Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2017, т. 14, № 3, 271–292

УДК 517.938

І. Л. Нижник

Інститут математики НАН України, Київ;
nizhnik@imath.kiev.ua

Аномальна дифузія в динамічних системах з відбиттям

In this paper, we study generalized billiards inside a strip with a nonideal reflection law in the case where the reflection angle depends not only on the incident angle but also on the reflection point. We give effective conditions for such billiards to have the Bernoulli property. Examples of deterministic diffusion are considered. We also study transport properties of the billiards with a stochastic reflection law.

У роботі отримані достатні умови існування властивості Бернуллі в узагальнених більярдах з неідеальним законом відбиття. Розглянуто ряд важливих конкретних прикладів. Досліджена детермінована дифузія в динамічних системах з відбиттям. Встановлені достатні умови, коли детермінована дифузія аномальна.

1. Вступ

Траєкторії більярдної кулі на плоскому обмеженому більярдному полі зі складною межею зазвичай мають складну структуру навіть при простому законі відбиття, який каже, що *кут відбиття дорівнює куту падіння.* До теперішнього часу досить детальне вивчення поведінки траєкторій було зроблене для більярдів в обмежених плоских областях. Сюди входять більярди Біргоффа, Сіная, Бунімовича, більярди-багатокутники та багато інших, див. [1–5].

Пізніше було проведено обширне вивчення траєкторій більярдної кулі у нескінченній області з нетривіальною *періодичною* структурою на межі області, див. [6 – 8]. У такому випадку, уся траєкторія кулі повністю визначається координатами двох послідовних точок відбиття.

Модель для певної поведінки більярдної кулі всередині смужки була запропонована у [9] у випадку, коли закон відбиття кулі від прямолінійного сегменту є узагальненням ідеального закону відбиття. Ця модель узагальненого більярду може бути корисною для вивчення раніше згаданих моделей [6 – 8]. Випадок неідеального просторово–періодичного закону був запропонований у [9]. У цій роботі детально описаний випадок, коли періодична точкова гратка розбиває сторони на послідовність відмічених відрізків, і, коли куля відбивається у довільній точці відміченого інтервалу, кут відбиття визначається кутом падіння та положенням точки всередині інтервалу, тобто локальної координати точки відбиття. Сукупність відмічених інтервалів дає розбиття фазового простору. Для таких узагальнених більярдів траєкторія формується набором відрізків, які поєднують послідовні точки відбиття. Точки відбиття кодують послідовність відмічених інтервалів, що містять ці точки. Сукупність цих відмічених інтервалів або їх індексів називається *маршрутом траєкторії* у символьній динаміці [10]. Кажуть, що більярд з вищенаведеним законом відбиття має властивість Бернуллі відносно заданого розбиття, якщо будь-яка впорядкована послідовність відмічених інтервалів є маршрутом певної траєкторії більярду і ця траєкторія *единим чином* визначена її маршрутом.

Зазначимо, що сукупність усіх точок відбиття утворює дискретну динамічну систему, яка може бути корисною при розгляді різних прикладних задач [12 – 14].

Головні результати у [9] полягають у конструктивному описі законів відбиття, періодичних вздовж межі і таких, що більярд має властивість Бернуллі. У роботі [9] наведені приклади чисельно розрахованих більярдних траєкторій для випадку спеціального неідеального закону відбиття. Зокрема, побудовані більярдні траєкторії, що мають змінний просторовий період, а також циклічні та хаотичні траєкторії.

В даній роботі наводяться приклади, що показують: нескінченне значення першого моменту випадкового закону відбиття може слугувати однією з причин появи аномальної дифузії.

2. Більярди у нескінченній смузі з неідеальним законом відбиття

Розглянемо більярд у нескінченній смузі $S_h = \{(x, y) : -\infty < x < +\infty, 0 \leq y \leq h\}$, і припустимо, що закон відбиття кулі від границі неідеальний; однак, ми припускаємо, що закон відбиття єдиним чином визначається кутом падіння та координатою точки відбиття. У цьому випадку, якщо позначити через x_k координати послідовних точок відбиття, бачимо, що траєкторія γ є об'єднанням відрізків, які поєднують послідовні точки відбиття.

