Збірник праць Інституту математики НАН України 2017, т. 14, № 2, 7–14

УДК 517.53

Узагальнені моментні зображення та апроксимації типу Паде деяких багатовимірних аналогів рядів Гумберта

А. П. Голуб, Л. О. Лисенко

Інститут математики НАН України, Київ; golub@imath.kiev.ua

By means of the method of the generalized moment representations, we construct the multidimensional Padé type approximants for some Humbert confluent hypergeometric series.

За допомогою методу узагальнених моментних представлень побудовано багатовимірні апроксиманти типу Паде для деяких вироджених гіпергеометричних рядів Гумберта.

С помощью метода обобщенных моментных представлений построены многомерные аппроксиманты типа Паде для некоторых вырожденных гипергеометрических рядов Гумберта.

Один з підходів до побудови апроксимант типу Паде функцій кількох змінних було запропоновано в [1]. Цей підхід ґрунтується на поширенні методу узагальнених моментних зображень В. К. Дзядика [2] на випадок багатовимірних числових послідовностей.

У [3] побудовано та досліджено апроксиманти типу Паде для деяких вироджених гіпергеометричних рядів Гумберта двох змінних. У даній статті вказані результати поширено на d–вимірний випадок.

Наведемо відповідне означення.

Означення 1. Узагальненим моментним зображенням d-вимірної числової послідовності $\{s_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^d}$ на добутку лінійних просторів $\mathscr{X}$ та $\mathscr{Y}$ за означеною на цьому добутку білінійною формою $\langle\cdot,\cdot\rangle$ називається сукупність рівностей

$$s_{\mathbf{k}+\mathbf{j}} = \langle x_{\mathbf{k}}, y_{\mathbf{j}}\rangle, \quad \mathbf{k},\mathbf{j}\in\mathbb{Z}_+^d, \tag{1}$$

де $\{x_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^d}\subset\mathscr{X}$, $\{y_{\mathbf{j}}\}_{\mathbf{j}\in\mathbb{Z}_+^d}\subset\mathscr{Y}$.

Розглянемо формальний степеневий ряд за d змінними

$$f(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^d} s_{\mathbf{k}}\mathbf{z}^{\mathbf{k}}, \tag{2}$$

де $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_d) \in \mathbb{C}^d, \mathbf{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}_+^d, \mathbf{z}^{\mathbf{k}} = z_1^{k_1} z_2^{k_2} \ldots z_d^{k_d}$.

Введемо для зручності ряд позначень.

Для $p = 0, 1, \ldots, d$ позначимо $\Omega_p = \big\{\omega \subseteq \{1, 2, \ldots, d\big\} : |\omega| = p\}$.

Елементи кожної з множин $\omega \in \Omega_p : \omega = \{l_1(\omega), l_2(\omega), \ldots, l_p(\omega)\}$ впорядкуємо так, що $1 \leqslant l_1(\omega) < l_2(\omega) < \ldots < l_p(\omega) \leqslant d$.

Те ж саме зробимо з елементами доповнення $\overline{\omega} = \{1, 2, \ldots, d\} \setminus \omega : \overline{\omega} = \{m_1(\omega), m_2(\omega), \ldots, m_{d-p}(\omega)\} \in \Omega_{d-p}$ так, що $1 \leqslant m_1(\omega) < m_2(\omega) < \ldots < m_{d-p}(\omega) \leqslant d$.

Для кожної множини $\omega \in \Omega_p, p = 1, \ldots, d$, введемо позначення

$$\boldsymbol{\delta}(\omega) = (\delta_1(\omega), \delta_2(\omega), \ldots, \delta_d(\omega)),$$

де

$$\delta_i(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{при } i \in \omega, \\ 1 & \text{при } i \notin \omega; \end{cases}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\omega) = (\varepsilon_1(\omega), \varepsilon_2(\omega), \ldots, \varepsilon_d(\omega)),$$

$$\varepsilon_i(\omega) = \begin{cases} -1 & \text{при } i \in \omega, \\ 1 & \text{при } i \notin \omega, \end{cases}$$

так що

$$\delta_i(\omega) = \frac{\varepsilon_i(\omega) + 1}{2}, i = 1, 2, \ldots, d.$$

Позначимо також $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{Z}_+^d, \mathbf{1} = (1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{Z}_+^d$, так що $\mathbf{1} = \boldsymbol{\delta}(\varnothing), \mathbf{0} = \boldsymbol{\delta}\big(\{1, 2, \ldots, d\}\big)$.

