Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2017, т. 14, № 3, 354–363

УДК 517.5

Р. В. Товкач

Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк; rtovkach@ukr.net

Оцінка відхилення функцій від їх сум Фур'є

We investigate problems of estimating the deviation of functions from their Fourier sums in terms of the best approximation.

Отримано оцінку відхилення функцій від їх сум Фур'є у термінах найкращих наближень.

1. Визначення

Нехай $\mathbb{R}^d$ – d-мірний евклідовий простір з дійсними елементами $x = (x_1, \dots, x_d)$; $(x, y) = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$; $T^d = [0, 2\pi)^d$, а $L_p(T^d)$, $1 \le p \le \infty$ — простір вимірних 2π-періодичних по кожній змінній функцій $f(x)$, $x \in T^d$, зі скінченною нормою

$$\|f\|_{L_p(T^d)} = \|f\|_p = \left(\frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{T^d} |f(x)|^p dx \right)^{1/p},$$

$$1 \le p < \infty ,$$

$$\|f\|_\infty = \|f\|_{C(T^d)} = \|f\|_C = \max_{x \in T^d} |f(x)|.$$

Позначимо через $\square_n$ і $\diamond_n$ множини векторів:

$$\square_n = \{k = (k_1, \dots, k_d) : |k_j| \le n,\ k_j \in \mathbb{Z},$$
$$j = \overline{1, d}\},$$
$$\diamond_n = \{k = (k_1, \dots, k_d) :$$
$$|k| = |k_1| + \dots + |k_d| \le n,\ k_j \in \mathbb{Z},\ j = \overline{1, d}\},$$

а через $\Gamma_n^{\square}$ і $\Gamma_n^{\diamond}$ позначимо множини тригонометричних поліномів з гармоніками з $\square_n$ і $\diamond_n$, тобто

$$\Gamma_n^{\square} = \{t_n^{\square}(x) :\ t_n^{\square}(x) = \sum_{k \in \square_n} a_k e^{i(k,x)}, \quad a_k \in \mathbb{C}\},$$

$$\Gamma_n^{\diamond} = \{t_n^{\diamond}(x) :\ t_n^{\diamond}(x) = \sum_{k \in \diamond_n} a_k e^{i(k,x)}, \quad a_k \in \mathbb{C}\}.$$

Найкращим наближенням функцій $f \in L_p(T^d)$ в метриці $L_p(T^d)$ поліномами з $\Gamma_n^{\square}$ або $\Gamma_n^{\diamond}$ називають величини

$$E_n^{\square}(f)_p = \inf_{t_n^{\square} \in \Gamma_n^{\square}} \|f(x) - t_n^{\square}(x)\|_p,$$

$$E_n^{\diamond}(f)_p = \inf_{t_n^{\diamond} \in \Gamma_n^{\diamond}} \|f(x) - t_n^{\diamond}(x)\|_p.$$

Для $d = 1$

$$E_n(f)_p = \inf_{t_n \in \Gamma_n} \|f(x) - t_n(x)\|_p,$$

де $\Gamma_n = \{t_n(x) : t_n(x) = \sum\limits_{k=-n}^{n} a_k e^{ikx}, \quad k \in \mathbb{Z},\ a_k \in \mathbb{C}\}$.

Означимо для $f \in L_p(T^d)$ частинні суми ряду Фур'є наступним чином:

$$S_n^{\square}(f; x) = \sum_{k \in \square_n} c_k e^{i(k,x)}, \tag{1}$$

$$S_n^{\diamond}(f;x)=\sum_{k\in\diamond_n}c_k e^{i(k,x)}, \tag{2}$$

де $c_k=\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{T^d}f(t)e^{-i(k,t)}dt$ — коефіцієнти Фур'є функції f.

Через $\rho_n^{\square}(f)_p$ і $\rho_n^{\diamond}(f)_p$ будемо позначати відповідно величини

$$\rho_n^{\square}(f)_p=\|f(x)-S_n^{\square}(f;x)\|_p\ ,$$

$$\rho_n^{\diamond}(f)_p=\|f(x)-S_n^{\diamond}(f;x)\|_p\ .$$

При $d=1$

$$\rho_n(f)_p=\|f(x)-S_n(f;x)\|_p\ ,$$

$$S_n(f;x)=\sum_{k=-n}^{n}c_k e^{ikx}.$$

А. Лебег [1] встановив нерівність

$$\rho_n(f)_p\le BE_n(f)_p\ln n\ ,\qquad p=1,\infty\ .$$

К. І. Осколков [2] встановив оцінку, яка більш точно враховує властивості послідовності $\{E_n(f)_p\}$, $p=1,\infty$, а саме:

$$\rho_n(f)_p\le B\sum_{k=0}^{n}\frac{E_{n+k}(f)_p}{k+1},\qquad p=1,\infty\ .$$

С. П. Байбородов [3] для функцій $f(\cdot)\in L_p(T^d)$, $1\le p\le\infty$, показав, що

$$\rho_n^{\square}(f)_p\le B(d)\sum_{k=0}^{s}E_{n+k}^{\square}(f)_p\frac{\ln^{d-1}(k+2)}{k+1}\ ,$$

