Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2017, т. 14, № 3, 293–318

УДК 517.5

К. В. Пожарська

Інститут математики НАН України, Київ;
kate.shvai@gmail.com

Оцінки найкращих M-членних тригонометричних наближень класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ періодичних функцій багатьох змінних малої гладкості у просторі L_q

Order estimates are obtained for the best M-term trigonometric approximations of the classes $L^{\psi}_{\boldsymbol{\beta},p}$ of periodic multivariate functions in the case of small smoothness in the space L_q, $1 < p \leq 2 \leq q < \infty$.

Отримано порядкові оцінки найкращих M-членних тригонометричних наближень класів $L^{\psi}_{\boldsymbol{\beta},p}$ періодичних функцій багатьох змінних малої гладкості у просторі L_q, $1 < p \leq 2 \leq q < \infty$.

Вступ

Нехай $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, — d-вимірний евклідів простір і для $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_d) \in \mathbb{R}^d$, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1 y_1 + \cdots + x_d y_d$, $\pi_d = \prod\limits_{j=1}^{d} [-\pi, \pi]$.

Через $L_q(\pi_d)$, $1 \le q \le \infty$, позначимо простір функцій $f(\boldsymbol{x}) = f\left(x_1, \ldots, x_d\right)$, які є 2π–періодичними за кожною змінною, зі скінченною нормою

$$\|f(\cdot)\|_{L_q(\pi_d)} := \|f(\cdot)\|_q = \left((2\pi)^{-d}\int_{\pi_d} |f(\boldsymbol{x})|^q \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)^{\frac{1}{q}}, \quad 1 \le q < \infty,$$

$$\|f(\cdot)\|_{L_\infty(\pi_d)} := \|f(\cdot)\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{\boldsymbol{x}\in\pi_d} |f(\boldsymbol{x})|.$$

Надалі будемо вважати, що для $f \in L_1(\pi_d)$ виконується умова

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x_j = 0, \quad j = \overline{1,d}.$$

Метою роботи є отримання порядкових оцінок найкращих M-членних тригонометричних наближень $e_M\left(L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}\right)_q$ у випадку $1 < p \le 2 \le q < \infty$, при певних обмеженнях на послідовності ψ_j, $j = \overline{1,d}$ (мала гладкість).

Перш за все, означимо апроксимативну характеристику, яка вивчається у роботі.

Отже, найкращим M–членним тригонометричним наближенням функції $f \in L_q(\pi_d)$, $1 \le q \le \infty$, називають величину

$$e_M(f)_q = \inf_{\boldsymbol{k}^j, c_j} \left\| f(\cdot) - \sum_{j=1}^{M} c_j e^{i(\boldsymbol{k}^j,\cdot)} \right\|_q, \tag{1}$$

де $\left\{\boldsymbol{k}^j\right\}_{j=1}^M$ — система векторів $\boldsymbol{k}^j = \left(k_1^j, ..., k_d^j\right)$ із цілочисельними координатами, а c_j, $j = \overline{1,M}$, — довільні комплексні числа.

Аналогічним чином вводяться M-членні тригонометричні наближення і для функціональних класів, а саме, якщо $F \subset L_q(\pi_d)$, то покладають

$$e_M(F)_q = \sup_{f\in F} e_M(f)_q. \tag{2}$$

Величину $e_M(f)_2$ було введено С. Б. Стєчкіним [1] при формулюванні критерію абсолютної збіжності рядів Фур'є. Перші оцінки величини $e_M(f)_\infty$ для деяких індивідуальних функцій були отримані Р. С. Ісмагіловим [2]. Систематичне ж вивчення величини (2) на класах періодичних функцій багатьох змінних $W^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{\beta},p}$ та $H^{\boldsymbol{r}}_p$ було започатковано В. Н. Темляковим [3 – 6]. Згодом дослідження найкращих M-членних тригонометричних наближень для індивідуальних функцій та класів функцій як однієї, так і багатьох змінних, активно проводилося у роботах Е. С. Белінського [7, 8], А. С. Романюка [9 – 15], R. A. De Vore, V. N. Temlyakov [16], Dinh Dung [17, 18], та ін. Більш детальну історію дослідження величин (1), (2) та відповідну бібліографію можна знайти у [13, 15, 19].

У роботі ми знаходимо оцінки найкращих M-членних тригонометричних наближень класів $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$ у метриці простору $L_q(\pi_d)$, при певних умовах на швидкість спадання послідовностей ψ_j, $j=\overline{1,d}$, та обмеженнях на параметри p і q. Дані класи для $d=1$ (одновимірний випадок) були запропоновані О. І. Степанцем (див., наприклад, [20, т. I, с. 132]), а в багатовимірному випадку досліджувалися в роботах [21, 22].

Отже, розглянемо ряд Фур'є функції $f\in L_1(\pi_d)$

$$\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d}\widehat{f}(\boldsymbol{k})e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})},$$

де $\widehat{f}(\boldsymbol{k})=(2\pi)^{-d}\int_{\pi_d}f(\boldsymbol{t})e^{-i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{t})}\mathrm{d}\boldsymbol{t}$ — коефіцієнти Фур'є функції f. Далі, нехай $\psi_j\neq 0$ — довільні функції натурального аргументу, $\beta_j\in\mathbb{R}$, $j=\overline{1,d}$, $\mathring{\mathbb{Z}}^d=(\mathbb{Z}\setminus\{0\})^d$. Припустимо, що ряд

$$\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathring{\mathbb{Z}}^d}\prod_{j=1}^{d}\frac{e^{i\frac{\pi\beta_j}{2}\mathrm{sgn}k_j}}{\psi_j(|k_j|)}\widehat{f}(\boldsymbol{k})e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}$$

є рядом Фур'є деякої сумовної функції $f^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}$. Таку функцію називають (див., наприклад, [20, т. I, с. 132]) $(\boldsymbol{\psi},\boldsymbol{\beta})$–похідною функції f. Через $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$ позначимо клас функцій f, для яких існують $(\boldsymbol{\psi},\boldsymbol{\beta})$–похідні і виконується умова $\left\|f^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}(\cdot)\right\|_p\leq 1$, $1\leq p\leq\infty$.

Зазначимо, що класи $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$ є узагальненням добре відомих класів Вейля–Надя $W^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{\beta},p}$ (див., наприклад, [23, с. 25]) та співпадають з ними при $\psi_j\left(|k_j|\right) = |k_j|^{-r_j}$, $r_j > 0$, $k_j \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $j = \overline{1,d}$.

1. Допоміжні твердження

Перед тим, як перейти до формулювання тверджень, які будемо використовувати при доведенні одержаних результатів, введемо ще деякі позначення.

Отже, через D будемо позначати множину послідовностей ψ, які задовольняють наступні умови:

1. ψ — додатні та незростаючі;
2. $\exists M > 0$ таке, що $\forall l \in \mathbb{N} \quad \frac{\psi(l)}{\psi(2l)} \le M$.

До вказаної множини належать, зокрема, функції $\psi(|k|) = \frac{1}{|k|^r}$, $r > 0$, $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$; $\psi(|k|) = \frac{\ln^\alpha(|k|+1)}{|k|^r}$, $r > 0$, $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, та інші.

Далі, кожному вектору $\boldsymbol{s} = (s_1, \dots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1,d}$, поставимо у відповідність множину

$$\rho(\boldsymbol{s}) = \left\{\boldsymbol{k} = (k_1, \dots, k_d)\colon \quad 2^{s_j - 1} \le |k_j| < 2^{s_j}, \quad j = \overline{1,d}\right\},$$

і для $f \in L_1(\pi_d)$ покладемо

$$\delta_{\boldsymbol{s}}(f, \boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k} \in \rho(\boldsymbol{s})} \widehat{f}(\boldsymbol{k}) e^{i(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{x})},$$

де $\widehat{f}(\boldsymbol{k})$ – коефіцієнти Фур'є функції f.