Для векторів $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{Z}_+^d$, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_d)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_d)$, через $\mathbf{a} \circ \mathbf{b}$ позначимо покоординатний добуток векторів $\mathbf{a}$ та $\mathbf{b} : \mathbf{a} \circ \mathbf{b} = (a_1 b_1, a_2 b_2, \ldots, a_d b_d)$.

Для кожного вектора $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}_+^d$:

$$\Delta(\mathbf{a}) = \big\{\mathbf{j} = (j_1, j_2, \ldots, j_d) \in \mathbb{Z}_+^d : j_i \in \{0, 1, \ldots, a_i\}, i = 1, 2, \ldots, d\big\}.$$

З врахуванням цих позначень в [1] встановлено результат, що дозволяє для рядів вигляду (2) з коефіцієнтами, для яких справедливі зображення вигляду (1), будувати їх d-вимірні апроксиманти типу Паде.

Розглянемо деяку неперервно диференційовну функцію $\Phi : \mathbb{R}_+^d \to \mathbb{R}$, яка має такі властивості:

1) множина $\mathscr{D}_\Phi = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^d | \Phi_{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) \leqslant 0\}$ — обмежена в $\mathbb{R}_+^d$;

2) потужність множини $\mathscr{D}_\Phi \bigcap \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}_+^d | x_i \geqslant N_i, i = 1, 2, \ldots, d\}$ дорівнює $\prod\limits_{i=1}^{d} (N_i + 1) - 1$;

3) для всіх $i = 1, 2, \ldots, d$ існують однозначно визначені функції

$$x_i = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_d)$$

для $(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_d) \in D_i := \{(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}_+^{d-1} | \exists x_i \in \mathbb{R}_+ : \Phi(\mathbf{x}) \leqslant 0\}$ такі, що

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_d), x_{i+1}, \ldots, x_d) \equiv 0;$$

4) при кожному $i = 1, 2, \ldots, d : \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_d) \geqslant N_i, \forall (x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_d) \in D_i$.

Теорема 1. *Нехай для коефіцієнтів формального степеневого ряду вигляду* (2) *справджується узагальнене моментне зображення вигляду* (1)*. Тоді якщо для деякого* $\mathbf{N} \in \mathbb{N}^d$ *існує узагальнений поліном*

$$Y_{\mathbf{N}} = \sum_{\mathbf{j} \in \Delta(\mathbf{N})} c_{\mathbf{j}}^{(\mathbf{N})} y_{\mathbf{j}}$$

такий, що $c_{\mathbf{N}}^{(\mathbf{N})} \neq 0$,*і при* $\mathbf{k} \in \{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^d : \mathbf{k} + \mathbf{N} \in \mathscr{D}_\Phi\}$ *виконуються умови біортогональності* $\langle x_{\mathbf{k}}, Y_{\mathbf{N}} \rangle = 0$*. Тоді раціональна функція*

$$[\mathscr{M}/\mathscr{N}]_f(\mathbf{z}) = \frac{P(\mathbf{z})}{\sum\limits_{\mathbf{j} \in \Delta(\mathbf{N})} c_{\mathbf{N}-\mathbf{j}}^{(\mathbf{N})} \mathbf{z}^{\mathbf{j}}},$$

де

$$P(\mathbf{z}) = \sum_{p=0}^{d-1} \sum_{\omega \in \Omega_p} \prod_{r=1}^{p} z_{l_r(\omega)}^{N_{l_r(\omega)}} \sum_{\substack{0 \leqslant k_{m_i(\omega)} \leqslant N_{m_i(\omega)} - 1, i = 1, 2, \ldots, d-p \\ \Phi(\mathbf{k}) \leqslant 0}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} \times$$

$$\times \sum_{\mathbf{j} \in \Delta(\boldsymbol{\delta}(\overline{\omega}) \circ \mathbf{N} + \boldsymbol{\delta}(\omega) \circ \mathbf{k})} c_{\boldsymbol{\delta}(\omega) \circ \mathbf{N} + \boldsymbol{\varepsilon}(\omega) \circ \mathbf{j}} s_{\mathbf{k} + \boldsymbol{\varepsilon}(\omega) \circ \mathbf{j}},$$

