Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2017, т. 14, № 3, 332–353

УДК 517.983.27

К. В. Соліч, О. В Федуник-Яремчук

Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк; solichkatia@gmail.com, fedunyk@ukr.net

Білінійні наближення класів $S^{\Omega}_{p,\theta}B$ періодичних функцій багатьох змінних

We obtain exact-order estimates of the best bilinear approximations of classes $S^{\Omega}_{p,\theta}B$ of periodic functions of many variables in the Lebesgue space.

Отримано оцінки найкращих білінійних наближень класів $S^{\Omega}_{p,\theta}B$ періодичних функцій у просторі Лебега.

Вступ

Робота присвячена дослідженню найкращих білінійних наближень періодичних функцій багатьох змінних $S^{\Omega}_{p,\theta}B$ у просторі Лебега. Вона складається зі вступу та двох пунктів. У вступі наводяться необхідні позначення і дається означення класів, що досліджуються. Перший пункт має допоміжний характер. Тут означено величину, оцінки зверху якої будуть знайдені у другому пункті.

Наведемо необхідні означення та позначення.

Нехай $\mathbb{R}^d, d \geq 1$, означає d-вимірний евклідів простір з елементами $x = (x_1, \dots, x_d)$, і $L_p(\pi_d)$, $\pi_d = \prod\limits_{j=1}^{d} [-\pi; \pi]$, — простір 2π-періодичних по кожній змінній і сумовних у степені p, $1 \leq p < \infty$, (відповідно суттєво обмежених при $p = \infty$) функцій $f(x) = f(x_1, \dots, x_d)$. Норма в цьому просторі визначається наступним чином:

$$||f||_p = \left((2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$||f||_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \pi_d} |f(x)|.$$

Підмножину функцій $f \in L_p(\pi_d)$, для яких виконується умова

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) dx_j = 0, \quad j = \overline{1, d},$$

позначимо через $L^\circ_p(\pi_d)$.

Означимо простори $S^{\Omega}_{p,\theta}B \subset L_p(\pi_d)$, властивості яких визначаються за допомогою: $\Omega(t)$, $t = (t_1, ..., t_d) \in \mathbb{R}^d_+$, — мажорантної функції для мішаного модуля неперервності l–го порядку ($l \in \mathbb{N}$) функції $f \in L_p(\pi_d)$; числових параметрів p і θ, $1 \leq p, \theta \leq \infty$.

Отже, для довільної функції $f \in L_p(\pi_d)$ покладемо

$$\Omega_l(f, t)_p = \sup_{\substack{|h_j| \leq t_j \\ j = \overline{1,d}}} \|\Delta^l_h f(\cdot)\|_p$$

мішаний модуль неперервності порядку l функції f, де

$$\Delta^l_h f(x) = \Delta^l_{h_d} ... \Delta^l_{h_1} f(x) = \Delta^l_{h_d}(...(\Delta^l_{h_1} f(x))),$$

$h = (h_1, ..., h_d)$, - мішана l-та різниця з кроком h_j за змінною x_j, $j = \overline{1, d}$, і

$$\Delta^l_{h_j} f(x) = \sum_{n=o}^{l} (-1)^{l-n} C^n_l f(x_1, ..., x_{j-1}, x_j + nh_j, x_{j+1}, ...x_d).$$

Нехай далі $\Omega(t) = \Omega(t_1, ..., t_d)$ — задана функція типу мішаного модуля неперервності порядку l, яка задовольняє наступні умови:

1) $\Omega(t) > 0$, $t_j > 0$, $j = \overline{1, d}$; $\Omega(t) = 0$, $\prod\limits_{j=1}^{d} t_j = 0$;

2) $\Omega(t)$ неперервна на $\mathbb{R}^d_+$;

3) $\Omega(t)$ неспадає по кожній змінній $t_j \geq 0$, $j = \overline{1, d}$, при будь-яких фіксованих значеннях інших змінних t_i, $i \neq j$;

4) $\Omega(m_1 t_1, ..., m_d t_d) \leq C \left(\prod\limits_{j=1}^{d} m_j \right)^l \Omega(t)$, $m_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1, d}$, $C > 0$ — деяка стала.

Множину таких функцій Ω позначимо через $\Psi_{l,d}$. У випадку $d = 1$ пишемо — Ψ_l. Зауважимо, що якщо $f \in L_p(\pi_d)$, то $\Omega_l(f, \cdot) \in \Psi_{l,d}$.

Підпорядкуємо функції $\Omega \in \Psi_{l,d}$ додатковим умовам, які опишемо в термінах двох понять, запроваджених С.Н. Бернштейном [1]:

а) невід'ємна функція $\varphi(\tau)$, $\tau \in [0; \infty)$ майже зростає, якщо існує стала $C_1 > 0$ така, що $\varphi(\tau_1) \leq C_1 \varphi(\tau_2)$, для будь-яких τ_1, τ_2, $0 \leq \tau_1 < \tau_2$;

б) додатна функція $\varphi(\tau)$, $\tau \in (0; \infty)$ майже спадає, якщо існує стала $C_2 > 0$ така, що $\varphi(\tau_1) \geq C_2 \varphi(\tau_2)$, для будь-яких τ_1, τ_2, $0 < \tau_1 < \tau_2$.

Нехай $d = 1$ і $\Omega \in \Psi^{(1,2)}_l$, тобто для $\Omega(t)$, $t \geq 0$, виконуються, принаймні, умови 1) і 2).

Будемо писати:

і) $\Omega \in S^\alpha$ $(\alpha > 0)$, якщо функція $\frac{\Omega(\tau)}{\tau^\alpha}$ майже зростає при $\tau > 0$;

ii) $\Omega \in S_l$, якщо існує γ, $0 < \gamma < l$, таке, що функція $\frac{\Omega(\tau)}{\tau^{\gamma}}$ майже спадає при $\tau > 0$.

Умови належності функції Ω до множин S^{α} і S_l часто називають в літературі умовами Барі-Стєчкіна [2].

При $d > 1$ для функції $\Omega \in \Psi^{(1,2)}_{l,d}$ будемо вважати, що $\Omega \in S^{\alpha}$, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_d)$, $\alpha_j > 0$, $j = \overline{1,d}$ (відповідно $\Omega \in S_l$, $l \in \mathbb{N}$), якщо $\Omega(t_1, ..., t_d)$ як функція змінної t_j, $j = \overline{1,d}$, при будь-яких значеннях інших змінних t_i, $i \neq j$, належить до множини S^{α_j} (відповідно S_l).

Покладемо також $\Phi^d_{\alpha,l} = \Psi_{l,d} \cap S^{\alpha} \cap S_l$.