У більярді, що розглядається, є однозначна відповідність між кутами падіння (у точках відбиття) та відстанями уздовж осі x між координатами сусідніх точок відбиття. Отже, закон відбиття на кожній з меж більярду може бути заданий рівнянням

$$f(x_{k+1} - x_k,\ x_k - x_{k-1},\ x_k) = 0. \tag{1}$$

Тому, задання функції трьох змінних f дає загальний закон відбиття. Якщо у цьому законі перший та другий аргументи можуть бути знайдені за двома іншими, тобто вони є функціями від інших аргументів, то закон (1) визначає усю траєкторію більярду за двома даними сусідніми точками відбиття єдиним чином. Як наслідок, ми маємо послідовність точок відбиття $\{x_k |\ k \in \mathbf{Z}\}$, нескінченну в обох напрямках і яка задовольняє рівняння (1). Отже, ми отримуємо дискретну динамічну систему, яка є цікавою сама по собі.

Ми вивчатимемо закони відбиття, задані (1) та які є періодичними уздовж межі з періодом 1. Це означає, що функція $f(x, y, \xi)$ у (1) є періодичною по третьому аргументу з періодом 1, $f(x, y, \xi + 1) = f(x, y, \xi)$. В цьому випадку зручно визначити скінченну кількість відмічених інтервалів $I_n = \{x : n - 1/2 < x < n + 1/2\}$, $n \in \mathbf{Z}$ на межі більярду, тобто зробити розбиття фазового простору [10] динамічної системи визначеної за допомогою (1) системою інтервалів I_n, $n \in \mathbf{Z}$. Таке розбиття дозволяє ввести локальні координати ξ_k точок відбиття x_k на відмічених інтервалах I_{s_k},

$$x_k = s_k + \xi_k, \ \ -1/2 < \xi_k < 1/2, \ \ s_k \in \mathbf{Z}, \ x_k \in I_{s_k}. \tag{2}$$

Закон відбиття (1) завдяки (2) приймає форму

$$f(x_{k+1} - x_k, x_k - x_{k-1}, \xi_k) = 0. \tag{3}$$

Кожній більярдній траєкторії γ відповідає нескінченний в обох напрямках маршрут $S(\gamma)$ [10], який є послідовністю цілочисельних індексів відмічених інтервалів, які містять послідовні точки відбиття траєкторії γ,

$$S(\gamma) = ...s_{-2}, s_{-1}, s_0, \ s_1, s_2, ... \tag{4}$$

Число s_0 відповідає інтервалу I_{s_0}, який містить точку відбиття x_0. Отже, кожній більярдній траєкторії γ відповідає нескінченне в обидві сторони слово з алфавітом $\mathbf{Z}$.

Важливою задачею при описі динамічної системи (3) є наступна задача: для якого слова типу (4) існує більярдна траєкторія, тобто які маршрути допустимі? Якщо всі маршрути прийнятні, тоді кажуть, що динамічна система задовольняє властивість Бернуллі відповідно до заданого розбиття фазового простору.

Далі наведемо простий критерій, коли динамічна система виду (3) має властивість Бернуллі відповідно до розбиття I_n, $n \in \mathbf{Z}$.