Також нами буде використовуватися множина $Q_n = \bigcup\limits_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})<n} \rho(\boldsymbol{s})$, $\boldsymbol{1} = (1, \dots, 1) \in \mathbb{N}^d$, яку називають "східчастим гіперболічним хрестом" [5, с. 7]. Відомо, що кількість точок цієї множини за порядком дорівнює $2^n n^{d-1}$ [5, с. 70].

Для встановлення оцінок зверху найкращих M-членних тригонометричних наближень класів $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$ нам знадобляться оцінки найкращих тригонометричних наближень відповідних класів поліномами із множини $T(Q_n) = \left\{ t\colon \quad t(\boldsymbol{x}) = \sum\limits_{\boldsymbol{k}\in Q_n} c_k e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})} \right\}$, які означаються наступним чином:

$$E_n(L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p})_q = \sup_{f\in L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}} \inf_{t\in T(Q_n)} \|f(\cdot) - t(\cdot)\|_q.$$

Для двох невід'ємних послідовностей $\{a(n)\}_{n=1}^{\infty}$ і $\{b(n)\}_{n=1}^{\infty}$ співвідношення (порядкова нерівність) $a(n) \ll b(n)$ означає, що існує стала $C_1 > 0$ така, що $a(n) \leq C_1 b(n)$. Співвідношення $a(n) \asymp b(n)$ рівносильне тому, що $a(n) \ll b(n)$ і $b(n) \ll a(n)$. Зазначимо, що сталі C_i, $i = 1, 2, \ldots$, які далі будуть зустрічатися у порядкових співвідношеннях, можуть залежати лише від тих параметрів, що входять в означення класу та метрики, в якій здійснюється наближення, а також від розмірності простору $\mathbb{R}^d$.

Якщо $\mathfrak{N}$ — деяка скінченна множина, то через $|\mathfrak{N}|$ будемо позначати кількість елементів цієї множини.

Результати роботи будемо формулювати в термінах таких апроксимативних характеристик:

$$\Phi(n) = \min_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})=n} \prod_{j=1}^{d} \psi_j(2^{s_j}), \qquad \Psi(n) = \max_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})=n} \prod_{j=1}^{d} \psi_j(2^{s_j}).$$

Теорема 1. (Літтлвуда-Пелі, див., наприклад, [24, с. 52–56]). *Нехай задано $1 < q < \infty$. Тоді існують такі додатні сталі $C_2(q)$ та $C_3(q)$, що для кожної функції $f \in L_q(\pi_d)$ має місце оцінка*

$$C_2(q)\|f(\cdot)\|_q \leq \left\| \Big(\sum_{\boldsymbol{s}} |\delta_{\boldsymbol{s}}(f, \cdot)|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \right\|_q \leq C_3(q)\|f(\cdot)\|_q.$$

Теорема 2. [25] *Нехай* $1 < p < q < \infty$, $\psi_j \in D$, *і, крім цього,* $\psi_j(|k_j|)|k_j|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$, $j = \overline{1,d}$, *не зростають. Тоді справедливе співвідношення*

$$E_n\left(L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}\right)_q \asymp \Psi(n) 2^{n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}.$$

Зауважимо, що порядок величин $E_n\left(L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}\right)_q$ у цьому випадку реалізують східчасто гіперболічні суми Фур'є виду

$$S_n(f,\boldsymbol{x}) = \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})<n} \delta_{\boldsymbol{s}}(f,\boldsymbol{x}), \qquad f \in L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}.$$

Далі нам знадобиться також співвідношення двоїстості, яке випливає із більш загального результату С. М. Нікольського (див., наприклад, [26, с. 25]).

Теорема 3. *Для будь–якої функції* $f \in L_q(\pi_d)$, $1 \le q < \infty$,

$$e_M(f)_q = \inf_{\theta_M} \sup_{\substack{P\in L^{\perp}(\theta_M),\\ \|P(\cdot)\|_{q'}\le 1}} \left| (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} f(\boldsymbol{x})\overline{P(\boldsymbol{x})}\, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \right|,$$

де $\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1$, θ_M *– набір із* M *різних векторів* $\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^d$, $L^{\perp}(\theta_M)$ *– множина функцій, ортогональна підпростору тригонометричних поліномів з "номерами" гармонік із множини* θ_M, *а* $\overline{P(\boldsymbol{x})}$ *– функція, комплексно-спряжена до* $P(\boldsymbol{x})$.

Теорема 4. [21] *Нехай* $1 < p < \infty$ *і* $\psi_j \in D$, $j = \overline{1,d}$. *Тоді для довільного полінома* t *з "номерами" гармонік із множини* Q_n, *має місце співвідношення*

$$\left\| t^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}(\cdot) \right\|_p \ll \frac{1}{\Phi(n)} \left\| t(\cdot) \right\|_p.$$

Лема 5. [8, с. 20] *Нехай* $2 < q < \infty$. *Тоді для будь-якого тригонометричного полінома* $P(\theta_L;\boldsymbol{x})$, *що містить не більше* L *гармонік, і для довільного* $N < L$ *знайдеться тригонометричний* *поліном* $P(\theta_N; \boldsymbol{x})$, *у якого не більше* N *коефіцієнтів відмінних від нуля, такий що*

$$\|P(\theta_L;\cdot) - P(\theta_N;\cdot)\|_q \ll \left(\frac{L}{N}\right)^{\frac{1}{2}} \|P(\theta_L;\cdot)\|_2 \,,$$

причому $\theta_N \subset \theta_L$.

Будемо використовувати також твердження, яке є наслідком теореми 1 із [21].

Лема 6. [8, с. 20] *Нехай* $1 < p < \infty$, $f \in L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$, $\psi_j \in D$, $j = \overline{1,d}$. *Тоді для будь-якого* $\boldsymbol{s} \in \mathbb{N}^d$ *справедлива оцінка*

$$\|\delta_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_p \asymp \prod_{j=1}^{d} \psi_j(2^{s_j}) \left\|\delta_{\boldsymbol{s}}\left(f^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}},\cdot\right)\right\|_p .$$

Лема 7. [5, с. 28] *При* $1 < q < p \le \infty$, $f \in L_q(\pi_d)$, *справедлива оцінка*

$$\|f(\cdot)\|_q^q \gg \sum_{\boldsymbol{s}} \|\delta_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_p^q \cdot 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)q}.$$

Лема 8. [5, с. 25] *При* $1 \le p < q < \infty$, $f \in L_p(\pi_d)$, *справедлива оцінка*

$$\sum_{\boldsymbol{s}} \|\delta_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_p^q \cdot 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)q} \gg \|f(\cdot)\|_q^q \,.$$

2. Основні результати

Має місце наступне твердження.