Отже, нехай $1 \leq p, \theta \leq \infty$ і $\Omega \in \Phi^d_{\alpha,l}$. Тоді

$$S^{\Omega}_{p,\theta}B = \big\{ f \in L_p(\pi_d) : |f|_{S^{\Omega}_{p,\theta}B} < \infty \big\},$$

де напівнорма $|f|_{S^{\Omega}_{p,\theta}B}$ визначається співвідношенням

$$|f|_{S^{\Omega}_{p,\theta}B} = \begin{cases} \left(\int\limits_{\pi_d} \left(\frac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)} \right)^{\theta} \prod\limits_{j=1}^{d} \frac{dt_j}{t_j} \right)^{1/\theta}, & 1 \leq \theta < \infty, \\ \sup\limits_{t \geq 0} \frac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)}, & \theta = \infty. \end{cases} \tag{1}$$

Визначимо норму в просторі $S^{\Omega}_{p,\theta}B$ наступним чином

$$\|f\|_{S^{\Omega}_{p,\theta}B} := \|f\|_p + |f|_{S^{\Omega}_{p,\theta}B}, \quad 1 \leq p, \theta \leq \infty.$$

Наведене означення просторів $S^{\Omega}_{p,\theta}B$ (з незначною модифікацією) взяте із роботи [3]. При $\theta = \infty$ простори $S^{\Omega}_{p,\theta}B$ (з позначенням $S^{\Omega}_{p}H$) запроваджені і вивчались в роботі [4].

Шкала просторів $S^{\Omega}_{p,\theta}B$ є природнім узагальненням шкали просторів Нікольського–Бєсова $B^r_{p,\theta}$, $r = (r_1, ..., r_d)$, $r_j > 0$, $j = \overline{1,d}$, (див., наприклад, [5]) і $S^{\Omega}_{p,\theta}B \equiv B^r_{p,\theta}$ при $\Omega(t) = \prod\limits_{j=1}^{d} t_j^{r_j}$, $r_j < l$, $j = \overline{1,d}$, (зазначимо, що при $\theta = \infty$, $B^r_{p,\theta}$ — це простори Нікольського H^r_p [6]).

В наступних міркуваннях ми будемо використовувати порядкові співвідношення. Запис $A \asymp B$ означає двосторонню нерівність між виразами A і B, тобто $C_3B \leq A \leq C_4B$, де $C_3,\ C_4 > 0$— сталі, значення яких можуть бути різними в різних місцях. Також, якщо $A \leq C_5B$, $C_5 > 0$, та $A \geq C_6B$, $C_6 > 0$, будемо писати $A \ll B$ і $A \gg B$ відповідно. Із контексту буде зрозуміло, від яких параметрів ці сталі не залежать. Ми не будемо акцентувати на цьому увагу щоразу при використанні символів " $\asymp$ ", " $\ll$ ", " $\gg$ ".

Сформулюємо необхідні при доведенні одержаних у роботі результатів відомі твердження, що стосуються еквівалентного зображення норми $\|f\|_{S^{\Omega}_{p,\theta}B}$ функцій $f \in S^{\Omega}_{p,\theta}B$, $1 \leq p,\ \theta \leq \infty$, $\Omega \in \Phi^d_{\alpha,l}$. Ці зображення подаються в термінах визначеного порядку росту p -норм деяких тригонометричних поліномів, які будуються на основі розкладу функції $f \in L_p(\pi_d)$ в ряд Фур'є за тригонометричною системою.

Отже, нехай $f \in L_p(\pi_d)$ і

$$\delta_s(f,x) = \sum_{k\in\rho(s)} \hat{f}(k)e^{i(k,x)}, \quad (k,x) = k_1x_1 + ... + k_dx_d,$$

де

$$\hat{f}(k) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} f(t)e^{-i(k,t)}dt$$

— коефіцієнти Фур'є функції f і для кожного вектора $s = (s_1, ..., s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1,d}$,

$$\rho(s) := \{k = (k_1, ..., k_d) \in \mathbb{Z}^d : 2^{s_j-1} \leq |k_j| < 2^{s_j},\ j = \overline{1,d}\}.$$

В роботі [3] встановлено, що для $f \in S^{\Omega}_{p,\theta}B \cap L^{\circ}_p(\pi_d)$ при $1 < p < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$, $\Omega \in \Phi^d_{\alpha,l}$ мають місце співвідношення

$$\|f\|_{SB^{\Omega}_{p,\theta}} \asymp \begin{cases} \left(\sum\limits_s \Omega(2^{-s})^{-\theta} \|\delta_s(f,\cdot)\|_p^{\theta} \right)^{1/\theta}, & 1 \le \theta < \infty, \\ \sup\limits_s \frac{\|\delta_s(f,\cdot)\|_p}{\Omega(2^{-s})}, & \theta = \infty, \end{cases} \tag{2}$$

де $\Omega(2^{-s}) = \Omega(2^{-s_1}, ..., 2^{-s_d})$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1,d}$.

Як бачимо, таке зображення норми не охоплює випадки $p = 1$ і $p = \infty$. Деяка модифікація правої частини (2) дозволяє встановити подібне зображення і в цих випадках. Для цього введемо необхідні позначення.

Нехай

$$V_n(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos kt + 2\sum_{k=n+1}^{2n-1} \left(\frac{2n-k}{n} \right) \cos kt$$

ядро Валле–Пуссена порядку $2n$ і в точці $x = (x_1, ..., x_d)$

$$A_s(x) = \prod_{j=1}^{d} (V_{2^{s_j}}(x_j) - V_{2^{s_j-1}}(x_j)), s = (s_1, ..., s_d), s_j \in \mathbb{N}, j = \overline{1,d}. \tag{3}$$

Якщо $f \in L_p(\pi_d)$, $1 \le p \le \infty$, то покладемо

$$\mathbb{A}_s(f,x) := (f * A_s)().$$

В роботі [7] встановлено, що при $1 \le p \le \infty$, $1 \le \theta < \infty$ і $\Omega \in \Phi^d_{\alpha,l}$ для $f \in S^{\Omega}_{p,\theta}B \cap L^{\circ}_p(\pi_d)$ має місце співвідношення

$$\|f\|_{S^{\Omega}_{p,\theta}B} \asymp \left(\sum_s \Omega(2^{-s})^{-\theta} \|\mathbb{A}_s(f,\cdot)\|_p^{\theta} \right)^{1/\theta}, \quad 1 \le \theta < \infty, \tag{4}$$

і відповідно в [4] при $\theta = \infty$ —

$$\|f\|_{S^{\Omega}_{p,\infty}B} \asymp \sup_s \frac{\|\mathbb{A}_s(f,\cdot)\|_p}{\Omega(2^{-s})}. \tag{5}$$