Теорема 1. [9] *Припустимо, що закон відбиття* (3) *може бути записаний як*

$$\xi_k = g(x_{k+1} - x_k, x_k - x_{k-1}), \qquad x_k \in I_{s_k}, \tag{5}$$

де функції $g(x,y)$ *двох змінних приймають усі можливі значення, строго менші за модулем від* $1/2$ *та задовольняють умову Ліпшиця зі сталою* q, *меншою від* $1/4$, *тобто*

$$|g(x_2,\ y_2) - g(x_1,\ y_1)| \le q(|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|), \qquad q < 1/4\,. \tag{6}$$

Тоді узагальнений більярд із законом відбиття (5) *має властивість Бернуллі, тобто для будь-якої нескінченної в обидва напрямки послідовності цілих чисел* (4) *існує траєкторія* γ *така, що послідовні точки відбиття* x_k *лежать на заданих відмічених інтервалах* I_{s_k}, *і така траєкторія єдина.*

Доведення. Кожна траєкторія більярду γ з точками відбиття x_k і законом відбиття (5) має відповідні локальні координати ξ_k, що задовольняють рівняння

$$\xi_k = g\big(s_{k+1} - s_k + \xi_{k+1} - \xi_k,\ s_k - s_{k-1} + \xi_k - \xi_{k-1}\big). \tag{7}$$

Навпаки, розв'язки рівняння (7) з даними цілими числами s_k та умовою $-1/2 < \xi_k < 1/2$ породжують динамічну систему $\{x_k\}$ відповідно з формулою (2), і тому вони також породжують траєкторію більярду γ, що задовольняє закон відбиття (5).

Для доведення теореми достатньо показати, що для будь-якої послідовності цілих чисел s_k, рівняння (7) має розв'язок і такий розв'язок єдиний в просторі $\ell_\infty(\mathbf{Z})$ нескінченних послідовностей з нормою $\|\ \xi\ \|_{\ell_\infty} = \sup\limits_{\mathbf{k}} |\xi_{\mathbf{k}}|$, де $\xi = \{\xi_k |\ k \in \mathbf{Z}\}$ та $|\xi_k| < 1/2$. Рівняння (7) має вигляд $\xi = \mathcal{A}(\xi)$, де оператор $\mathcal{A}$ визначений правою частиною рівняння (7),

$$\mathcal{A}(\xi)_k = g(m_k + \xi_{k+1} - \xi_k,\, m_{k-1} + \xi_k - \xi_{k-1}),$$

де $m_k = s_{k+1} - s_k$. За припущенням (6), оператор A є оператором стискання у просторі l_∞,

$$||A(\eta) - A(\xi)||_{l_\infty} =$$

$$= \sup_k |g(m_k + \eta_{k+1} - \eta_k,\ m_{k-1} + \eta_k - \eta_{k-1}) -$$

$$- g(m_k + \xi_{k+1} - \xi_k,\ m_{k-1} + \xi_k - \xi_{k-1})| \leq$$

$$\leq q \sup_k (|\eta_{k+1} - \xi_{k+1}| + 2|\eta_k - \xi_k| + |\eta_{k-1} - \xi_{k-1}|) \leq 4q||\eta - \xi||_{l_\infty}.$$

Отже, (7) дійсно єдиний розв'язок у просторі $\ell_\infty(\mathbf{Z})$. Крім цього, оскільки $|g(x,\ y)| < 1/2$, тоді величина ξ_k по модулю строго менша за $1/2$.

Приклад 1. В якості функцій $g(x, y)$ в теоремі 1 ми можемо обрати $g(x, y) = c(\tanh x - \tanh y)$ із значенням констант c, модуль яких не перевищує $1/4$, що важливо в застосуваннях [9, 12, 13]. Умови теореми 1 виконуються.

Зауваження 1. *Якщо функція $g(x, y)$ задовольняє умови теореми 1 лише для $|x|$, $|y| \leq m + 1$, де m — ціле число, тоді існує траєкторія більярду для будь-якого маршруту вигляду* (4) *так, що $|s_{k+1} - s_k| \leq m$ і така траєкторія єдина.*

Приклад 2. Найпростіша модель стрибаючого м'ячика в гравітаційному полі з ідеальним законом відбиття від іррегулярної поверхні, що є просторово-періодичною, описується рівнянням типу (5),

$$\xi_k = \arcsin \frac{g}{v^2}(x_{k+1} - x_k) - \arcsin \frac{g}{v^2}(x_k - x_{k-1}), \qquad (8)$$

де g – гравітаційне прискорення, v – можлива максимальна швидкість м'ячика, що цілком залежить від його енергії. Умови, що сформульовані в зауваженні 1, виконуються для будь-яких фіксованих m, якщо v у рівнянні (8) приймає достатньо велике значення, або, що теж саме, повна енергія стрибаючого м'ячика достатньо велика. В цьому випадку, м'ячик може послідовно відскакувати від частин поверхні I_{s_k} з наперед заданими індексами $s_k \in \mathbf{Z}$, для яких виконується умова $|s_{k+1} - s_k| \leq m$.