Теорема 9. *Нехай* $1 < p \le 2 \le q < \infty$, $\psi_j \in D$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,d}$, *і, крім цього, існує* $\varepsilon > 0$ *таке, що* $\psi_j(|k_j|)|k_j|^{\frac{1}{p}-\varepsilon}$ *не спадають, а* $\psi_j(|k_j|)|k_j|^{q'\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}$ *не зростають. Тоді для будь-яких натуральних* M *і* n, *що задовольняють умову* $M \asymp 2^n n^{d-1}$, *та числа*

$$n_1 = \frac{q}{2}n - \left(\frac{q}{2} - 1\right)(d-1)\log n,$$

справедлива оцінка

$$\Phi([n_1])M^{\frac{q}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}(\log M)^{(d-1)\left(1-\frac{q}{p}\right)} \ll e_M\left(L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}\right)_q \ll$$
$$\ll \Psi([n_1])M^{\frac{q}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}(\log M)^{(d-1)\left(1-\frac{q}{p}\right)}. \tag{3}$$

Доведення. Отримаємо спочатку оцінку зверху. Нехай f — довільна функція із класу $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$, M — задане достатньо велике число. Підберемо число $n \in \mathbb{N}$ так, щоб виконувалося співвідношення $M \asymp 2^n n^{d-1}$ і покладемо

$$n_1 = \frac{q}{2}n - \left(\frac{q}{2}-1\right)(d-1)\log n$$
$$n_2 = \frac{q}{2}n + \frac{q}{2}(d-1)\log n.$$

Далі, розіб'ємо ряд Фур'є функції f на кілька частин, кожна з яких, згідно з теоремою Літтлвуда–Пелі, також належить класу $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$. Отже, нехай

$$f(\boldsymbol{x}) = \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})<n} + \sum_{n\le(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})<[n_1]} + \sum_{[n_1]\le(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})<[n_2]} + \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})\ge[n_2]}\right)\delta_{\boldsymbol{s}}(f,\boldsymbol{x}) =$$
$$= \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})<n} + \sum_{n\le(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})<[n_1]} + \sum_{l=[n_1]}^{[n_2]}\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})=l}{}' + \sum_{l=[n_1]}^{[n_2]}\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})=l}{}'' + \right.$$
$$\left. + \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})\ge[n_2]}\right)\delta_{\boldsymbol{s}}(f,\boldsymbol{x}),$$

де доданок $\sum\limits_{l=[n_1]}^{[n_2]}\sum\limits_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})=l}{}'$ містить m_l "блоків" $\delta_{\boldsymbol{s}}(f,\boldsymbol{x})$ по тих векторах $\boldsymbol{s}=(s_1,\ldots,s_d)$, яким відповідають найбільші значення норм $\left\|\delta_{\boldsymbol{s}}(f^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}},\cdot)\right\|_2$, а доданок $\sum\limits_{l=[n_1]}^{[n_2]}\sum\limits_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})=l}{}''$ — всі ті "блоки", які залишилися. Числа m_l виберемо пізніше.

Будемо наближати функцію f поліномом $P(\theta_M;\boldsymbol{x})$, що складається із її частинної східчастої гіперболічної суми Фур'є функції та деяких поліномів, які будуть сконструйовані в процесі встановлення оцінок. Тобто

$$P(\theta_M;\boldsymbol{x}) = \sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})<n} \delta_{\boldsymbol{s}}\left(f,\boldsymbol{x}\right) + \\ + \sum_{n\le(\boldsymbol{s},\mathbf{1})<[n_1]} P_1(\theta_{N_{\boldsymbol{s}}};\boldsymbol{x}) + \sum_{[n_1]\le(\boldsymbol{s},\mathbf{1})<[n_2]} P_2(\theta_{M_{\boldsymbol{s}}};\boldsymbol{x}).$$

Тоді, згідно з властивостями норми, матимемо

$$\begin{gathered}\left\|f(\cdot) - P\left(\theta_M;\cdot\right)\right\|_q \le \\ \le \left\| \sum_{n\le(\boldsymbol{s},\mathbf{1})<[n_1]} \left(\delta_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot) - P_1\left(\theta_{N_{\boldsymbol{s}}};\cdot\right)\right) \right\|_q + \\ + \left\| \sum_{l=[n_1]}^{[n_2]} \sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=l}{}' \delta_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot) - \sum_{[n_1]\le(\boldsymbol{s},\mathbf{1})<[n_2]} P_2\left(\theta_{M_{\boldsymbol{s}}};\boldsymbol{x}\right) \right\|_q + \\ + \left\| \sum_{l=[n_1]}^{[n_2]} \sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=l}{}'' \delta_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot) \right\|_q + \left\| \sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})\ge[n_2]} \delta_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot) \right\|_q = \\ = I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \end{gathered} \tag{4}$$

Оцінимо окремо кожен із доданків I_1, I_2, I_3, I_4.

Перейдемо до встановлення оцінки доданку I_1. Скориставшись теоремою 1, можемо записати

$$I_1 = \left\| \sum_{n\le(\boldsymbol{s},\mathbf{1})<[n_1]} \left(\delta_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot) - P_1\left(\theta_{N_{\boldsymbol{s}}};\cdot\right)\right) \right\|_q \ll \\ \ll \left\| \left(\sum_{n\le(\boldsymbol{s},\mathbf{1})<[n_1]} \left| \delta_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot) - P_1\left(\theta_{N_{\boldsymbol{s}}};\cdot\right) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_q =$$

$$= \left(\left\| \sum_{n \le (\boldsymbol{s},\mathbf{1}) < [n_1]} \left|\delta_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot) - P_1\left(\theta_{N_{\boldsymbol{s}}};\cdot\right)\right|^2 \right\|_{\frac{q}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \left(\sum_{n \le (\boldsymbol{s},\mathbf{1}) < [n_1]} \left\| \left|\delta_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot) - P_1\left(\theta_{N_{\boldsymbol{s}}};\cdot\right)\right|^2 \right\|_{\frac{q}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\sum_{n \le (\boldsymbol{s},\mathbf{1}) < [n_1]} \left\|\delta_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot) - P_1\left(\theta_{N_{\boldsymbol{s}}};\cdot\right)\right\|_q^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Далі, використавши послідовно леми 5 та 6, отримаємо

$$I_1 \ll \left(\sum_{n \le (\boldsymbol{s},\mathbf{1}) < [n_1]} \frac{2^{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})}}{N_{\boldsymbol{s}}} \left\|\delta_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\right\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \asymp$$

$$\asymp \left(\sum_{n \le (\boldsymbol{s},\mathbf{1}) < [n_1]} \frac{2^{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})}}{N_{\boldsymbol{s}}} \left(\prod_{j=1}^{d} \psi_j(2^{s_j}) \right)^2 \left\| \delta_{\boldsymbol{s}}\left(f_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}},\cdot\right) \right\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (5)$$

Тепер кожному вектору $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_d)$, що задовольняє умову $n \le (\boldsymbol{s},\mathbf{1}) < [n_1]$, поставимо у відповідність числа

$$N_{\boldsymbol{s}} = \left[\frac{2^n n^{d-1}}{2^{\frac{n_1}{p}} n_1^{\frac{d-1}{p'}} \Psi([n_1])} 2^{\frac{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})}{2}} \prod_{j=1}^{d} \psi_j(2^{s_j}) \left\| \delta_{\boldsymbol{s}}(f_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}},\cdot) \right\|_2 \right] + 1,$$

і переконаємося, що при такому виборі чисел $N_{\boldsymbol{s}}$ кількість гармонік у поліномі $\sum\limits_{n \le (\boldsymbol{s},\mathbf{1}) < [n_1]} P_1\left(\theta_{N_{\boldsymbol{s}}};x\right)$ не перевищує за порядком $2^n n^{d-1}$. Дійсно, маємо

$$\sum_{n \le (\boldsymbol{s},\mathbf{1}) < [n_1]} N_{\boldsymbol{s}} \ll n_1^d +$$

$$+ \frac{2^n n^{d-1}}{2^{\frac{n_1}{p}} n_1^{\frac{d-1}{p'}} \Psi([n_1])} \sum_{n \le (\boldsymbol{s},\mathbf{1}) < [n_1]} 2^{\frac{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})}{2}} \left\| \delta_{\boldsymbol{s}}\left(f_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}},\cdot\right) \right\|_2 \prod_{j=1}^{d} \psi_j(2^{s_j}). \qquad (6)$$