В подальшому, в формулюваннях тверджень задіяні простори $S^{\Omega}_{p,\theta}B$, для яких функція Ω має спеціальний вигляд

$$\Omega(t) = \omega\left(\prod_{j=1}^{d} t_j\right), \quad \omega \in \Phi^1_{\alpha,l}, \ \alpha > 0. \tag{6}$$

В такому випадку співвідношення (4) та (5) можна записати у вигляді

$$\|f\|_{S^{\Omega}_{p,\theta}B} \asymp \left(\sum_{s} \omega(2^{-|s|_1})^{-\theta} \|\mathbb{A}_s(f,\cdot)\|_p^{\theta}\right)^{1/\theta}, \quad 1 \le \theta < \infty,$$

і відповідно

$$\|f\|_{S^{\Omega}_{p,\infty}B} \asymp \sup_{s} \frac{\|\mathbb{A}_s(f,\cdot)\|_p}{\omega(2^{-|s|_1})}, \quad \theta = \infty,$$

де $|s|_1 = s_1 + ... + s_d$ і далі замість $\Omega(2^{-s})$ будемо писати $\omega(2^{-|s|_1})$.

Отже, тут $\omega(\cdot)$ — довільна функція (однієї змінної) типу модуля неперервності порядку l і $\omega \in \Phi^1_{\alpha,l}$. Згідно попередніх означень зрозуміло, що

$$\omega \in \Phi^1_{\alpha,l} \Longrightarrow \Omega \in \Phi^d_{\alpha,l}, \quad \alpha = (\underbrace{\alpha, ..., \alpha}_{d}).$$

Зауважимо, що до множини $\Phi^1_{\alpha,l}$, $l \in \mathbb{N}$, належить, наприклад, функція

$$\omega(u) = \begin{cases} \frac{u^r}{(\log^+ \frac{1}{u})^{\beta}}, & u > 0, \\ 0, & u = 0, \end{cases}$$

де $\log^+ \tau = \max\{1, \log \tau\}$, $0 < r < l$, $\beta \in \mathbb{R}$. Надалі, для одиничної кулі в просторі $S^{\Omega}_{p,\theta}B \cap L^{\circ}_p(\pi_d)$ будемо використовувати те ж позначення, що і для самого простору $S^{\Omega}_{p,\theta}B$, тобто

$$S^{\Omega}_{p,\theta}B := \{f \in S^{\Omega}_{p,\theta}B \cap L^{\circ}_p(\pi_d) \ : \|f\|_{S^{\Omega}_{p,\theta}B} \le 1\}.$$

Для $G \subset \mathbb{Z}^d$, де $\mathbb{Z}^d$ — цілочислова решітка в $\mathbb{R}^d$, через $\mathrm{T}(G,d)$ позначимо множину тригонометричних поліномів d змінних

$$\mathrm{T}(G,d) = \big\{t : t(x) = \sum_{k \in G} c_k e^{i(k,x)}\big\},$$

і для $G_1,\, G_2 \subset \mathbb{Z}^d$ через $T(G_1,\, G_2,\, 2d)$ — множину тригонометричних поліномів $2d$ змінних

$$\mathrm{T}(G_1, G_2, 2d) = \big\{t : t(x,y) = \sum_{\substack{k^1 \in G_1 \\ k^2 \in G_2}} c_{k^1,k^2} e^{i((k^1,x)+(k^2,y))}\big\}.$$

У випадку коли $G = C^d(n) := \{k = (k_1, ..., k_d) \in \mathbb{Z}^d : |k_j| \le n, j = \overline{1,d}\}$, замість $\mathrm{T}(G,d)$ будемо писати $\mathrm{T}(C^d(n))$, а якщо $G = P^d(N) := \{k = (k_1, ..., k_d) \in \mathbb{Z}^d : |k_j| \le N_j, j = \overline{1,d}\}$, $N = (N_1, ..., N^d), N_j \in \mathbb{Z}^d_+$, то $\mathrm{T}(P^d(N))$.

Для натурального n позначимо $Q_n = \bigcup\limits_{|s|_1 \le n} \rho^+(s)$, де $s = (s_1, ..., s_d)$, $s_j \in \mathbb{Z}_+$, $j = \overline{1,d}$, а $\rho^+(s) = \rho(s) \cap \mathbb{N}^d$. Зауважимо, що $|Q_n| \asymp 2^n n^{d-1}$.

При доведенні нашого результату будемо також застосовувати таку теорему Літтлвуда – Пелі (див., наприклад, [6, с. 65]):

Теорема 1. *Нехай задано* $1 < p < \infty$. *Існують додатні числа* C_7, C_8 *такі, що для кожної функції* $f \in L^{\circ}_p(\pi_d)$ *виконуються співвідношення*

$$C_7 \|f\|_p \le \Big\| \Big\{ \sum_{s \in \mathbb{N}^d} |\delta_s(f;\cdot)|^2 \Big\}^{1/2} \Big\|_p \le C_8 \|f\|_p. \tag{7}$$

Ця теорема є узагальненням на багатовимірний випадок відомої теореми Літтлвуда –Пелі (див. [8, т. 2, гл. 15]).

1. Найкращі білінійні наближення.

Означимо величину, яка буде досліджуватися в даній роботі, а також коротко наведемо відповідні бібліографічні дані.

Нехай $L_q(\pi_{2d})$, $q=(q_1,q_2)$ — множина функцій $f(x,y)$, $x,y\in\pi_d$, зі скінченною мішаною нормою

$$\|f(x,y)\|_{q_1,q_2}=\|\ \|f(\cdot,y)\|_{q_1}\|_{q_2},$$

де норма обчислюється спочатку у просторі $L_{q_1}(\pi_d)$ по змінній $x\in\pi_d$, а потім від результату — по змінній $y\in\pi_d$ у просторі $L_{q_2}(\pi_d)$. Для $f\in L_q(\pi_{2d})$ означимо найкраще білінійне наближення порядку M:

$$\tau_M(f)_{q_1,q_2}:=\inf_{u_j(x),v_j(y)}\ \|f(x,y)-\sum_{j=1}^{M}u_j(x)v_j(y)\|_{q_1,q_2},$$

де $u_j\in L_{q_1}(\pi_d)$, $v_j\in L_{q_2}(\pi_d)$.

Якщо $F\subset L_{q_1,q_2}(\pi_{2d})$ — клас функцій, то покладемо

$$\tau_M(F)_{q_1,q_2}:=\sup_{f\in F}\tau_M(f)_{q_1,q_2}. \tag{8}$$

Дослідженню величини (8), де в якості F виступають класи $\mathrm{W}^r_{p,\alpha}$ і H^r_p присвячені праці В.М. Темлякова [9–13], в яких можна знайти відповідну бібліографію. Що стосується білінійних наближень класів Бєсова $B^r_{p,\theta}$, то вони досліджувалися у роботах А.С. Романюка, В.С. Романюка [14, 15] і А.С. Романюка [16].