3. Більярд зі спеціальним законом відбиття

Розглянемо закон відбиття, в якому кут відбиття залежить лише від x-координати точки відбиття. Це означає, що x-координата наступної точки єдиним чином визначається абсцисою попередньої точки відбиття, тобто закон відбиття має вигляд

$$x_{k+1} = f(x_k). \tag{9}$$

Припустимо, що закон відбиття — періодичний вздовж бортів з періодом 1. Тоді досить визначити функцію f лише на інтервалі $I_0 = \{x : -1/2 < x < 1/2\}$ та продовжити її на всю вісь за допомогою наступної рівності

$$f(x + n) = n + f(x), \; n \in \mathbf{Z}. \tag{10}$$

Зауважимо, що рівняння (9) – (10) відповідають широкому класу динамічних систем, які вивчалися в літературі (див., наприклад, [10] та посилання там).

Теорема 1 дає достатню умову, коли динамічна система (9) – (10) задовольняє властивість Бернуллі. Нижче наведено більш точний результат.

Теорема 2. *Нехай функція f у динамічній системі* (9) – (10) *відображає інтервал I_0 на цілу вісь і для всіх $x, y \in I_0$ виконується нерівність*

$$|f(y) - f(x)| \geq q|y - x|, \; q > 1. \tag{11}$$

Тоді динамічна система задовольняє властивість Бернуллі.

Доведення.

Покажемо тепер, що довільна послідовність цілих чисел s_k, $k \in \mathbf{Z}$ вигляду (4), є маршрутом траєкторії більярду, що однозначно визначається послідовністю. Дійсно, для кожного відміченого інтервалу I_{s_k}, $k \in \mathbf{Z}$ будуємо систему вкладених інтервалів $I^i_{s_k}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$ з довжинами, що наближаються до нуля. Покладемо $I^0_{s_k} = I_{s_k}$. Якщо інтервали $I^i_{s_k}$ визначені для всіх s_k та фіксованого i, тоді інтервал $I^{i+1}_{s_k}$ отримуємо як прообраз інтервалу $I^i_{s_{k+1}}$ згідно з відображенням більярда (9)-(10). З умови (11) теореми 2 випливає, що всі прообрази інтервалів мають довжини в $q > 1$ раз менші, ніж самі інтервали, отже, довжини всіх вкладених інтервалів $I^i_{s_k}$ наближаються до нуля, коли $i \to \infty$. Звідси випливає, що кожний інтервал I_{s_k} має *єдину* граничну точку $x_k \in I_{s_k}$; її можна знайти як перетин вкладених інтервалів $I^i_{s_k}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$. Розглянемо тепер x_k як послідовні точки відображення, отримаємо *єдину* траєкторію з числами s_k, $k \in \mathbf{Z}$, що є його маршрутом. Це доводить, що більярд задовольняє властивість Бернуллі.

Теорему доведено.

З доведення теореми 2 слідує, що фіксовану точку x_n за законом відбиття (9)-(10) можна однозначно встановити із частини маршруту $\{s_k\}_{k=n}^{\infty}$. Таким чином, два різних маршрути $\{s_k,\ k \in \mathbf{Z}\}$ та $\{\widetilde{s}_k,\ k \in \mathbf{Z}\}$, які співпадають, починаючи з деякого n, $s_k = \widetilde{s}_k$ для всіх $k \geq n$, будуть визначати дві різні траєкторії, що співпадають, починаючи з точки відбиття x_k, $k \geq n$. Іншими словами, для закону відбиття (9)-(10) має місце *склеювання* траєкторій.