Оцінимо спочатку величину під знаком суми у правій частині співвідношення (6). Скориставшись нерівністю Гельдера, матимемо

$$I_5 = \sum_{n \le (\boldsymbol{s},\mathbf{1}) < [n_1]} 2^{\frac{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})}{2}} \left\| \delta_{\boldsymbol{s}}(f^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}, \cdot) \right\|_2 \prod_{j=1}^{d} \psi_j\left(2^{s_j}\right) =$$

$$= \sum_{n \le (\boldsymbol{s},\mathbf{1}) < [n_1]} \left\| \delta_{\boldsymbol{s}}(f^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}, \cdot) \right\|_2 2^{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)} 2^{\frac{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})}{p}} \prod_{j=1}^{d} \psi_j(2^{s_j}) \le$$

$$\le \left(\sum_{n \le (\boldsymbol{s},\mathbf{1}) < [n_1]} \left\| \delta_{\boldsymbol{s}}(f^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}, \cdot) \right\|_2^p 2^{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)p} \right)^{\frac{1}{p}} \times$$

$$\times \left(\sum_{n \le (\boldsymbol{s},\mathbf{1}) < [n_1]} 2^{\frac{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})p'}{p}} \left(\prod_{j=1}^{d} \psi_j(2^{s_j}) \right)^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}}. \tag{7}$$

Далі, застосовуючи до першого множника лему 7 та враховуючи, що послідовність $\psi_j(|k_j|)|k_j|^{\frac{1}{p}-\varepsilon}$ є неспадною, одержимо

$$I_5 \ll \left\| f^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}(\cdot) \right\|_p \left(\sum_{n \le (\boldsymbol{s},\mathbf{1}) < [n_1]} \left(\prod_{j=1}^{d} \psi_j(2^{s_j}) 2^{s_j\left(\frac{1}{p}-\varepsilon\right)} 2^{s_j\varepsilon} \right)^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \le$$

$$\le \Psi([n_1]) 2^{n_1\left(\frac{1}{p}-\varepsilon\right)} \left(\sum_{l=n}^{[n_1]} \sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=l} 2^{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})p'\varepsilon} \right)^{\frac{1}{p'}} \asymp$$

$$\asymp \Psi([n_1]) 2^{n_1\left(\frac{1}{p}-\varepsilon\right)} \left(\sum_{l=n}^{[n_1]} 2^{lp'\varepsilon} l^{d-1} \right)^{\frac{1}{p'}} \asymp$$

$$\asymp \Psi([n_1]) 2^{n_1\left(\frac{1}{p}-\varepsilon\right)} 2^{n_1\varepsilon} n_1^{\frac{d-1}{p'}} = \Psi([n_1]) 2^{\frac{n_1}{p}} n_1^{\frac{d-1}{p'}}. \tag{8}$$

Прийнявши до уваги (8) і повертаючись до (6), будемо мати

$$\sum_{n \le (\boldsymbol{s},\mathbf{1}) < [n_1]} N_{\boldsymbol{s}} \ll \frac{2^n n^{d-1}}{2^{\frac{n_1}{p}} n_1^{\frac{d-1}{p'}} \Psi([n_1])} \Psi([n_1]) 2^{\frac{n_1}{p}} n_1^{\frac{d-1}{p'}} + n_1^d \ll 2^n n^{d-1}.$$

Таким чином, кількість гармонік, що містяться в об'єднанні поліномів $P(\theta_{N_{\boldsymbol{s}}};\boldsymbol{x})$, не перевищує за порядком M.

Тепер, підставляючи значення $N_{\boldsymbol{s}}$ у (5), та використовуючи оцінку (8), отримаємо

$$I_1 \ll$$

$$\ll \left(\sum_{n\le(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})<[n_1]} \frac{2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})} \left(\prod\limits_{j=1}^{d} \psi_j\left(2^{s_j}\right)\right)^2 \left\|\delta_{\boldsymbol{s}}\left(f_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}},\cdot\right)\right\|_2^2 2^{\frac{n_1}{p}} n_1^{\frac{d-1}{p'}}}{2^n n^{d-1} 2^{\frac{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})}{2}} \prod\limits_{j=1}^{d} \psi_j\left(2^{s_j}\right) \left\|\delta_{\boldsymbol{s}}\left(f_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}},\cdot\right)\right\|_2 \Psi([n_1])^{-1}} \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\frac{2^{\frac{n_1}{p}} n_1^{\frac{d-1}{p'}} \Psi([n_1])}{2^n n^{d-1}} \sum_{n\le(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})<[n_1]} 2^{\frac{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})}{2}} \prod_{j=1}^{d} \psi_j\left(2^{s_j}\right) \left\|\delta_{\boldsymbol{s}}\left(f_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}},\cdot\right)\right\|_2 \right)^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll \left(\frac{2^{\frac{n_1}{p}} n_1^{\frac{d-1}{p'}} \Psi([n_1])}{2^n n^{d-1}} \Psi([n_1]) 2^{\frac{n_1}{p}} n_1^{\frac{d-1}{p'}} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\Psi([n_1]) 2^{\frac{n_1}{p}} n_1^{\frac{d-1}{p'}}}{2^{\frac{n}{2}} n^{\frac{d-1}{2}}}. \qquad (9)$$

Далі, підставляючи значення $n_1 = \frac{q}{2}n - \left(\frac{q}{2}-1\right)(d-1)\log n$ та здійснюючи елементарні перетворення, із (9) отримаємо

$$I_1 \ll \frac{\Psi([n_1]) 2^{\frac{q}{2p}n} n^{\frac{d-1}{p'}}}{n^{\frac{\left(\frac{q}{2}-1\right)(d-1)}{p}} 2^{\frac{n}{2}} n^{\frac{d-1}{2}}} = \Psi([n_1]) 2^{\frac{q}{2}n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} n^{\frac{q}{2}(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)}. \qquad (10)$$

Враховуючи, що $M \asymp 2^n n^{d-1}$, із (10) можемо записати

$$I_1 \ll \Psi([n_1]) \left(2^n n^{d-1}\right)^{\frac{q}{2}n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} n^{q(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)} \asymp$$

$$\asymp \Psi([n_1]) M^{\frac{q}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} (\log M)^{(d-1)\left(1-\frac{q}{p}\right)} \qquad (11)$$

Перейдемо до оцінки доданку I_2 із (4).

Згідно з теоремою 1 та лемою 5, отримаємо

$$I_2 = \left\| \sum_{l=[n_1]}^{[n_2]} \sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=l}{}' \delta_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot) - \sum_{[n_1]\le(\boldsymbol{s},\mathbf{1})<[n_2]} P_2\left(\theta_{M_{\boldsymbol{s}}};\boldsymbol{x}\right) \right\|_q \ll$$

$$\ll \left(\sum_{l=[n_1]}^{[n_2]} \sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=l}{}' \frac{2^{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})}}{M_{\boldsymbol{s}}} \|\delta_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{l=[n_1]}^{[n_2]} 2^l \sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=l}{}' M_{\boldsymbol{s}}{}^{-1} \|\delta_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (12)$$

Далі, кожному вектору $\boldsymbol{s} = (s_1,\ldots,s_d)$ такому, що задовольняє умову $[n_1] \le (\boldsymbol{s},\mathbf{1}) < [n_2]$, поставимо у відповідність числа

$$M_{\boldsymbol{s}} = \left[\frac{\left(2^n n^{d-1}\right)^{1-\frac{q'}{2p'}}}{\Psi([n_1]) 2^{n_1 q'\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}} 2^{\frac{l}{2}} \|\delta_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_2 \right] + 1.$$

Переконаємося, що при вказаному виборі чисел $M_{\boldsymbol{s}}$, виконується співвідношення $\sum\limits_{l=[n_1]}^{[n_2]} \sum\limits_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=l}{}' M_{\boldsymbol{s}} \ll 2^n n^{d-1}$.