Метою даної роботи є отримання оцінок зверху величини

$$\tau_M(S^{\Omega}_{p,\theta}B)_{q_1,q_2}=\sup_{f\in S^{\Omega}_{p,\theta}B}\tau_M(f)_{q_1,q_2}$$

при умові $q_1=q_2=q$. Зауважимо, що в такому випадку, згідно означення $L_{q_1,q_2}(\pi_{2d})\ \equiv\ L_q(\pi_{2d})$ і $\|f\|_{q_1,q_2}\equiv\|f\|_q$ для $f\in L_q(\pi_{2d})$. Тому замість $\tau_M(S^{\Omega}_{p,\theta}B)_{q,q}$ будемо писати $\tau_M(S^{\Omega}_{p,\theta}B)_q$. Класичний результат стосовно білінійних наближень належить Шмідту [17]. В дещо більш загальному, ніж в [17], вигляді цей результат сформульовано В.М. Темляковим в роботі [9, с. 10].

2. Основні результати.

Має місце наступне твердження.

Теорема 2. *Нехай* $1 \le \theta \le \infty$ *і* $\Omega(t) = \omega(\prod\limits_{j=1}^{d} t_j)$, *де* $\omega \in \Phi^1_{\alpha,l}$, $\alpha > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$. *Тоді для будь-якої послідовності* $M = (M_m)_{m=1}^{\infty}$ *натуральних чисел такої, що виконується співвідношення* $M \asymp 2^m m^{d-1}$, *справедливі порядкові нерівності*

$$\tau_M(S^{\Omega}_{p,\theta}B)_q \ll \begin{cases} \omega(2^{-2m}) m^{\frac{2(d-1)}{\theta'}}, & p = q = \infty \text{ або } p = q = 1, \\ \omega(2^{-2m}) 2^{m(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} m^{(d-1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}+2(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})_+)}, & 1 \le p \le q \le 2, \end{cases}$$

де $\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta'} = 1$.

Доведення. Нехай $x = (x_1, ..., x_d) \in \mathbb{R}^d$, $y = (y_1, ..., y_d) \in \mathbb{R}^d$, $s = (s_1, ..., s_d)$, $t = (t_1, ..., t_d)$, $s_j, t_j \in \mathbb{Z}_+$, $j = \overline{1, d}$. Покладемо

$$A_{s,t}(x, y) = 2^{2d} \prod_{j=1}^{d} V_{2^{s_j}}(x_j) - V_{2^{s_j - 1}}(x_j)) \prod_{j=1}^{d} (V_{2^{t_j}}(y) - V_{2^{t_j - 1}}(y)) =$$

$$= A_s(x) A_t(y)$$

і

$$\mathbb{A}_{s,t} f(x, y) = (f * A_{s,t})(x, y).$$

Для натуральних чисел n означимо наступні трійки функцій:

$$f^n_1(x, y) = \sum_{t \in \mathbb{Z}^d_+} \sum_{|s|_1 \le n} \mathbb{A}_{s,t}(x, y),$$

$$f^n_2(x, y) = \sum_{|t|_1 \le n} \sum_{|s|_1 > n} \mathbb{A}_{s,t}(x, y), \tag{9}$$

$$f^n_3(x, y) = \sum_{|t|_1 > n} \sum_{|s|_1 > n} \mathbb{A}_{s,t}(x, y),$$

$|s|_1 = |s_1| + ... + |s_d|$, $|t|_1 = |t_1| + ... + |t_d|$. В такому випадку для функції f справедлива рівність

$$f(x, y) = \sum_{j=1}^{3} f_j^n(x, y). \tag{10}$$

Крім того функції $f_j^n(x, y)$, $j = 1, 2$ можуть бути представлені у вигляді

$$f_j^n(x, y) = \sum_{i=1}^{2^d|Q_n|} u_i^j(x) v_i^j(y), \tag{11}$$

де $u_i^j, v_i^j \in L_p(\pi_d)$, $j = 1, 2$.

Нехай для заданого $m \in \mathbb{N}$, $m \geq d$, число $M \in \mathbb{N}$ таке, що

$$2^{d+1}|Q_m| \leq M < C|Q_m|, \tag{12}$$

де C — довільна фіксована стала, $C > 2^{d+1}$. Тому з врахуванням (10) та (11) можемо записати

$$\tau_{2M}(f)_q \leq \tau_M(f_3^m)_q, \ f \in L_q(\pi_{2d}), \ 1 \leq q \leq \infty.$$

І, згідно останньої нерівності, оцінка зверху величини $\tau_M(f)_q$ зводиться до оцінки величини $\tau_M(f_3^m)_q$, причому m і M пов'язані нерівностями (12).

Тоді при $p = q = 1$ та $p = q = \infty$ для $f \in S_{p,\theta}^\Omega B$, використовуючи нерівність Мінковського, отримаємо

$$\tau_{2M}(f)_q \leq \tau_M(f_3^m)_q \leq \Bigg\| \sum_{\substack{|s|_1 > m \\ |t|_1 > m}} \mathbb{A}_{s,t} f \Bigg\|_q \leq \sum_{\substack{|s|_1 > m \\ |t|_1 > m}} \|\mathbb{A}_{s,t} f\|_q =$$

$$= \sum_{\substack{|s|_1 > m \\ |t|_1 > m}} \omega^{-1}(2^{-|s|_1 - |t|_1}) \|\mathbb{A}_{s,t} f\|_q \omega(2^{-|s|_1 - |t|_1}) := \mathcal{I}_1.$$

Доведення подальшої оцінки величини $\mathcal{I}_1$ проведемо в три етапи. Розглянемо спочатку випадок $\theta \in (1, \infty)$. Користуючись нерівністю Гельдера: для довільних числових послідовностей $a = (a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ і $b = (b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ при $1 < \gamma < \infty$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^{\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^{\gamma'}\right)^{\frac{1}{\gamma'}}, \quad \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma'} = 1, \tag{13}$$

та (4) запишемо

$$\mathcal{I}_1 \ll \Bigg(\sum_{\substack{|s|_1 > m \\ |t|_1 > m}} \omega^{-\theta}(2^{-|s|_1 - |t|_1}) \|\mathbb{A}_{s,t} f\|_q^{\theta} \Bigg)^{\frac{1}{\theta}} \times$$

$$\times \Bigg(\sum_{\substack{|s|_1 > m \\ |t|_1 > m}} \omega^{\theta'}(2^{-|s|_1 - |t|_1}) \Bigg)^{\frac{1}{\theta'}} \ll \|f\|_{S^{\Omega}_{p,\theta}B} \Bigg(\sum_{\substack{|s|_1 > m \\ |t|_1 > m}} \omega(2^{-|s|_1 - |t|_1}) \Bigg)^{\frac{1}{\theta'}}. \tag{14}$$