де

$$S=\min(n,[e^{\theta}])\ ,\theta=\begin{cases}1/(p-1),1\le p\le 2,\\ p-1,\quad 2\le p\le\infty.\end{cases}$$

2. Основний результат

Теорема 1. *Нехай* $f \in C(T^d)$ *і її частинна сума визначається формулою* (2)*.Тоді*

$$\rho_n^{\diamond}(f)_p \le B \sum_{k=0}^{n} E_{n+k}^{\diamond}(f)_p \frac{\ln^{d-1}(k+2)}{k+1} \ ,$$

$$p = 1, \infty \ . \tag{3}$$

Доведення. При доведенні цієї теореми використаємо методику з роботи [2]. Нехай $\mu = \max\{k : \ k \le 2n-1, \ \ E_k^{\diamond}(f)_C > 0\}$ і визначимо натуральні числа $n_0, n_1, \dots, n_p$ наступним чином:

$$n_0 = n; \ n_{\nu+1} = \min\{k : \ \ E_k^{\diamond}(f)_\infty \le \frac{1}{2} E_{n_\nu}^{\diamond}(f)_\infty\},$$

$$\nu = 0, 1, \dots, p-1 \ ,$$

де $p = \max\{k : \ \ E_{n_k}^{\diamond}(f)_\infty > E_\mu^{\diamond}(f)_\infty\}$, $n_{p+1} = \mu + 1$.

Відмітимо наступні властивості послідовності $\{n_\nu\}$, $\nu = \overline{0, p+1}$ (див. [2]), які випливають з її означення:

$$n_0 = n < n_1 < \dots < n_p < n_{p+1} = \mu + 1 \le 2n; \tag{4}$$

$$E_{n_{\nu+1}}^{\diamond}(f)_\infty \le \frac{1}{2} E_{n_\nu}^{\diamond}(f)_\infty, \ \nu = 0, 1, \dots, p-1; \tag{5}$$

$$E_k^{\diamond}(f)_\infty \ge \frac{1}{2} E_{n_\nu}^{\diamond}(f)_\infty \ , \tag{6}$$

$$\text{якщо} \ \ k+1 \le n_{\nu+1}, \ \ \nu = 0, 1, \dots, p.$$

Для сум

$$\delta_k = \sum_{\nu: \ n_{\nu+1} \ge k+1} E_{n_\nu}^{\diamond}(f)_\infty \tag{7}$$

справедлива оцінка

$$\delta_k \le B(d) E_k^{\diamond}(f)_\infty \ , \quad k = n, \ n+1, \dots, \mu \ , \tag{8}$$

яка випливає із властивостей (4)-(6).

Позначимо через $\widehat{t}^{\diamond}_{n_\nu} \in \Gamma^{\diamond}_{n_\nu}$ поліном найкращого наближення функції $f \in C(T^d)$, а

$$V_n^{\diamond}(f;x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n} S_k^{\diamond}(f;x)$$

— суми Валле–Пуссена [4]. В роботі [5] встановлено, що

$$\|f(x) - V_n^{\diamond}(f;x)\|_C \leq B(d)E_n^{\diamond}(f)_\infty \ . \tag{9}$$

Для випадку $d = 1$ така нерівність була встановлена Валле–Пуссеном [4].

Тепер, відповідно до (9), будемо мати

$$\delta_n^{\diamond}(f)_\infty \leq \|f(x) - V_n^{\diamond}(f;x)\|_C +$$

$$+\|V_n^{\diamond}(f;x) - S_n^{\diamond}(f;x)\|_C \leq$$

$$\leq B(d)E_n^{\diamond}(f)_\infty + \|V_n^{\diamond}(f;x) - S_n^{\diamond}(f;x)\|_C \ . \tag{10}$$