Дійсно,

$$\sum_{l=[n_1]}^{[n_2]} \sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=l}{}' M_{\boldsymbol{s}} \ll \sum_{l=[n_1]}^{[n_2]} \sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=l}{}' \frac{\left(2^n n^{d-1}\right)^{1-\frac{q'}{2p'}}}{\Psi([n_1]) 2^{n_1 q'\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}} 2^{\frac{l}{2}} \|\delta_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_2 + n_2^d =$$

$$= \frac{\left(2^n n^{d-1}\right)^{1-\frac{q'}{2p'}}}{\Psi([n_1]) 2^{n_1 q'\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}} \sum_{l=[n_1]}^{[n_2]} 2^{\frac{l}{2}} \sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=l}{}' \|\delta_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_2 + n_2^d. \qquad (13)$$

Оцінимо окремо суму у правій частині співвідношення (13).

Застосовуючи лему 6, матимемо

$$I_6 = \sum_{l=[n_1]}^{[n_2]} 2^{\frac{l}{2}} \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})=l}{}' \|\delta_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_2 \ll$$

$$\ll \sum_{l=[n_1]}^{[n_2]} 2^{\frac{l}{2}} \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})=l}{}' \left\|\delta_{\boldsymbol{s}}(f^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}},\cdot)\right\|_2 \prod_{j=1}^{d} \psi_j(2^{s_j}) =$$

$$= \sum_{l=[n_1]}^{[n_2]} 2^{\frac{l}{2}} \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})=l}{}' \left\|\delta_{\boldsymbol{s}}(f^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}},\cdot)\right\|_2 \prod_{j=1}^{d} \psi_j(2^{s_j}) 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}. \tag{14}$$

Згідно з умовою теореми 3, послідовність $\psi_j\left(|k_j|\right)|k_j|^{q'\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}$ не зростає. Тоді не зростає також послідовність $\psi_j\left(|k_j|\right)|k_j|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}$. Дійсно, оскільки $\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1$, тобто $q'=\frac{q}{q-1}$, а $1-\frac{1}{p}=\frac{1}{p'}$, то можемо записати, що

$$q'\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right) = \frac{1}{p} - \frac{q'}{qp'} = \frac{1}{p} - \frac{1}{(q-1)p'}. \tag{15}$$

Звідси бачимо, що при $2 \le q < \infty$ виконується нерівність $q'\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right) \ge \frac{1}{p}-\frac{1}{2}$, і тому робимо висновок, що послідовність $\psi_j\left(|k_j|\right)|k_j|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}$ є незростаючою. Тому для оцінки (14) одержимо

$$I_6 \ll \sum_{l=[n_1]}^{[n_2]} 2^{\frac{l}{2}} \Psi(l) 2^{l\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)} \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})=l}{}' \left\|\delta_{\boldsymbol{s}}\left(f^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}},\cdot\right)\right\|_2 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)}.$$

Далі, застосовуючи нерівність Гельдера та враховуючи, що у внутрішній сумі міститься не більше, ніж m_l доданків, отримаємо

$$I_6 \ll \sum_{l=[n_1]}^{[n_2]} 2^{\frac{l}{p}} \Psi(l) \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})=l}{}' 1^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \times$$

$$\times \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=l}{}' \left\| \delta_{\boldsymbol{s}} \left(f^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}, \cdot \right) \right\|_2^p 2^{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})p} \right)^{\frac{1}{p}} \ll$$

$$\ll \sum_{l=[n_1]}^{[n_2]} \Psi(l) 2^{\frac{l}{p}} \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=l}{}' \left\| \delta_{\boldsymbol{s}} \left(f^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}, \cdot \right) \right\|_2^p 2^{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})p} \right)^{\frac{1}{p}} m_l^{\frac{1}{p'}}. \qquad (16)$$

Тепер, кожному $l \in \mathbb{N}$, $[n_1] \le l < [n_2]$, поставимо у відповідність числа

$$S_l = \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=l} \left\| \delta_{\boldsymbol{s}} \left(f^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}, \cdot \right) \right\|_2^p 2^{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)p} \right)^{\frac{1}{p}} \qquad (17)$$

$$m_l = \left[2^{\frac{q'}{2}n} n^{(d-1)\frac{q'}{2}} S_l^p 2^{\frac{-lq'}{q}} \right]. \qquad (18)$$

Підставляючи значення S_l та m_l у (16), одержимо

$$I_6 \ll \sum_{l=[n_1]}^{[n_2]} \Psi(l) 2^{\frac{l}{p}} S_l 2^{\frac{q'}{2p'}n} n^{(d-1)\frac{q'}{2p'}} S_l^{\frac{p}{p'}} 2^{\frac{-lq'}{qp'}} =$$

$$= \left(2^n n^{d-1}\right)^{\frac{q'}{2p'}} \sum_{l=[n_1]}^{[n_2]} \Psi(l) 2^{\frac{l}{p}} S_l^p 2^{\frac{-lq'}{qp'}}.$$

Враховуючи, що згідно з умовою теореми 9, послідовність $\psi_j\left(|k_j|\right)|k_j|^{\frac{1}{p}-\frac{q'}{qp'}}$ не зростає, матимемо

$$I_6 \ll (2^n n^{d-1})^{\frac{q'}{2p'}} \Psi([n_1]) 2^{n_1\left(\frac{1}{p}-\frac{q'}{qp'}\right)} \sum_{l=[n_1]}^{[n_2]} S_l^p. \qquad (19)$$

Згідно з лемою 7, можемо записати

$$\sum_{l=[n_1]}^{[n_2]} S_l^p = \sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=l} \left\| \delta_{\boldsymbol{s}} \left(f^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}, \cdot \right) \right\|_2^p 2^{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)p} \ll \left\| f^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}(\cdot) \right\|_p^p \le 1. \qquad (20)$$

Тому, продовжимо оцінку (19) величини I_6

$$I_6 = \sum_{l=[n_1]}^{[n_2]} 2^{\frac{l}{2}} \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})=l}{}' \|\delta_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_2 \ll$$

$$\ll \left(2^n n^{d-1}\right)^{\frac{q'}{2p'}} \Psi([n_1]) 2^{n_1\left(\frac{1}{p}-\frac{q'}{qp'}\right)}. \qquad (21)$$

Підставляючи (21) у (13) та беручи до уваги (15), отримаємо

$$\sum_{l=[n_1]}^{[n_2]} \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})=l}{}' M_{\boldsymbol{s}} \ll$$

$$\ll \frac{(2^n n^{d-1})^{1-\frac{q'}{2p'}}}{\Psi([n_1])2^{n_1 q'(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}} (2^n n^{d-1})^{\frac{q'}{2p'}} \Psi([n_1]) 2^{n_1(\frac{1}{p}-\frac{q'}{qp'})} + n_2^d \ll 2^n n^{d-1}.$$

Отже, кількість гармонік в об'єднанні поліномів $P_2(\theta_{M_{\boldsymbol{s}}}; \boldsymbol{x})$ не перевищує за порядком $2^n n^{d-1}$.