Для того, щоб продовжити оцінку (14), зауважимо, що для довільного d-вимірного вектора $l = (l_1, ..., l_d) \in \mathbb{N}^d$ і $\alpha > 0$

$$\sum_{|l|_1 > m} 2^{-\alpha |l|_1} \asymp \sum_{j=m+1}^{\infty} 2^{-\alpha j} j^{d-1} \asymp 2^{-\alpha m} m^{d-1}. \tag{15}$$

Тоді для $\mathcal{I}_1$, враховуючи (14), а також зв'язок між числами m та M, маємо

$$\mathcal{I}_1 \ll \Bigg(\sum_{\substack{|s|_1 > m \\ |t|_1 > m}} \frac{\omega^{\theta'}(2^{-|s|_1 - |t|_1})}{2^{-\alpha\theta'(|s|_1 + |t|_1)}} \cdot 2^{-\alpha\theta'(|s|_1 + |t|_1)} \Bigg)^{\frac{1}{\theta'}} \ll$$

$$\ll \Bigg(\frac{\omega^{\theta'}(2^{-2m})}{2^{-2\theta'\alpha m}} \sum_{\substack{|s|_1 > m \\ |t|_1 > m}} 2^{-\alpha\theta'(|s|_1 + |t|_1)} \Bigg)^{\frac{1}{\theta'}} =$$

$$= \left(\frac{\omega^{\theta'}(2^{-2m})}{2^{-2\theta'\alpha m}} \sum_{|s|_1>m} \sum_{|t|_1>m} 2^{-\alpha\theta'(|s|_1+|t|_1)} \right)^{\frac{1}{\theta'}} =$$

$$= \left(\frac{\omega^{\theta'}(2^{-2m})}{2^{-2\theta'\alpha m}} \sum_{|s|_1>m} 2^{-\alpha\theta'|s|_1} \sum_{|t|_1>m} 2^{-\alpha\theta'|t|_1} \right)^{\frac{1}{\theta'}} \ll$$

$$\ll \left(\frac{\omega^{\theta'}(2^{-2m})}{2^{-2\theta'\alpha m}} \sum_{i=m+1}^{\infty} 2^{-\alpha\theta' i} i^{d-1} \sum_{j=m+1}^{\infty} 2^{-\alpha\theta' j} j^{d-1} \right)^{\frac{1}{\theta'}} \ll$$

$$\ll \left(\frac{\omega^{\theta'}(2^{-2m})}{2^{-2\theta'\alpha m}} \cdot 2^{-\alpha\theta' m} m^{d-1} \cdot 2^{-\alpha\theta' m} m^{d-1} \right)^{\frac{1}{\theta'}} =$$

$$= \omega(2^{-2m}) m^{\frac{2(d-1)}{\theta'}}.$$

Отже, бачимо, що у випадку $\theta \in (1, \infty)$

$$\tau_M(f)_q \ll \omega(2^{-2m}) m^{\frac{2(d-1)}{\theta'}}.$$

Тепер знайдемо оцінку зверху для величини $\mathcal{I}_1$ у випадку $\theta = 1$. Користуючись (4) запишемо

$$\mathcal{I}_1 = \sum_{\substack{|s|_1>m \\ |t|_1>m}} \omega^{-1}(2^{-|s|_1-|t|_1}) \|\mathbb{A}_{s,t} f\|_q \frac{\omega(2^{-|s|_1-|t|_1})}{2^{-\alpha(|s|_1+|t|_1)}} \cdot 2^{-\alpha(|s|_1+|t|_1)} \ll$$

$$\ll \frac{\omega(2^{-2m})}{2^{-2\alpha m}} \sum_{\substack{|s|_1>m \\ |t|_1>m}} \omega^{-1}(2^{-|s|_1-|t|_1}) \|\mathbb{A}_{s,t} f\|_q 2^{-\alpha(|s|_1+|t|_1)} \ll$$

$$\ll \frac{\omega(2^{-2m})}{2^{-2\alpha m}} 2^{-2\alpha m} \sum_{\substack{|s|_1>m \\ |t|_1>m}} \omega^{-1}(2^{-|s|_1-|t|_1}) \|\mathbb{A}_{s,t} f\|_q \ll$$

$$\ll \omega(2^{-2m}) \|f\|_{S^{\Omega}_{p,1}B} \ll \omega(2^{-2m}),$$

а тому

$$\tau_M(f)_q \ll \omega(2^{-2m}).$$

Розглянемо далі відповідні оцінки зверху у випадку $\theta = \infty$, тобто для класів $S^{\Omega}_{p,\infty} := S^{\Omega}_{p}H$. Враховуючи, що для $f \in S^{\Omega}_{p}H$ (див. [4])

$$\|\mathbb{A}_{s,t}f\|_p \ll \omega(2^{-|s|_1-|t|_1}), \tag{16}$$

можемо продовжити порядкову нерівність для $\mathcal{I}_1$.

$$\mathcal{I}_1 = \sum_{\substack{|s|_1>m\\|t|_1>m}} \|\mathbb{A}_{s,t}f\|_q \ll \sum_{\substack{|s|_1>m\\|t|_1>m}} \omega(2^{-|s|_1-|t|_1}) =$$

$$= \sum_{\substack{|s|_1>m\\|t|_1>m}} \frac{\omega(2^{-|s|_1-|t|_1})}{2^{-\alpha(|s|_1+|t|_1)}} \cdot 2^{-\alpha(|s|_1+|t|_1)} \ll \frac{\omega(2^{-2m})}{2^{-2\alpha m}} \sum_{\substack{|s|_1>m\\|t|_1>m}} 2^{-\alpha(|s|_1+|t|_1)} \ll$$

$$\ll \frac{\omega(2^{-2m})}{2^{-2\alpha m}} 2^{-2\alpha m} m^{2(d-1)} = \omega(2^{-2m}) m^{2(d-1)}.$$

Звідси справедлива оцінка

$$\tau_M(f)_q \ll \omega(2^{-2m}) m^{2(d-1)}.$$

А отже, для класів $S^{\Omega}_{p}H$ можемо записати

$$\tau_M(S^{\Omega}_{p}H)_q \ll \omega(2^{-2m}) m^{2(d-1)}.$$

Тепер перейдемо до оцінки зверху для величини $\tau_M(S^{\Omega}_{p,\theta}B)$ у випадку $1 \le p \le q \le 2$, $q \ne 1$. Нехай

$$M_{s,t} = [C_9 2^{m+\kappa(2m-|s|_1-|t|_1)} m^{1-d}],$$

де числа κ, C_9 — додатні сталі, вільні в подальшому виборі, а $[a]$ — ціла частина числа $a \in \mathbb{R}$.