Оскільки

$$V_n^{\diamond}(f;x) - S_n^{\diamond}(f;x) =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{2n-k+1}{n+1} \sum_{|l|=k} c_l e^{i(l,x)} = \frac{1}{(2\pi)^d}\times$$

$$\times \int\limits_{T^d} f(x-u) \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{2n-k+1}{n+1} \sum_{|l|=k} e^{i(l,u)} du =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{p} \frac{1}{(2\pi)^d}\times$$

$$\times \int\limits_{T^d} f(x-u) \sum_{k=n_\nu+1}^{n_{\nu+1}} \frac{2n-k+1}{n+1} \sum_{|l|=k} e^{i(l,u)} du \ ,$$

то, позначивши через $t^{\diamond *}_{n_\nu}(u)$ поліном найкращого наближення з гармоніками з $\diamond_{n_\nu}$ для функції $f(x)$ та врахувавши ортогональність системи $\{e^{i(l,u)}\}$, знайдемо

$$V^\diamond_n(f;x) - S^\diamond_n(f;x) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{p} \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{T^d} \left[f(x-u) - t^{\diamond *}_{n_\nu}(x-u) \right] \times$$

$$\times \sum_{k=n_\nu+1}^{n_{\nu+1}} \frac{2n-k+1}{n+1} \sum_{|l|=k} e^{i(l,u)} du \ .$$

Далі, використовуючи узагальнену нерівність Мінковського, будемо мати

$$\|V^\diamond_n(f;x) - S^\diamond_n(f;x)\|_C \le \sum_{\nu=0}^{p} E^\diamond_{n_\nu}(f)_\infty \frac{1}{(2\pi)^d} I_\nu \ , \tag{11}$$

де

$$I_\nu = \frac{1}{(2\pi)^d} \times$$

$$\times \int\limits_{T^d} \left| \sum_{s=1}^{n_{\nu+1}-n_\nu} \frac{2n-n_\nu-s+1}{n+1} \sum_{|l|=n_\nu+s} e^{i(l,u)} \right| du \ .$$

Тепер оцінимо інтеграл I_ν. Для спрощення викладення оцінку проведемо для випадку $d=2$. При $d>2$ міркування аналогічні. Таким чином

$$I_\nu \le I^{(0,0)}_\nu + I^{(1,0)}_\nu + I^{(0,1)}_\nu + I^{(1,1)}_\nu \ ,$$

де

$$I_\nu^{(\alpha_1,\alpha_2)} = \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{T^2} |\sum_{s=1}^{n_{\nu+1}-n_\nu} \frac{2n-n_\nu-s+1}{n+1}\times$$

$$\times \sum_{(-1)^{\alpha_1}l_1+(-1)^{\alpha_2}l_2=n_\nu+s} e^{i(l,u)}|du \ ,$$

$$\alpha_i = 0,1 \ , \quad i=1,2 \ .$$

Оцінимо $I_\nu^{(1,0)}$:

$$I_\nu^{(1,0)} = \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{T^2} |\sum_{s=1}^{n_{\nu+1}-n_\nu} \frac{2n-n_\nu-s+1}{n+1}\times$$

$$\times \sum_{\substack{-l_1+l_2=n_\nu+s\\ l_1<0,\ l_2>0}} e^{i(l,u)}e^{i\frac{n_\nu}{2}u_1}e^{i\frac{n_\nu}{2}u_2}|du =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{T^2} |\sum_{s=1}^{n_{\nu+1}-n_\nu} \frac{2n-n_\nu-s+1}{n+1}\times$$

$$\times \sum_{\substack{-j_1+j_2=s\\ j_1\le\frac{n_\nu}{2},\ j_2\ge-\frac{n_\nu}{2}}} e^{i(j,u)}|du \ .$$

Застосувавши перетворення Абеля, знайдемо

$$\sum_{s=1}^{n_{\nu+1}-n_\nu} \frac{2n-n_\nu-s+1}{n+1}\left(D_s(u)-D_{s-1}(u)\right) =$$

$$= \sum_{s=1}^{n_{\nu+1}-n_\nu} \frac{2n-n_\nu-s+1}{n+1}D_s(u) -$$

$$- \sum_{s=0}^{n_{\nu+1}-n_\nu-1} \frac{2n-n_\nu-s}{n+1}D_s(u) =$$

$$= \frac{2n - n_{\nu+1} + 1}{n+1} D_{n_{\nu+1}-n_\nu}(u) - \frac{2n - n_\nu}{n+1} D_0(u) +$$

$$+ \frac{1}{n+1} \sum_{s=1}^{n_{\nu+1}-n_\nu} D_s(u) \ ,$$

де

$$D_s(u) = \sum_{\substack{-j_1+j_2=s \\ j_1 \le \frac{n_\nu}{2},\ j_2 \ge -\frac{n_\nu}{2}}} e^{i(j,u)} \ .$$