Оцінимо тепер доданок I_2. Підставляючи у (12) значення для $M_{\boldsymbol{s}}$ та використовуючи оцінку (21), матимемо

$$I_2 \ll \left(\sum_{l=[n_1]}^{[n_2]} 2^l \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})=l}{}' \frac{\Psi([n_1])2^{n_1 q'(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|\delta_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_2^2}{(2^n n^{d-1})^{1-\frac{q'}{2p'}} 2^{\frac{l}{2}} \|\delta_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_2} \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\frac{\Psi([n_1])2^{n_1 q'(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}}{(2^n n^{d-1})^{1-\frac{q'}{2p'}} 2^{\frac{l}{2}}} \sum_{l=[n_1]}^{[n_2]} 2^{\frac{l}{2}} \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})=l}{}' \|\delta_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_2 \right)^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll \left(\frac{\Psi([n_1])2^{n_1 q'(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}}{(2^n n^{d-1})^{1-\frac{q'}{2p'}} 2^{\frac{l}{2}}} (2^n n^{d-1})^{\frac{q'}{2p'}} \Psi([n_1]) 2^{n_1(\frac{1}{p}-\frac{q'}{qp'})} \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \Psi([n_1]) 2^{n_1 q'(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} (2^n n^{d-1})^{\frac{q'}{2p'}-\frac{1}{2}}. \qquad (22)$$

Далі, врахувавши, що $n_1 = \frac{q}{2}n - \left(\frac{q}{2}-1\right)(d-1)\log n$, а $M \asymp 2^n n^{d-1}$, та виконавши елементарні перетворення, продовжимо оцінку (22)

$$I_2 \ll \Psi([n_1]) 2^{\frac{qq'}{2} n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} n^{-\left(\frac{q}{2}-1\right)(d-1)q'\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \left(2^n n^{d-1}\right)^{\frac{q'}{2p'}-\frac{1}{2}} =$$

$$= \Psi([n_1]) 2^{\frac{q}{2} n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} n^{-\frac{q}{2}(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} =$$

$$= \Psi([n_1]) \left(2^n n^{d-1}\right)^{\frac{q}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} n^{-(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)q} \asymp$$

$$\asymp \Psi([n_1]) M^{\frac{q}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} (\log M)^{(d-1)\left(1-\frac{q}{p}\right)}. \tag{23}$$

Перейдемо тепер до оцінки третього доданку із правої частини співвідношення (4):

$$I_3 = \left\| \sum_{l=[n_1]}^{[n_2]} \sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=l}'' \delta_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot) \right\|_q . \tag{24}$$

Для цього занумеруємо "блоки" $\delta_{\boldsymbol{s}}(f,\boldsymbol{x})$, які містяться в I_3, в порядку спадання норм $\left\|\delta_{\boldsymbol{s}}\left(f_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}},\cdot\right)\right\|_2$ і позначимо їх $\alpha_i(f,l)$, $i = 1, 2, \ldots$.

Тоді, згідно з означенням (17) величин S_l, запишемо

$$S_l^p = \sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=l} \left\|\delta_{\boldsymbol{s}}\left(f_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\psi}},\cdot\right)\right\|_2^p 2^{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)p} \gg 2^{l\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)p} \left(\alpha_i(f,l)^p \cdot i\right).$$

Звідси, отримаємо

$$S_l \gg 2^{l\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)} \alpha_i(f,l) \cdot i^{\frac{1}{p}},$$

тобто

$$\alpha_i(f,l) \ll i^{-\frac{1}{p}} 2^{-l\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)} S_l. \tag{25}$$

Тепер, використовуючи послідовно леми 8 та 6, із (24) одержимо

$$I_3 \ll \left(\sum_{l=[n_1]}^{[n_2]} \sum\nolimits''_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=l} \|\delta_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_2^q \, 2^{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)q} \right)^{\frac{1}{q}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{l=[n_1]}^{[n_2]} \sum\nolimits''_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=l} \left\|\delta_{\boldsymbol{s}}(f^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}},\cdot)\right\|_2^q \left(\prod_{j=1}^{d} \psi_j(2^{s_j}) \right)^q 2^{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})q} \right)^{\frac{1}{q}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{l=[n_1]}^{[n_2]} \sum\nolimits''_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=l} \left\|\delta_{\boldsymbol{s}}(f^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}},\cdot)\right\|_2^p \left\|\delta_{\boldsymbol{s}}(f^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}},\cdot)\right\|_2^{q-p} \Psi(l)^q 2^{l(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})q} \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{26}$$

Враховуючи, що в I_3 містяться норми $\left\|\delta_{\boldsymbol{s}}(f^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}},\cdot)\right\|_2$ починаючи з номера m_l, і використовуючи співвідношення (25) та (17), із (26) отримаємо

$$I_3 \ll \left(\sum_{l=[n_1]}^{[n_2]} \sum_{i>m_i} \alpha_i(f,l)^p \alpha_i(f,l)^{q-p} \Psi(l)^q 2^{l\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)q} \right)^{\frac{1}{q}} \ll$$

$$\left(\sum_{l=[n_1]}^{[n_2]} m_l^{-\frac{q-p}{p}} 2^{-l(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})q} 2^{l(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})p} S_l^{q-p} \Psi(l)^q 2^{l(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})q} \sum_{i>m_i} \alpha_i(f,l)^p \right)^{\frac{1}{q}} \ll$$

$$\left(\sum_{l=[n_1]}^{[n_2]} m_l^{-\frac{q-p}{p}} 2^{lq(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \Psi(l)^q S_l^{q-p} \sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})=l} \left\|\delta_{\boldsymbol{s}}\left(f^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}},\cdot\right)\right\|_2^p 2^{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})p} \right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left(\sum_{l=[n_1]}^{[n_2]} m_l^{-\frac{q-p}{p}} 2^{lq\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \Psi(l)^q S_l^{q-p} S_l^p \right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left(\sum_{l=[n_1]}^{[n_2]} m_l^{-\frac{q-p}{p}} 2^{lq\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \Psi(l)^q S_l^q \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{27}$$

Тепер, підставляючи в (27) значення величин m_l із (18) та здійснюючи елементарні перетворення, будемо мати

$$I_3 \ll \left(\sum_{l=[n_1]}^{[n_2]} \left(2^{\frac{q'}{2}n} n^{(d-1)\frac{q'}{2}} S_l^p 2^{\frac{-lq'}{q}} \right)^{\frac{p-q}{p}} 2^{lq\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \Psi(l)^q S_l^q \right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= 2^{\frac{q'n(p-q)}{2pq}} n^{\frac{(d-1)(p-q)q'}{2pq}} \left(\sum_{l=[n_1]}^{[n_2]} S_l^p \Psi(l)^q 2^{lqq'\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{28}$$

За умовою теореми 9, послідовність $\psi_j\left(|k_j|\right)|k_j|^{q'\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}$ не зростає. Тому, враховуючи (20), із (28) отримаємо

$$I_3 \ll 2^{\frac{q'n(p-q)}{2pq}} n^{\frac{(d-1)(p-q)q'}{2pq}} \Psi([n_1]) 2^{n_1 q'\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}. \tag{29}$$

Підставляючи в (29) значення $n_1 = \frac{q}{2}n - \left(\frac{q}{2}-1\right)(d-1)\log n$, та виконуючи необхідні перетворення, матимемо

$$I_3 \ll 2^{\frac{q'}{2}n(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})} n^{\frac{(d-1)q'}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})} \Psi([n_1]) 2^{\frac{q}{2}nq'(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} n^{-(\frac{q}{2}-1)(d-1)q'(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} =$$

$$= \Psi([n_1]) 2^{\frac{q}{2}n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} n^{-\frac{q}{2}(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}.$$