Користуючись (15) можемо записати

$$\sum_{\substack{|s|_1>m\\|t|_1>m}} M_{s,t} \le C_9 \sum_{\substack{|s|_1>m\\|t|_1>m}} 2^{m+\kappa(2m-|s|_1-|t|_1)} m^{1-d} =$$

$$= C_9 2^{m+2\kappa m} m^{1-d} \sum_{\substack{|s|_1>m \\ |t|_1>m}} 2^{-\kappa(|s|_1+|t|_1)} \asymp$$

$$\asymp 2^{m+2\kappa m} m^{1-d} \cdot 2^{-2\kappa m} m^{2(d-1)} = 2^m m^{d-1} \asymp M,$$

а при конкретному виборі сталої $C_9 > 0$

$$\sum_{\substack{|s|_1>m \\ |t|_1>m}} M_{s,t} \leq M$$

Далі використаємо наслідок з теореми Літтлвуда-Пелі (див., наприклад, [18, с. 17])

$$\|f\|_p \ll \left\{ \sum_s \|\delta_s(f;\cdot)\|_p^{p_0} \right\}^{1/p_0}, \tag{17}$$

де $p_0 = \min\{2;p\}$, врахуємо зауваження з роботи [18, с.100] і наступну лему.

Лема 1 (див. [11])**.** *Нехай e_1 та e_2 - деякі множини d-вимірних векторів, компоненти яких натуральні числа, і $E_j = \bigcup\limits_{s\in e_j} \rho(s)$. Тоді при $q \in (1,\infty)$ для довільної функції $f(x,y) \in T(E_1,E_2,2d)$ і довільного $n \in \mathbb{N}$ знайдуться такі функції $u_i \in T(E_1,d)$, $v_i \in T(E_2,d)$, що*

$$\|f(x,y) - \sum_{j=1}^{n} u_i(x)v_i(y)\|_q \ll \tau_n(f)_q.$$

Будемо мати

$$\tau_M^q(f_3^m)_q \ll \sum_{\substack{|s|_1>m \\ |t|_1>m}} \tau_{M_{s,t}}^q(\mathbb{A}_{s,t}f)_q.$$

Для продовження встановлення оцінки зверху нам потрібна ще одна лема, доведена в роботі [11].

Лема 2 (див. [11]). *Нехай* $1 \le p \le q < \infty$ *і* $f \in T(P^d(N))$. *Тоді для всіх цілих* M *таких, що* $0 \le M \le V(N) := \prod\limits_{j=1}^{2d} N_j$, *виконується нерівність*

$$\tau_M(f)_q \ll V(N)^{\beta} \min\{1, M^{-\beta}\|f\|_p\}, \tag{18}$$

де $\beta = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$.

Тоді згідно (18) можемо записати

$$\tau_{M_{s,t}}(A_{s,t}f)_q \ll M_{s,t}^{-\beta} 2^{\beta(|s|_1+|t|_1)} \|\mathbb{A}_{s,t}f\|_p$$

і відповідно

$$\tau_M^q(f_3^m)_q \ll \sum_{\substack{|s|_1>m \\ |t|_1>m}} M_{s,t}^{-\beta q} 2^{\beta q(|s|_1+|t|_1)} \|\mathbb{A}_{s,t}f\|_p^q := \mathcal{I}_2^q. \tag{19}$$

Для оцінки $\mathcal{I}_2^q$ розглянемо спочатку випадок $\theta \in [1, q]$. Оскільки для довільної послідовності $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ (див., наприклад, [6]) виконується нерівність

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^{\nu_2}\right)^{\frac{1}{\nu_2}} \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^{\nu_1}\right)^{\frac{1}{\nu_1}}, \quad 1 \le \nu_1 < \nu_2 < \infty,$$

то

$$\mathcal{I}_2 \le \left(\sum_{\substack{|s|_1>m \\ |t|_1>m}} M_{s,t}^{-\beta\theta} 2^{\beta\theta(|s|_1+|t|_1)} \|\mathbb{A}_{s,t}f\|_p^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{\substack{|s|_1>m \\ |t|_1>m}} \omega(2^{-|s|_1-|t|_1})^{-\theta} \|\mathbb{A}_{s,t}f\|_p^{\theta}\, \omega(2^{-|s|_1-|t|_1})^{\theta} \times \right.$$

$$\left. \times 2^{\beta\theta(|s|_1+|t|_1)} 2^{-m\beta\theta-\beta\theta\kappa(2m-|s|_1-|t|_1)} m^{\beta\theta(d-1)} \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll 2^{-m\beta-2m\beta\kappa} m^{\beta(d-1)} \Bigg(\sum_{\substack{|s|_1>m \\ |t|_1>m}} \omega(2^{-|s|_1-|t|_1})^{-\theta} \|\mathbb{A}_{s,t} f\|_p^\theta \times$$

$$\times \omega(2^{-|s|_1-|t|_1})^{\theta} 2^{\beta\theta(\kappa+1)(|s|_1+|t|_1)} \Bigg)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll 2^{-m\beta(1+2\kappa)} m^{\beta(d-1)} \Bigg(\sum_{\substack{|s|_1>m \\ |t|_1>m}} \omega(2^{-|s|_1-|t|_1})^{-\theta} \|\mathbb{A}_{s,t} f\|_p^\theta \times$$

$$\times \frac{\omega(2^{-|s|_1-|t|_1})^{\theta}}{2^{-\alpha\theta(|s|_1+|t|_1)}} 2^{-\theta(|s|_1+|t|_1)(\alpha-\beta-\beta\kappa)} \Bigg)^{\frac{1}{\theta}}.$$

Число $\kappa > 0$ в означенні послідовності $(M_{s,t})_{\substack{|s|_1>m \\ |t|_1>m}}$ виберемо таким, що $\alpha - \beta - \beta\kappa > 0$, де α з умови теореми. Продовжимо оцінку для $\mathcal{I}_2$.