Таким чином

$$I_\nu^{(1,0)} \le B(2)\Big(\int\limits_{T^2} |D_{n_{\nu+1}-n_\nu}(u)| du +$$

$$+ \frac{1}{n+1} \int\limits_{T^2} \Big| \sum_{s=1}^{n_{\nu+1}-n_\nu} D_s(u) \Big| du\Big).$$

Далі, використовуючи результати робіт [6] або [7], матимемо

$$I_\nu^{(1,0)} \le B(2) \ln^2(n_{\nu+1} - n_\nu) \le B(2) \ln^2(n_{\nu+1} - n).$$

Аналогічно оцінюються і решта інтегралів $I_\nu^{(\alpha_1,\alpha_2)}$. Тому в d-мірному випадку будемо мати

$$I_\nu \le B(d) \ln^d(n_{\nu+1} - n + 1) =$$

$$= B(d) \sum_{k=n+1}^{n_{\nu+1}} (\ln^d(k-n+1) - \ln^d(k-n)) \le$$

$$\le B(d) \sum_{k=n+1}^{n_{\nu+1}} \frac{\ln^{d-1}(k-n+1)}{k-n}. \tag{12}$$

Підставляючи оцінку (12) в (11), отримуємо

$$\|V_n^{\diamond}(f;x) - S_n^{\diamond}(f;x)\|_C \leq$$

$$\leq B(d) \sum_{\nu=0}^{p} E_{n_\nu}^{\diamond}(f)_\infty \sum_{k=n+1}^{n_{\nu+1}} \frac{\ln^{d-1}(k-n+1)}{k-n}. \tag{13}$$

Змінюючи в правій частині співвідношення (13) порядок сумування і використовуючи (8), знайдемо

$$\|V_n^{\diamond}(f;x) - S_n^{\diamond}(f;x)\|_C \leq$$

$$\leq B(d) \sum_{k=n+1}^{n_1} \frac{\ln^{d-1}(k-n+1)}{k-n} \times$$

$$\times (E_{n_0}^{\diamond}(f)_\infty + \cdots + E_{n_p}^{\diamond}(f)_\infty) +$$

$$+ B(d) \sum_{k=n_1+1}^{n_2} \frac{\ln^{d-1}(k-n+1)}{k-n} \times$$

$$\times (E_{n_1}^{\diamond}(f)_\infty + \cdots + E_{n_p}^{\diamond}(f)_\infty) + \cdots +$$

$$+ B(d) \sum_{k=n_p+1}^{n_{p+1}} \frac{\ln^{d-1}(k-n+1)}{k-n} E_{n_p}^{\diamond}(f)_\infty \leq$$

$$\leq B(d) \sum_{k=n+1}^{\mu+1} E_k^{\diamond}(f)_\infty \frac{\ln^{d-1}(k-n+1)}{k-n}.$$

З останньої нерівності та співвідношення (10) випливає твердження теореми.

Література

[1] Lebesque H. Sur la représentation trigonométrique approchée des fonction satisfaisant è une condition de Lipshitz // Bull. Math. France. — 1910. — 38. — P. 184–210.

[2] Осколков К. И. К неравенству Лебега в равномерной метрике и на множестве полной меры //Мат. заметки. — 1975. — 18. — С. 515–526.

[3] Байбородов С. П. Константы Лебега и приближение функций прямоугольными суммами Фурье //Мат. заметки. — 1983. — 34. — С. 77–90.

[4] Ch. J. de la Vallèe Poussin. Lecons sur l'approximation des functions d'une variable réelle. — Paris: Guathier–Villars, 1919.

[5] Задерей Н. М., Товкач Р. В. Наближення періодичних функцій багатьох змінних сумами Фейера //Теорія наближень функцій та суміжні питання: Збірник праць Ін-ту математики НАН України. Київ: Ін-т математики НАН України, 2010. — Т. 7, №1. — С. 341-347.

[6] Белинский Э. С. Поведение констант Лебега некоторых методов суммирования кратных рядов Фурье //Сб. Метрические вопросы теории функций и отображений. — Вып. 8. — К.: Наук. думка, 1977. — С. 19–40.

[7] Байбородов С. П. Константы Лебега многогранников //Мат. заметки. — 1982. — 32, №6. — С. 817–822.

[8] Теляковский С. А. Равномерная ограниченность некоторых тригонометрических полиномов многих переменных //Мат. заметки. — 1987. — 42, №1. — С. 33–39.