Враховуючи, що $M \asymp 2^n n^{d-1}$, запишемо оцінку для доданку I_3

$$I_3 \ll \Psi([n_1]) \left(2^n n^{d-1}\right)^{\frac{q}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} n^{-(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)q} \asymp$$

$$\asymp \Psi([n_1]) M^{\frac{q}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} (\log M)^{(d-1)\left(1-\frac{q}{p}\right)}. \tag{30}$$

Для завершення оцінки зверху залишилося оцінити доданок I_4 із співвідношення (4). Скориставшись результатом теореми 1 (див. зауваження), можемо записати

$$I_4 \le \sup_{f \in L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}} \left\| f(\cdot) - \sum_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})<[n_2]} \delta_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot) \right\|_q \ll \Psi([n_2]) 2^{n_2\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}. \tag{31}$$

Тоді, враховуючи, що, згідно з умовою теореми 9, послідовність $\psi_j\left(|k_j|\right)|k_j|^{q'\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}$ не зростає, а числа n_1 та n_2 вибрані так, що n_1 менше за n_2, отримаємо

$$I_4 \ll \Psi([n_2])2^{n_2q'\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}2^{-n_2q'\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}2^{n_2\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \leq$$
$$\leq \Psi([n_1])2^{(n_1-n_2)q'\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}2^{n_2\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}. \tag{32}$$

Підставляючи значення чисел n_1 і n_2 та здійснюючи елементарні перетворення, будемо мати

$$I_4 \ll \Psi([n_1])\left(2^n n^{d-1}\right)^{\frac{q}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} n^{(d-1)\left(1-\frac{q}{p}\right)} \asymp$$
$$\asymp \Psi([n_1])M^{\frac{q}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}(\log M)^{(d-1)\left(1-\frac{q}{p}\right)}. \tag{33}$$

Об'єднуючи оцінки (4), (11), (23), (30) та (33), отримаємо

$$\|f(\cdot)-P\left(\theta_M;\cdot\right)\|_q \ll \Psi([n_1])M^{\frac{q}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}(\log M)^{(d-1)\left(1-\frac{q}{p}\right)}.$$

Оцінку зверху доведено.

Для встановлення оцінки знизу, підберемо функції f_1 та $\tilde{P}$ відповідно до умов теореми 3. Для цього розглянемо східчасто–гіперболічне ядро Діріхле

$$D_l(\boldsymbol{x}) = \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})\leq l}\ \sum_{\boldsymbol{k}\in\rho(\boldsymbol{s})} e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})},$$

де число $l \in \mathbb{N}$ задовольняє умову $l \geq \frac{q}{2}\log M - (d-1)(q-1)\log\log M$.

Відомо [27], що

$$\|D_l(\cdot)\|_p \asymp 2^{l\left(1-\frac{1}{p}\right)} l^{\frac{d-1}{p}}, \qquad 1<p<\infty. \tag{34}$$

Тому, скориставшись теоремою 4, знайдемо

$$\left\|(D_l(\cdot))^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta}}\right\|_p \ll \frac{1}{\Phi(l)}2^{l\left(1-\frac{1}{p}\right)} l^{\frac{d-1}{p}}.$$

Таким чином, функція

$$f_1(\boldsymbol{x}) = C_4 \Phi(l) 2^{l\left(\frac{1}{p}-1\right)} l^{-\frac{d-1}{p}} D_l(\boldsymbol{x}).$$

з відповідною сталою $C_4 > 0$ належить класу $L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}$.

Далі, розглянемо поліном

$$\tilde{P}(\boldsymbol{x}) = C_5 \left(2^{\frac{l}{q}} l^{\frac{d-1}{q'}} + M^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} \left(D_l(\boldsymbol{x}) - \sum_{\boldsymbol{k}\in\theta_M}{}' e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}\right), \quad C_5 > 0,$$

де штрих означає, що підсумовування виконується тільки за тими $\boldsymbol{k} \in \theta_M$, які містяться в D_l. Покажемо, що поліном $\tilde{P}$ задовольняє умови теореми 3.

Оскільки $q' \le 2$, то, беручи до уваги властивості норми, співвідношення (34), та рівність Парсеваля, одержимо

$$\|P(\cdot)\|_{q'} \le \left(2^{\frac{l}{q}} l^{\frac{d-1}{q'}} + M^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} \left(\|D_l(\cdot)\|_{q'} + \left\|\sum_{\boldsymbol{k}\in\theta_M}{}' e^{i(\boldsymbol{k},\cdot)}\right\|_2\right) \ll$$

$$\ll \left(2^{\frac{l}{q}} l^{\frac{d-1}{q'}} + M^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} \left(2^{\frac{l}{q}} l^{\frac{d-1}{q'}} + \left(\sum_{\boldsymbol{k}\in\theta_M}{}' 1\right)^{\frac{1}{2}}\right) \ll$$

$$\ll \left(2^{\frac{l}{q}} l^{\frac{d-1}{q'}} + M^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} \left(2^{\frac{l}{q}} l^{\frac{d-1}{q'}} + M^{\frac{1}{2}}\right) = 1.$$

Отже, поліном $\tilde{P}$ з відповідною сталою $C_5 > 0$ задовольняє умови теореми 3, і таким чином, згідно з цією теоремою, можемо записати

$$e_M\left(L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}\right)_q \gg \Phi(l) 2^{l\left(\frac{1}{p}-1\right)} l^{-\frac{d-1}{p}} \left(2^{\frac{l}{q}} l^{\frac{d-1}{q'}} + M^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} \times$$

$$\times \left|\int_{\pi_d} \left(D_l(\boldsymbol{x}) - \sum_{\boldsymbol{k}\in\theta_M}{}' e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}\right) D_l(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}\boldsymbol{x}\right| \gg$$

$$\gg \frac{\Phi(l)2^{l\left(\frac{1}{p}-1\right)}l^{-\frac{d-1}{p}}}{2^{\frac{l}{q}}l^{\frac{d-1}{q'}}+M^{\frac{1}{2}}}\left(\|D_l(\cdot)\|_2^2-\Bigg\|\sum_{\boldsymbol{k}\in\theta_M}{}'e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}\Bigg\|_2^2\right)\gg$$

$$\gg \frac{\Phi(l)2^{l\left(\frac{1}{p}-1\right)}l^{-\frac{d-1}{p}}}{2^{\frac{l}{q}}l^{\frac{d-1}{q'}}+M^{\frac{1}{2}}}\left(2^l l^{d-1}-M\right). \qquad (35)$$

Отже, враховуючи вибір l, одержимо

$$2^l \geq M^{\frac{q}{2}}(\log M)^{-(q-1)(d-1)}, \qquad 2^{\frac{l}{q}}l^{\frac{d-1}{q'}}\gg M^{\frac{1}{2}},$$

і, таким чином, із (35) будемо мати

$$e_M\left(L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}\right)_q \gg \frac{\Phi(l)2^{l\left(\frac{1}{p}-1\right)}l^{-\frac{d-1}{p}}}{2^{\frac{l}{q}}l^{\frac{d-1}{q'}}}2^l l^{d-1}=\Phi(l)2^{l\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}l^{-(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\gg$$

$$\gg \Phi\left([n_1]\right)M^{\frac{q}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}(\log M)^{(d-1)\left(1-\frac{q}{p}\right)}. \qquad (36)$$

Оцінку знизу, а отже і теорему 9, доведено.