матиме розвинення у степеневий ряд, коефіцієнти якого збігатимуться з коефіцієнтами ряду (2) *для всіх* $\mathbf{k} \in \mathscr{D}_\Phi \cap \mathbb{Z}_+^d$, *а, отже, ця раціональна функція є* d*-вимірною апроксимантою типу Паде ряду* (2) *порядку* $[\mathscr{M}/\mathscr{N}]$, *де* $\mathscr{M} = \mathscr{D}_\Phi \cap \mathbb{Z}_+^d \setminus \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}_+^d : x_i \geqslant N_i, i = 1, 2, \ldots, d\}$, *а* $\mathscr{N} = \Delta(\mathbf{N})$.

Сформулюємо задачу в операторному вигляді. Припустимо, що лінійні простори $\mathscr{X}$ та $\mathscr{Y}$ є нормованими, білінійна форма $\langle\cdot,\cdot\rangle$ є нарізно неперервною, і у просторі $\mathscr{X}$ задано такі попарно комутуючі між собою обмежені лінійні оператори $A_i : \mathscr{X} \to \mathscr{X}, i = 1, 2, \ldots, d$, що

$$A_i x_{\mathbf{k}} = x_{\mathbf{k}+\mathbf{e}_i}, , i = 1, 2, \ldots, d,$$

для кожного $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^d$, де $\mathbf{e}_i = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) = \mathbf{1} - \boldsymbol{\delta}(\{i\})$, $i = 1, 2, \ldots, d$, а у просторі $\mathscr{Y}$ існують обмежені лінійні оператори $A_i^\star : \mathscr{Y} \to \mathscr{Y}$, $i = 1, 2, \ldots, d$, спряжені відповідно до операторів $A_i, i = 1, 2, \ldots, d$, відносно білінійної форми $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Тоді зображення (1) можна записати у вигляді

$$s_{\mathbf{k}} = \big\langle x_{\mathbf{k}}, y_{\mathbf{0}} \big\rangle = \Big\langle \prod_{i=1}^d A_i^{k_i} x_{\mathbf{0}}, y_{\mathbf{0}} \Big\rangle,\ \mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^d,$$

і ряд (2) буде збіжним в околі початку координат до аналітичної функції, що має зображення

$$f(\mathbf{z}) = \Big\langle \prod_{i=1}^d \mathcal{R}_{z_i}(A_i) x_{\mathbf{0}}, y_{\mathbf{0}} \Big\rangle,$$

де резольвентна функція оператора A має вигляд $\mathcal{R}_z(A) = (I - zA)^{-1}$.

У випадку, коли всі оператори $A_i, i = 1, 2, \ldots, d$ співпадають між собою, — $A = A_1 = A_2 = \ldots = A_d$, має місце наступний результат.

Лема 1. *Для функцій* $f(\mathbf{z}) = \Big\langle \prod\limits_{i=1}^d \mathcal{R}_{z_i}(A) x_{\mathbf{0}}, y_{\mathbf{0}} \Big\rangle$ *є справедливим зображення*

$$f(\mathbf{z}) = \frac{1}{\prod\limits_{s<t}(z_s - z_t)} \sum_{i=1}^d z_i^{d-1}(-1)^{i+1} \prod_{\substack{s<t \\ s,t\neq i}} (z_s - z_t) g(z_i), \tag{3}$$

де

$$g(z) = \langle \mathcal{R}_z(A) x_{\mathbf{0}}, y_{\mathbf{0}} \rangle .$$

Для деяких фіксованих $\alpha, \beta \in [0,1)$ розглянемо простори інтегровних на $[0,1]$ функцій

$$\mathcal{X}_\alpha = \Big\{x(t) : \sup_{t\in[0,1]} |x(t)\, t^\alpha| < \infty\Big\},$$

$$\mathcal{Y}_\beta = \Big\{y(t) : \sup_{t\in[0,1]} |y(t)(1-t)^\beta| < \infty\Big\},$$