$$\mathcal{I}_2 \ll 2^{-m\beta(1+2\kappa)} m^{\beta(d-1)} \frac{\omega(2^{-2m})}{2^{-2\alpha m}} \times$$

$$\times \Bigg(\sum_{\substack{|s|_1>m \\ |t|_1>m}} \omega(2^{-|s|_1-|t|_1})^{-\theta} \|\mathbb{A}_{s,t} f\|_p^\theta \, 2^{-\theta(|s|_1+|t|_1)(\alpha-\beta-\beta\kappa)} \Bigg)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll 2^{-m\beta(1+2\kappa)} m^{\beta(d-1)} \frac{\omega(2^{-2m})}{2^{-2\alpha m}} 2^{-2m(\alpha-\beta-\beta\kappa)} \times$$

$$\times \Bigg(\sum_{\substack{|s|_1>m \\ |t|_1>m}} \omega(2^{-|s|_1-|t|_1})^{-\theta} \|\mathbb{A}_{s,t} f\|_p^\theta \Bigg)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll 2^{-m\beta(1+2\kappa)} m^{\beta(1-d)} \frac{\omega(2^{-2m})}{2^{-2\alpha m}} 2^{-2m(\alpha-\beta-\beta\kappa)} \|f\|_{S^{\Omega}_{p,\theta}B} \asymp$$

$$\asymp \omega(2^{-2m}) 2^{m\beta} m^{\beta(d-1)} = \omega(2^{-2m}) 2^{m(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} m^{(d-1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}.$$

Таким чином

$$\tau_{2M}(f)_q \ll \omega(2^{-2m}) 2^{m(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} m^{(d-1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}. \tag{20}$$

Така ж оцінка буде і для $\tau_M(f)_q$.

Розглянемо тепер випадок $q<\theta<\infty$. Користуючись нерівністю Гельдера (13) з $\gamma=\frac{\theta}{q}$ отримаємо

$$\mathcal{I}_2=\Bigg(\sum_{\substack{|s|_1>m\\|t|_1>m}} M_{s,t}^{-\beta q}2^{\beta q(|s|_1+|t|_1)}\|\mathbb{A}_{s,t}f\|_p^q\Bigg)^{\frac{1}{q}}=$$

$$=\Bigg(\sum_{\substack{|s|_1>m\\|t|_1>m}}\omega(2^{-|s|_1-|t|_1})^{-q}\|\mathbb{A}_{s,t}f\|_p^q\; M_{s,t}^{-\beta q}2^{\beta q(|s|_1+|t|_1)}\omega(2^{-|s|_1-|t|_1})^q\Bigg)^{\frac{1}{q}}\le$$

$$\le\Bigg(\Bigg(\sum_{\substack{|s|_1>m\\|t|_1>m}}\Big(\omega(2^{-|s|_1-|t|_1})^{-q}\|\mathbb{A}_{s,t}f\|_p^q\Big)^{\frac{\theta}{q}}\Bigg)^{\frac{q}{\theta}}\times$$

$$\times\Bigg(\sum_{\substack{|s|_1>m\\|t|_1>m}}\Big(M_{s,t}^{-\beta q}\;2^{\beta q(|s|_1+|t|_1)}\;\omega(2^{-|s|_1-|t|_1})^q\Big)^{\frac{\theta}{\theta-q}}\Bigg)^{\frac{\theta-q}{\theta}}\Bigg)^{\frac{1}{q}}=$$

$$=\Bigg(\sum_{\substack{|s|_1>m\\|t|_1>m}}\omega(2^{-|s|_1-|t|_1})^{-\theta}\|\mathbb{A}_{s,t}f\|_p^\theta\Bigg)^{\frac{1}{\theta}}\times$$

$$\times\Bigg(\sum_{\substack{|s|_1>m\\|t|_1>m}}\Big(M_{s,t}^{-\beta q}\;2^{\beta q(|s|_1+|t|_1)}\;\omega(2^{-|s|_1-|t|_1})^q\Big)^{\frac{\theta}{\theta-q}}\Bigg)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}}\ll$$

$$\ll\|f\|_{S^{\omega}_{p,\theta}B}\Bigg(\sum_{\substack{|s|_1>m\\|t|_1>m}}\Big(2^{-\beta mq-\beta q\kappa(2m-|s|_1-|t|_1)}2^{\beta q(|s|_1+|t|_1)}\times$$

$$\times m^{\beta q(d-1)}\omega(2^{-|s|_1-|t|_1})^q\Big)^{\frac{\theta}{\theta-q}}\Bigg)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}}\asymp 2^{-\beta mq(1+2\kappa)\cdot\frac{\theta}{\theta-q}\cdot\frac{\theta-q}{q\theta}}\times$$

$$\times\Bigg(\sum_{\substack{|s|_1>m\\|t|_1>m}}2^{(\beta\kappa+\beta)\cdot\frac{q\theta}{\theta-q}\cdot(|s|_1+|t|_1)}m^{\beta(d-1)\frac{q\theta}{\theta-q}}\omega(2^{-|s|_1-|t|_1})^{\frac{q\theta}{\theta-q}}\Bigg)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}}=$$

$$= 2^{-\beta m(1+2\kappa)} m^{\beta(d-1)} \Bigg(\sum_{\substack{|s|_1>m\\|t|_1>m}} \frac{\omega(2^{-|s|_1-|t|_1})^{\frac{q\theta}{\theta-q}}}{2^{-\alpha(|s|_1+|t|_1)\frac{q\theta}{\theta-q}}} \times$$

$$\times 2^{\frac{q\theta}{\theta-q}(|s|_1+|t|_1)(\beta+\beta\kappa-\alpha)} \Bigg)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}} \ll 2^{-\beta m(1+2\kappa)} m^{\beta(d-1)} \frac{\omega(2^{-2m})}{2^{-2\alpha m}} \times$$

$$\times \Bigg(\sum_{\substack{|s|_1>m\\|t|_1>m}} 2^{-(\alpha-\beta-\beta\kappa)(|s|_1+|t|_1)\frac{q\theta}{\theta-q}} \Bigg)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}}.$$

Знову візьмемо $\kappa > 0$ в означенні послідовності $(M_{s,t})_{\substack{|s|_1>m\\|t|_1>m}}$ таким, щоб виконувалась нерівність $\alpha - \beta - \beta\kappa > 0$, тоді

$$\mathcal{I}_2 \ll 2^{-\beta m(1+2\kappa)} m^{\beta(d-1)} \frac{\omega(2^{-2m})}{2^{-2\alpha m}} 2^{-(\alpha-\beta-\beta\kappa)2m} m^{2(d-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})} =$$

$$= \omega(2^{-2m}) 2^{\beta m} m^{\beta(d-1)} 2^{(d-1)(\frac{2}{q}-\frac{2}{\theta})} \asymp$$

$$\asymp \omega(2^{-2m}) 2^{m(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} m^{(d-1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}+2(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}))}.$$

З останніх співвідношень можемо записати оцінку

$$\tau_{2M}(f)_q \ll \omega(2^{-2m}) 2^{m(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} m^{(d-1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}+2(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}))}, \qquad (21)$$

яка буде справедливою і для $\tau_M(f)q$.