Зауваження 1. *В одновимірному випадку з результату теореми* 9 *випливає точна за порядком оцінка величини* $e_M\left(L^{\psi_1}_{\beta,p}\right)_q$ [28], *а саме:*

Нехай $1<p\leq 2\leq q<\infty$, $\psi_1\in D$, $\beta\in\mathbb{R}$, *і, крім цього, існує* $\varepsilon>0$ *таке, що* $\psi_1(|k|)\,|k|^{\frac{1}{p}-\varepsilon}$ *не спадає, а* $\psi_1(|k|)\,|k|^{q'\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}$ *не зростає. Тоді справедлива оцінка*

$$e_M\left(L^{\psi_1}_{\beta,p}\right)_q \asymp \psi_1\left(M^{\frac{q}{2}}\right)M^{\frac{q}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}.$$

Зауваження 2. *У випадку, коли* $\psi_j(|k_j|)=|k_j|^{-r}$, $k_j\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $j=\overline{1,d}$, *з теореми 9 випливає точна за порядком оцінка величини* $e_M\left(W^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{\beta},p}\right)_q$ [8], *а саме:*

Для $1 < p \leq 2 \leq q < \infty$, $q'\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) < r < \frac{1}{p}$, *справедливе співвідношення*

$$e_M\left(W^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{\beta},p}\right)_q \asymp M^{-\frac{q}{2}\left(r-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)}\left(\log M\right)^{(d-1)(q-1)\left(r-q'\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\right)}.$$

Зауваження 3. *У випадку* $1 < p \leq 2 \leq q < \infty$, *але при інших умовах на швидкість спадання послідовності* ψ_j, $j = \overline{1,d}$, *(велика гладкість) для* $e_M\left(L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}\right)_q$ *справедлива оцінка* [22].

Нехай $1 < p \leq 2 \leq q < \infty$, $\psi_j \in D$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,d}$, *і, крім цього, існує* $\varepsilon > 0$ *таке, що* $\psi_j\left(|k_j|\right)|k_j|^{\frac{1}{p}+\varepsilon}$ *не зростають. Тоді для будь-яких натуральних* M *і* n, *що задовольняють умову* $M \asymp 2^n n^{d-1}$, *має місце співвідношення*

$$\Phi(n) M^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}\left(\log M\right)^{(d-1)\left(1-\frac{2}{p}\right)} \ll e_M\left(L^{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{\beta},p}\right)_q \ll$$
$$\ll \Psi(n) M^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}\left(\log M\right)^{(d-1)\left(1-\frac{2}{p}\right)}.$$

Література

[1] Стечкин С. Б. Об абсолютной сходимости ортогональных рядов. — Докл. АН СССР, 1955. — Т. 102, N. 1. — С. 37–40.

[2] Исмагилов Р. С. Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими многочленами. — Успехи мат. наук, 1974. — Т. 29, N. 3. — С. 161–178.

[3] Темляков В. Н. О приближении периодических функций многих переменных. — Докл. АН СССР, 1984. — Т. 279, N. 2. — С. 301–305.

[4] Темляков В. Н. Приближение периодических функций нескольких переменных тригонометрическими полиномами и поперечники некоторых классов функций. — Изв. АН СССР, Сер. мат., 1985. — Т. 49, N. 5. — С. 986–1030.

[5] Темляков В. Н. Приближение функций с ограниченной смешанной производной. — Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1986. — Т. 178. — С. 1–112.

[6] Temlyakov V. N. Greedy Algorithms and M-Term Approximation with Regard to Redundant Dictionaries. — J. of Approx. Theory, 1999. — T. 98, N. 1. — C. 117–145.

[7] Белинский Э. С. Приближение периодических функций многих переменных "плавающей"системой экспонент и тригонометрические поперечники. — Докл. АН СССР, 1985. — Т. 284, N. 6. — С. 1294–1297.

[8] Белинский Э. С. Приближение "плавающей"системой экспонент на классах периодических функций с ограниченной смешанной производной. Исследование по теории функций многих вещественных переменных. — Ярославль : Яросл. ун–т, 1988. — С. 16–33.

[9] Романюк А. С. О приближении классов периодических функций многих переменных. — Укр. мат. журн., 1992. — Т. 44, N. 5. — С. 662–672.

[10] Романюк А. С. Наилучшие тригонометрические и билинейные приближения функций многих переменных из классов $B^r_{p,\theta}$ I. — Укр. мат. журн., 1992. — Т. 44, N. 11. — С. 1535–1547.

[11] Романюк А. С. О наилучших тригонометрических приближениях и колмогоровских поперечниках классов Бесова функций многих переменных. — Укр. мат. журн., 1993. — Т. 45, N. 5. — С. 663–675.

[12] Романюк А. С. Наилучшие тригонометрические и билинейные приближения функций многих переменных из классов $B^r_{p,\theta}$ II. — Укр. мат.журн., 1993. — Т. 45, N. 10. — С. 1411–1423.

[13] Романюк А. С. Наилучшие M-членные тригонометрические приближения классов Бесова периодических функций многих переменных. — Изв. РАН. Сер. мат., 2003. — Т. 67, N. 2. — С. 61–100.

[14] Романюк А. С. Билинейные и тригонометрические приближения классов Бесова $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных. — Изв. РАН. Сер. мат., 2006. — Т. 70, N. 2. — С. 69–98.

[15] Романюк А. С. Аппроксимативные характеристики классов периодических функций многих переменных. — Праці Ін–ту математики НАН України, 2012. — Т. 93. — 352 с.

[16] Nonlinear Approximation in Finite-Dimensional Spaces / R. A. De Vore, V. N. Temlyakov // J. of Complexity — 1997. — T. 13. — C. 489–508.

[17] Dung Dinh On Asymptotic Orders of n-Term Approximations and Non-Linear n-Widths. — Vietnam J. of Mathematics, 1999. — T. 27, N. 4. — C. 363–367.

[18] Dung Dinh Continuons Algorithms in n-Term Approximation and Non-Linear-Widths. — J. of Approximation Theory, 2000. — T. 102. — C. 217–242.

[19] Hyperbolic Cross Approximation / Dinh Dung, V. N. Temlyakov, T. Ullrich // arXiv: 1601.03978v1 [math.NA] — 2016/01/15.

[20] Степанец А. И. Методы теории приближений: В 2 т. — Киев : Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Т. 1. — 427 с. — Т. 2. — 468 с.

[21] Романюк А. С. Неравенства для L_p-норм (ψ, β)-производных и поперечников по Колмогорову классов функций многих переменных $L^{\psi}_{\beta,p}$. Исследования по теории аппроксимации функций : Сб. науч. тр. — Киев : Ин-т математики АН УССР, 1987. — С. 92–105.

[22] Консевич Н. М. Найкращі M – членні тригонометричні наближення класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у просторі L_q. Крайові задачі для диференціальних рівнянь — К. : Ін-т математики НАН України, 1998. — Т. 3. — С. 204 – 219.

[23] Степанец А. И. Классификация и приближение периодических функций. — Киев : Наук. думка, 1987. — 268 с.

[24] Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. — М. : Наука, 1977. — 456 с.

[25] Романюк А. С. Приближение периодических функций в метрике L_q. Приближение периодических функций в метрике пространства L_p. — Киев : Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 87.47, 1987. — 59 с.

[26] Корнейчук Н. П. Экстремальные задачи теории приближения. — М. : Наука, 1976. — 320 с.

[27] Галеев Э. М. Порядковые оценки производных периодического многомерного α–ядра Дирихле в смешаной норме. — Мат. сб., 1982. — Т. 117 (159), N. 1. — С. 32 – 43.

[28] Федоренко А. С. Наилучшие m–членные тригонометрические приближение функций классов (ψ, β)-дифференцируемых функций одной переменной. — Укр. мат.журн., 2000. — Т. 52, N. 6. — С. 850 – 855.