з нормами

$$||x||_{\mathcal{X}_\alpha} = \sup_{t\in[0,1]} |x(t)\, t^\alpha|, ||y||_{\mathcal{Y}_\beta} = \sup_{t\in[0,1]} |y(t)(1-t)^\beta|.$$

Очевидно, що на добутку цих просторів можна задати білінійну форму

$$\langle x, y\rangle = \int\limits_0^1 x(\tau)y(\tau)d\tau,$$

що буде нарізно неперервною.

Розглянемо у просторі $\mathscr{X}$ оператор інтегрування

$$(A\varphi)(t) = \int\limits_0^t \varphi(\tau)d\tau.$$

Нескладно встановити (див. [4, с. 36]), що резольвентна функція цього оператора може бути зображена у вигляді

$$\left(\widehat{R_z}(A)\varphi\right)(t) = \varphi(t) + z\int\limits_0^t \varphi(\tau)e^{z(t-\tau)}d\tau.$$

Якщо покласти $x_{0,0}(t) = y_{0,0}(t) \equiv 1$, то отримаємо функцію вигляду (3) з $g(z) = \frac{1}{z}(e^z - 1)$.

Якщо ж

$$x_{0,0}(t) = \frac{t^\nu}{\Gamma(\nu+1)},\ \nu > -1,\ \ y_{0,0}(t) = \frac{(1-t)^\sigma}{\Gamma(\sigma+1)},\ \sigma > -1,$$

то отримаємо функцію вигляду (3) з

$$g(z) = \frac{\Gamma(\sigma+1)\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+\sigma+2)}\,{}_1F_1(1; \nu+\sigma+2; z). \tag{4}$$

Нехай $\mathbf{N} = (N, N, \ldots, N) \in \mathbb{N}^d$. Тоді для того, щоб побудувати за теоремою 1 d-вимірні апроксиманти типу Паде функції f вигляду (3) з $g(z)$ вигляду (4), необхідно побудувати поліноми

$$Y_{\mathbf{N}}(t) = \sum_{\mathbf{j} \in \Delta(\mathbf{N})} c_{\mathbf{j}}^{(\mathbf{N})} y_{\mathbf{j}},$$

для яких при $\mathbf{k} \in \Delta(\mathbf{N}) \setminus \{\mathbf{N}\}$ виконуються умови біортогональності

$$\int\limits_0^1 x_{\mathbf{k}} Y_{\mathbf{N}}(t) dt = 0. \tag{5}$$

У розглядуваному випадку

$$x_{\mathbf{k}}(t) = \frac{t^{|k|+\nu}}{\Gamma(|k|+\nu+1)}, y_{\mathbf{j}}(t) = \frac{(1-t)^{|j|+\sigma}}{\Gamma(|j|+\sigma+1)},$$

де $|k| = k_1 + k_2 + \ldots + k_d, |j| = j_1 + j_2 + \ldots + j_d$.

Тому

$$Y_{\mathbf{N}}(t) = \sum_{\mathbf{j} \in \boldsymbol{\Delta}(\mathbf{N})} c_{\mathbf{j}}^{(\mathbf{N})} \frac{(1-t)^{|j|+\sigma}}{\Gamma(|j|+\sigma+1)} = \gamma_N P_{dN}^{(\nu,\sigma)*}(t)(1-t)^{\sigma},$$

де $P_{dN}^{(\nu,\sigma)*}(t)$ — зсунутий ортонормований на $[0,1]$ з вагою $t^{\nu}(1-t)^{\sigma}$ многочлен Якобі степеня dN (див. [5, c. 580]), а γ_N — деяка константа, яку ми можемо, не обмежуючи загальності, покласти рівною 1.