Приклад 3. Нехай $f(x) = x + \frac{hx}{1/2-|x|}$ для $|x| < 1/2$. Тоді умови (11) теореми 2 виконуються, оскільки $|f'(x)| \geq 1 + 2h = q > 1$. Цей закон відбиття можна представити у вигляді (5), $\xi_k = 1/2\frac{x_{k+1}-x_k}{h+|x_{k+1}-x_k|}$ (див. [9]). Але для виконання умов теореми 1 нам потрібна додаткова умова $h > 2.4$

Зауваження 2. *Якщо функція f – диференційовна, то умова* (11) *теореми* 2 *еквівалентна умові* $|f'(x)| \geq q > 1$. *Отже,* *наприклад, функція*

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \tan \frac{\pi x}{2} \tag{12}$$

не задовольняє цю умову. Тоді для випадку (12) *властивість Бернуллі виконується, що буде доведено в теоремі* 3, *див. приклад* 4.

Означення 1. *Будемо називати монотонно зростаючу функцію $\tau(x)$ – опорною функцією, якщо рівняння $x = \tau(x)$ має єдиний розв'язок $x = 0$ та метод послідовних наближень, застосований до оберненої функції, завжди збігається, тобто, якщо $x_k = \tau(x_{k+1})$, то $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 0$. Будемо казати, що функція $f(x)$ допускає опорну мінoранту τ, якщо існує опорна функція τ така, що виконується наступна нерівність*

$$|f(y) - f(x)| \geq \tau(|y - x|). \tag{13}$$

Теорема 3. *Твердження теореми* 2 *виконується, якщо функція $f(x)$, яка визначає динамічну систему* (9) – (10), *має опорну мінoранту на I_0.*

Доведення. Доведення теореми 3 повторює доведення теореми 2. Проте, тепер $\operatorname{mes} I^i_{s_k} \leq \tau(\operatorname{mes} I^{i+1}_{s_k})$. Таким чином, $\operatorname{mes} I^i_{s_k} \to 0$ для $i \to \infty$.

Приклад 4. Для функції $f(x) = \frac{2}{\pi} \tan \frac{\pi x}{2}$ функція $\tau(x) = 2f(\frac{x}{2})$ – опорна мінoранта, оскільки,

$$|\tan y - \tan x| \geq 2 \tan \frac{|y - x|}{2}.$$

Отже, для динамічної системи (9) – (10) з функцією (12) виконується властивість Бернуллі.

4. Детермінована дифузія.

Розглянемо більш детально динамічну систему (9) – (10), де функція f — непарна кусково-лінійна, визначена на всьому інтервалі I_0, приймає різні напівцілі значення на кінцях усіх її лінійних частин та відображає інтервал I_0 на об'єднання досяжних інтервалів I_k, $k \in K \subset \mathbf{Z}, |K| > 1$. Якщо позначити через p_k міру прообразу інтервалу I_k, $k \in K$ та $p_k = 0$, $k \notin K$, під дією f, ми отримуємо

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k = 1,\ p_{-k} = p_k,\ p_0 \neq 1. \tag{14}$$

Навпаки, послідовність невід'ємних чисел $p_k \geq 0$, які задовольняють умову (14), єдиним чином визначає кусково-лінійну непарну монотонну функцію f розглянутого типу.

Наведемо простий метод побудови функції f, яка задовольняє умови, наведені вище. Нехай $g(x)$ — задана непарна монотонно зростаюча функція, визначена на інтервалі $I_0 = \{x : -1/2 < x < 1/2\}$, наприклад, $g(x) = \tan \pi x$. Відмітимо точки на графіку функції g, у яких функція приймає напівцілі значення. Послідовно з'єднаємо ці точки і отримаємо графік шуканої кусково-лінійної функції f.

Продовження відображення f на всю вісь відповідно до (10) має низку цікавих властивостей.

