна ексцентриситету $\Delta_I = 0.007$
0°	1.5563 кг	1.8519 кг
15°	1.6673 кг	1.8834 кг
30°	1.8122 кг	1.9258 кг
50°	2.0676 кг	2.0028 кг
70°	2.4815 кг	2.1088 кг

Таблиця 1. Витрата маси робочої речовини ЕРД.

Як і слід було очікувати, зростання кутової ширини тіні призво-

дить до збільшення витрат робочого тіла ЕРД для виконання заданого маневру. Міра ж цього збільшення залежить від конкретного маневру і від розташування тіні вздовж перехідної траєкторії. Аналіз оптимальних програм керування тягою, наведених на рис. 1 та 2 вказує на можливі варіанти співвідношень розташування і куткової ширини тіні, коли вона буде повністю розташована на пасивних дугах траєкторії. У цьому випадку наявність тіні не впливатиме на ефективність роботи ЕРД при виконанні маневру. Зауважимо, що використання моделі ідеально регульованого двигуна для аналізу оптимального керування не дозволяє виявити цю особливість через відсутність пасивних дуг (див. штрихові криві на рис. 1 та 2).

Висновки

- Запропонована у даній роботі апроксимація залежності величини тяги ЕРД від підведеного струму поліномом другого порядку дозволяє одержувати аналітичні вирази оптимального керування при використанні принципу максимуму Л. С. Понтрягіна, що суттєво спрощує процедуру інтегрування рівнянь оптимального руху. При необхідності підвищення точності апроксимації порядок поліному може бути збільшений до трьох без втрати можливості отримання аналітичних виразів для оптимальних керувань.
- Використання математичної моделі ідеально регульованого двигуна не дозволяє виявляти та досліджувати такі варіанти розташування тіні, при яких наявність тіні не погіршує ефективності використання ЕРД.

- [1] *Зайцев А. Ю. и др.* Электрореактивный буксир для межорбитальной транспортировки космических аппаратов // Космична наука і технологія. — 2015. — 5. — С. 25–27.
- [2] *Масленников А. А.* О выборе мощности солнечных батарей геостационарных космических аппаратов связи с маршевой электроракетной двигательной установкой // Известия Российской академии наук. Энергетика. — 2007. — 3. — С. 96–101.
- [3] *Гродзовский Г. Л., Иванов Ю. Н., Токарев В. В.* Механика космического полета. Проблемы оптимизации. — М.: Наука, 1975. — 704 с.

-
- [4] *Шиняков Ю. А., Галайко В. Н., Волков М. П. и др.* Способы управления электрореактивными двигательными установками на базе стационарных плазменных двигателей, используемых в качестве маршевых и тяговых двигателей КА // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. — 2002. — 4, 1. — С. 150–155.
- [5] *Hofer R. R.* Development and Characterization of High-Efficiency, High-Specific Impulse Xenon Hall Thrusters: P.H.D. thesis / Richard Robert Hofer ; The University of Michigan. — Ann Arbor, 2004. — 358 p.
- [6] *Kiforenko B. N., Vasil'ev I. Y., Tkachenko Ya. V.* On the problem of optimal control of the thrust value of the electric propulsion rocket with solar energy source // Acta Astronautica. — 2013. — 89. — P. 121–125.
- [7] *Кіфоренко Б. Н.* Проблемы математического описания ракетных двигателей как объектов управления // Прикладная механика. — 2012. — 48, 5. — С. 138–145.
- [8] *Безручко К. В. и др.* Солнечные энергосистемы космических аппаратов. Физическое и математическое моделирование. — ХАИ, Харьков, 2000. — 515 с.
- [9] *Кіфоренко Б. Н., Пасечник З. В., Васильев И. Ю.* Усреднение уравнений движения в задаче оптимизации по быстродействию межорбитального перехода с постоянной по величине тягой в сильном центральном гравитационном поле // Проблемы управления и информатики. — 2001. — 6. — С. 62–76.