Тоді

$$\sum_{\mathbf{j} \in \boldsymbol{\Delta}(\mathbf{N})} c_{\mathbf{j}}^{(\mathbf{N})} \frac{t^{|j|}}{\Gamma(|j|+\sigma+1)} = P_{dN}^{(\nu,\sigma)*}(1-t).$$

Враховуючи явний вираз для коефіцієнтів ортогональних многочленів Якобі (див. [5], c. 581), матимемо (константу для зручності знову покладемо рівною 1)

$$P_{dN}^{(\nu,\sigma)*}(1-t) = P_{dN}^{(\sigma,\nu)*}(t) = \sum_{m=0}^{dN} (-1)^m \binom{dN}{m} \frac{\Gamma(dN+\sigma+\nu+m+1)}{\Gamma(\sigma+m+1)} t^m.$$

Отже, нам потрібно вибрати коефіцієнти $c_{\mathbf{j}}^{(\mathbf{N})}$ так, щоб виконувались рівності

$$\sum_{\mathbf{j} \in \boldsymbol{\Delta}(\mathbf{N})} c_{\mathbf{j}}^{(\mathbf{N})} \frac{t^{|j|}}{\Gamma(|j|+\sigma+1)} = \sum_{m=0}^{dN} (-1)^m \binom{dN}{m} \frac{\Gamma(dN+\sigma+\nu+m+1)}{\Gamma(\sigma+m+1)} t^m,$$

або ж

$$\sum_{\substack{0\le j_1,\dots,j_d\le N\\ |j|=m}} c_{\mathbf{j}}^{(\mathbf{N})} = (-1)^m \binom{dN}{m}\Gamma(dN+\sigma+\nu+m+1).$$

З цієї рівності коефіцієнти $c_{\mathbf{j}}^{(\mathbf{N})}, j_1,\dots,j_d = \overline{0,N}$ можна визначити багатьма способами. Розглянемо наступний: будемо вважати, що на відрізках $\sum\limits_{j=1}^{d} j_i = p$, що лежать у d-вимірному кубі $[0,N]^d$ коефіцієнти пропорційні поліноміальним коефіцієнтам так, що

$$c_{\mathbf{j}}^{(\mathbf{N})} = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{|j|}\Gamma(dN+\sigma+\nu+|j|+1)}{2^{|j|}}\dbinom{|j|}{j_1,\dots,j_d}\dbinom{dN}{|j|} \\ \qquad\qquad \text{при } 0 \leqslant |j| \leqslant \frac{dN}{2}, \\ \dfrac{(-1)^{|j|}\Gamma(dN+\sigma+\nu+|j|+1)}{2^{dN-|j|}}\dbinom{dN-|j|}{N-j_1-\ldots-j_d}\dbinom{dN}{|j|} \\ \qquad\qquad \text{при } \frac{dN}{2}+1 \leqslant |j| \leqslant dN. \end{cases}$$

Зауважимо, що умова (5) буде виконуватися не лише для $\mathbf{k} \in \Delta(\mathbf{N}) \setminus \{\mathbf{N}\}$, а і для $\mathbf{k} \in \{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^d : |\mathbf{k}| \leqslant 2dN-1\}$, тому за функцію $\Phi(x_1,x_2,\dots,x_d)$, що фігурує у формулюванні теореми 1, потрібно взяти функцію $\Phi(x_1,x_2,\dots,x_d) = |\mathbf{x}|-2dN+1$. При цьому функції $\varphi_i : \mathbb{R}_+^{d-1} \to \mathbb{R}$ матимуть вигляд:

$$\varphi_i(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_d) = 2dN-1-x_1-\ldots-x_{i-1}-x_{i+1}-\ldots-x_d.$$

Встановлено такий допоміжний результат.