Міра Лебега трансформується відносно цього відображення наступним чином. Почнемо з густини 1 міри на інтервалі I_0 і зробимо m-ту ітерацію щодо f. Як результат, ми отримаємо міру $\mu^{(m)}$ з постійними густинами $P_n(m)$ на інтервалах I_n, такими, що

$$P_n(m) = \sum_k p_k P_{n-k}(m-1). \tag{15}$$

Співвідношення (15) можуть бути пов'язані з наступним ймовірнісним значенням. Розглянемо більярд, у якому куля відбивається від меж лише у точках цілочисельної гратки $\mathbf{Z}$. Нехай куля при відбитті у точці з абсцисою n, що має ймовірність p_k, опиняється у іншій точці (на другій межі) з абсцисою $n + k$. Тоді ймовірність $P_n(m)$, що куля знаходиться у точці n після m-го відбиття, задовольняє співвідношення (15). Випадкові величини $P_n(m)$ можуть мати наступне значення. Розглянемо випадкову величину ξ, яка приймає цілі значення k із ймовірністю p_k та випадкову величину ξ_m, яка приймає значення n із ймовірністю $P_n(m)$. Тоді ξ_m є сумою m незалежних рівномірно розподілених випадкових величин ξ. Із центральної граничної теореми [16] випливає, що за умови існування других моментів у випадкової величини ξ, випадкові величини ξ_m для великих m мають розподіл, близький до нормального з дисперсією $\sigma_m = m \sum\limits_k k^2 p_k$. Перенесення цього результату на динамічну систему вигляду (9) – (10) доводить існування детермінованої дифузії [11, 15].

Теорема 4. *Припустимо, що функція f є непарною кусково-лінійною, визначеною на інтервалі $(-1/2,\, 1/2)$, приймає різні напівцілі значення на кінцях усіх її лінійних частин та область значень функції f містить більше, ніж один одиничний інтервал.*

Необхідна і достатня умова, коли динамічна система (9) – (10) *з такою функцією f має детерміновану дифузію, полягає в існуванні скінченного інтеграла*

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |f(x)|^2\, dx < +\infty. \tag{16}$$

Якщо ця умова (16) *виконується, то початкова міра з густиною* 1 *на інтервалі I_0 після m-ої ітерації функції f стає мірою $\mu^{(m)}$, яка має сталу густину $\rho_m(x) = P_n(m)$ на інтервалах I_n. Для великих m функція розподілу $F_m(x) = \int_{-\infty}^{x} \rho_m(s)\, ds$ міри $\mu^{(m)}$ збігається рівномірно по x до нормальної функції розподілу*

$$F_m(x) - \frac{1}{2\sqrt{\pi D\, m}} \int_{-\infty}^{x} \exp\,(-\frac{y^2}{4D\, m})\, dy \to 0, \;\; m \to \infty, \tag{17}$$

де коефіцієнт дифузії дорівнює

$$D = \frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |f(x)|^2\,dx - \frac{1}{24}. \tag{18}$$

Доведення. Нехай функція f така, що визначає динамічну систему (9) – (10), задовольняє умови теореми 4. Тоді в силу (16) існує другий момент для чисел $\{p_k\}_{k\in\mathbf{Z}}$ через кусково–лінійність функції f,

$$\sigma^2 = \sum_k k^2 p_k = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |f(x)|^2\,dx - \frac{1}{12}. \tag{19}$$

Розглянемо тепер характеристичну функцію $P(\lambda) = \sum\limits_k p_k e^{i\lambda k}$ для чисел $\{p_k\}_{k\in\mathbf{Z}}$. Функція $P(\lambda)$ двічі диференційовна по λ, і $P'(0) = 0$ в силу симетрії $p_{-k} = p_k$. Отже, для $\lambda \to 0$ маємо

$$P(\lambda) = 1 - \frac{\sigma^2\lambda^2}{2} + o(1),\ \lambda \to 0. \tag{20}$$