Залишилося встановити оцінку у випадку $\theta = \infty$, тобто для класів $S_p^{\Omega}H$. Враховуючи (16) запишемо

$$\mathcal{I}_2 = \Bigg(\sum_{\substack{|s|_1>m\\|t|_1>m}} M_{s,t}^{-\beta q} 2^{\beta q(|s|_1+|t|_1)} \|\mathbb{A}_{s,t} f\|_p^q \Bigg)^{\frac{1}{q}} \ll$$

$$\ll \Bigg(\sum_{\substack{|s|_1>m\\|t|_1>m}} 2^{\beta q(|s|_1+|t|_1)} 2^{-m\beta q-\beta q\kappa(2m-|s|_1-|t|_1)} m^{-\beta q(1-d)} \times$$

$$\times\omega(2^{-|s|_1-|t|_1})^q\Bigg)^{\frac{1}{q}} = 2^{-m\beta(1+2\kappa)}m^{\beta(d-1)}\Bigg(\sum_{\substack{|s|_1>m\\|t|_1>m}} 2^{\beta q(|s|_1+|t|_1)}\times$$

$$\times 2^{\beta q\kappa(|s|_1+|t|_1)}\frac{\omega(2^{-|s|_1-|t|_1})^q}{2^{-\alpha q(|s|_1+|t|_1)}}2^{-\alpha q(|s|_1+|t|_1)}\Bigg)^{\frac{1}{q}} \ll$$

$$\ll 2^{-m\beta(1+2\kappa)}m^{\beta(d-1)}\frac{\omega(2^{-2m})}{2^{-2\alpha m}}\Bigg(\sum_{\substack{|s|_1>m\\|t|_1>m}} 2^{-q(|s|_1+|t|_1)(\alpha-\beta-\beta\kappa)}\Bigg)^{\frac{1}{q}} \ll$$

$$\ll 2^{-m\beta(1+2\kappa)}m^{\beta(d-1)}\frac{\omega(2^{-2m})}{2^{-2\alpha m}}2^{-2m(\alpha-\beta-\beta\kappa)}m^{\frac{2(d-1)}{q}} =$$

$$= \omega(2^{-2m})2^{m\beta}m^{(d-1)(\beta+\frac{2}{q})} = \omega(2^{-2m})2^{m(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}m^{(d-1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}+\frac{2}{q})}.$$

Тоді

$$\tau_{2M}(f)_q \ll \omega(2^{-2m})2^{m(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}m^{(d-1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}+\frac{2}{q})}, \qquad (22)$$

Співставляючи (20), (21) і (22), з урахуванням усіх зауважень, отримаємо

$$\tau_M(S^{\Omega}_{p,\theta}B)_q \ll \omega(2^{-2m})2^{m(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}m^{(d-1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}+2(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})_+)}$$

при $1 \le p \le q \le 2$, $q \ne 1$, $1 \le \theta < \infty$.

Теорему доведено.

Наслідок 1. *Поклавши в теоремі $\theta = \infty$, отримаємо відповідні оцінки для класів $S^{\Omega}_p H$, які є узагальненням класів Нікольського H^r_p:*

$$\tau_M(S^{\Omega}_p H)_q \ll \begin{cases}\omega(2^{-2m})m^{2(d-1)}, & p=q=\infty \text{ або } p=q=1,\\ \omega(2^{-2m})2^{m(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}m^{(d-1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}+\frac{2}{q})}, & 1\le p\le q\le 2.\end{cases}$$

Зауваження 1. *У випадку $\Omega(t) = \prod_{j=1}^{d} t_j^r$ і певних обмеженнях на параметр r відповідні результати для класів $B^r_{p,\theta}$ встановлені в роботі* [15].

Зауваження 2. *У випадку* $\Omega(t) = \prod_{j=1}^{d} t_j^r$, $\theta = \infty$ *і певних обмеженнях на параметр* r *відповідні результати для класів* H_p^r *встановлені в роботі* [11].

Література

[1] Бернштейн С. Н. Конструктивная теория функций (1931–1953): Собрание сочинений. — М.: Изд. АН СССР, 1954.— Т. 2 — 626 с.

[2] Бари Н. К., Стечкин С. Б. Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций. — Тр. Моск. мат. о-ва, 1956. — Т. 5.— С. 483–522.

[3] Sun Youngsheng, Wang Heping. Representation and approximation of multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness. — Тр. Мат. ин-та РАН, 1997. — Т. 219. — С. 356–377.

[4] Пустовойтов Н. Н. Представление и приближение периодических функций многих переменных с заданным смешанным модулем непрерывности. — Anal. math., 1994. — Т. 20, N. 1. — P. 35–48.—

[5] Лизоркин П. И., Никольский С. М. Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения. Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1989. — Т. 187.— С. 143–161.

[6] Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. — М.: Наука, 1969. — 480 с.

[7] Стасюк С. А., Федуник О. В. Апроксимативні характеристики класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних. — Укр. мат. журн., 2006. — Т. 58, N. 5. — С. 692–704.

[8] Зигмунд А. Тригонометрические ряды: В 2-х т. / А. Зигмунд. — М.: Мир, 1965. — Т. 1.— 615 с; — Т. 2.— 537 с.

[9] Темляков В. Н. Приближение функций с ограниченной смешанной производной. — Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1986. — Т. 178. — С. 1–112.

[10] Темляков В. Н. Билинейная аппроксимация и близкие вопросы. — Тр. Мат. ин-та РАН, 1991. — Т. 194. — С. 229–248.

[11] Темляков В. Н. Оценки наилучших билинейных приближений периодических функций.— Тр. Мат. ин-та им. В.А.Стеклова АН СССР, 1988.— Т. 181.— С. 250–267.

[12] Темляков В. Н. Приближение периодических функций многих переменных комбинациями функций, зависящих от меньшего числа переменных.— Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1986. — Т. 173. — С. 243–252.

[13] Темляков В. Н. Оценки наилучших билинейных приближений функций двух переменных и некоторые их приложения. — Мат. сб., 1987. — Т. 176, N. 1.— С. 16–33.

[14] Романюк А. С., Романюк В. С. Асимптотические оценки наилучших тригонометрических и билинейных приближений классов функций нескольких переменных.— Укр. мат. журн., 2010. — Т. 62, N. 4.— С. 536 – 551.

[15] Романюк А. С., Романюк В. С. Наилучшие билинейные приближения классов функций многих переменных.— Укр. мат. журн., 2013. — Т. 65, N. 12.— С. 1681–1699.

[16] Романюк А. С. Билинейные и тригонометрические приближения классов Бесова $B^{r}_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных. — Изв. РАН. Сер. мат., 2006. — Т. 70, N. 2. — С. 69–98.

[17] Schmidt E. Zur Theoric der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. I. — Math. Ann., 1907. — T. 63. — P. 433–476.

[18] Temlyakov V. N. Approximation of periodic functions.— New York: Nova Sci. Publl. Inc., 1993. — 419 p.