Лема 2. *Нехай* $N \in \mathbb{N}, 0 \leqslant j \leqslant dN$. *Тоді кількість векторів* $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^d$ *таких, що* $k_i \leqslant N, i = 1,2,\dots,d$, *та* $|\mathbf{k}| = j$, *дорівнює*

$$\gamma_j^{(N)} = \sum_{r=0}^{[\frac{j}{N+1}]} \binom{d}{r}(-1)^r \frac{(d+j-r(N+1)-1)!}{(d-1)!(j-r(N+1))!}.$$

З леми 2 випливає, що коефіцієнти $c_{\mathbf{j}}^{(\mathbf{N})}, \mathbf{j} \in \Delta(\mathbf{N})$, поліномів $Y_{\mathbf{N}}$ повинні вибиратися таким чином, щоб

$$c_{\mathbf{j}}^{(\mathbf{N})} = \frac{p_{|\mathbf{j}|}^{(dN)}}{\gamma_{|\mathbf{j}|}^{(N)}} = \frac{p_{|\mathbf{j}|}^{(dN)}}{\sum\limits_{r=0}^{[\frac{|\mathbf{j}|}{N+1}]} \binom{d}{r}(-1)^r \frac{\left(d+|\mathbf{j}|-r(N+1)-1\right)!}{(d-1)!\left(|\mathbf{j}|-r(N+1)\right)!}}. \tag{6}$$

На основі наведених міркувань з використанням теореми 1 отримаємо такий результат.

Теорема 2. *При кожному $N \in \mathbb{N}$ раціональна функція*

$$[\mathscr{M}/\mathscr{N}]_f(\mathbf{z}) = \frac{P(\mathbf{z})}{\sum\limits_{\mathbf{j}\in\Delta(\mathbf{N})} c_{\mathbf{N}-\mathbf{j}}^{(\mathbf{N})}\mathbf{z}^{\mathbf{j}}},$$

де

$$P(\mathbf{z}) = \sum_{p=0}^{d-1}\sum_{\omega\in\Omega_p}\prod_{r=1}^{p} z_{l_r(\omega)}^{N_{l_r(\omega)}} \sum_{\substack{0\leqslant k_{m_i(\omega)}\leqslant N-1, i=1,2,\ldots,d-p,\\ |\mathbf{k}|\leqslant 2dN-1}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}} \times$$

$$\times \sum_{\mathbf{j}\in\Delta(\boldsymbol{\delta}(\overline{\omega})\circ\mathbf{N}+\boldsymbol{\delta}(\omega)\circ\mathbf{k})} c_{\boldsymbol{\delta}(\omega)\circ\mathbf{N}+\boldsymbol{\varepsilon}(\omega)\circ\mathbf{j}}\, s_{d-p}{}_{\sum\limits_{i=1}^{} j_{m_i}+|\mathbf{k}|-\sum\limits_{i=1}^{p} j_{l_i}},$$

$\mathbf{N} = (N, N, \ldots, N)$, *коефіцієнти* $c_{\mathbf{j}}^{(\mathbf{N})}$ *обчислюються за формулами* (6), *а* $s_k = \dfrac{1}{\Gamma(|k|+\nu+\sigma+2)}$, *матиме розвинення у степеневий ряд, коефіцієнти якого збігатимуться з коефіцієнтами ряду Тейлора–Маклорена для функції* f *вигляду* (3) *для всіх* $\mathbf{k} \in \{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^d : |\mathbf{k}| \leqslant 2dN-1\}$, *а, отже, ця раціональна функція є* d*-вимірною апроксимантою типу Паде функції* (3) *порядку* $[\mathscr{M}/\mathscr{N}]$, *де* $\mathscr{M} = \{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^d : |\mathbf{k}| \leqslant 2dN-1\}$, *а* $\mathscr{N} = \Delta(\mathbf{N})$.

[1] *Голуб А. П., Чернецька Л. О.* Багатовимірні узагальнені моментні зображення та апроксимації типу Паде для функцій багатьох змінних // Укр. мат. журн. — 2014. — **66**, 9. — С. 1166 – 1174.

[2] *Дзядик В. К.* Про узагальнення проблеми моментів // Доп. АН УРСР. — 1981. — **6**. — С. 8 – 12.

[3] *Голуб А. П., Чернецька Л. О.* Двовимірні узагальнені моментні зображення та апроксимації Паде деяких рядів Гумберта // Укр. мат. журн. — 2013. — **65**, 10. — С. 1315 – 1331.

[4] *Голуб А. П.* Узагальнені моментні зображення та апроксимації Паде. — К.: Ін-т математики НАН України, 2002. — 222 с.

[5] *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами. — М.: Наука, 1979. — 832 с.