Якщо починати з густини 1 вимірювати інтервал I_0 і брати m-у ітерацію щодо f, ми отримаємо міру $\mu^{(m)}$ з постійною щільністю $P_n(m)$ на інтервалах I_n таку, що виконується рівність (15). Розглянемо характеристичну функцію $\mathcal{P}_m(\lambda) = \sum\limits_n P_n(m)e^{i\lambda n}$ для послідовності $\{P_n(m)\}_{n\in\mathbf{Z}}$. Оскільки $P_n(m)$ – коефіцієнти Фур'є функції $\mathcal{P}_m(\lambda)$, ми отримуємо

$$P_n(m) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{P}_m(\lambda)e^{-i\lambda n}\,d\lambda. \tag{21}$$

З іншого боку, з рівняння (15) слідує, що

$$\mathcal{P}_m(\lambda) = [P(\lambda)]^m. \tag{22}$$

В силу (21) та (22) маємо

$$P_n(m) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [P(\lambda)]^m e^{-i\lambda n}\,d\lambda. \tag{23}$$

Таким чином, вивчення поведінки щільностей $P_n(m)$ для великих m зводиться до вивчення інтегралу (23), такого, що $P(\lambda)$ задовольняє представлення (20). Добре відомо, що асимптотика інтегралів у вигляді (23) отримується у два кроки. По-перше, можна апроксимувати

$$[P(\lambda)]^m = [1 - \frac{\sigma^2\lambda^2}{2} + o(1)]^m = e^{-\frac{\sigma^2\lambda^2}{2}m}.$$

Далі можна перейти до інтегрування по λ на всій осі. Оскільки

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\sigma^2\lambda^2}{2}m} \cdot e^{-i\lambda n}\, d\lambda = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi m}} e^{-\frac{n^2}{2m\sigma^2}},$$

це зводиться до нормального закону розподілу з щільністю $P_n(m)$ та коефіцієнтом дифузії $D = \frac{\sigma^2}{2}$. Шлях, яким величини $P_n(m)$ збігаються до нормального закону, дає локальна гранична теорема Б. Гніденко [16]. Для $m \to \infty$ величини $\sqrt{m}P_n(m) - \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi m}} e^{-\frac{n^2}{2m\sigma^2}}$ збігаються рівномірно до нуля для $n = kh,\ k \in \mathbf{Z}$, де h — найбільший спільний дільник цілих чисел $K = \{k : p_k > 0\}$. Величина $P_n(m) = 0$ для $n \neq kh$.

Теорему доведено.

Приклад 5. Нехай $f(x) = \Lambda x$, де Λ — додатнє число. Тоді функція f задовольняє умови теореми 4 тоді і лише тоді, коли Λ — непарне число і $\Lambda > 1$. Формула (18) дає $D = 1/24(\Lambda^2 - 1)$ ([15]), що, звичайно, співпадає з формулою, відомою у літературі (наприклад, формула (23.21) в [10]).

Приклад 6 (Відображення зиг-заг [15]). Розглянемо на інтервалі $(-1/2, 1/2)$ непарну кусково-лінійну функцію f, яка приймає напівціле значення $f(\xi) = p + 1/2$ в точці $\xi\,(0 < \xi < 1/2)$. Нехай $f(0) = 0$ та $f(1/2) = 1/2$. Тоді коефіцієнт дифузії, відповідно до (18), має наступний вигляд:

$$D = \frac{p+1}{12}(2p + 1 - 2\xi).$$

Що узгоджується з відомими результатами (див. [17] та посилання там.)

5. Аномальна дифузія.

Розглянемо тепер перенесення (транспорт) більярдних куль у смузі шириною h, такій, що нижня межа співпадає з віссю x.

5.1. По-перше, розглянемо випадок ідеального відбиття куль від межі, тобто кут падіння дорівнює куту відбиття.

Нехай більярдна куля рухається з точки $A(0, y_0)$ зі швидкістю $v = 1$ вздовж осі x під кутом φ, і φ може приймати довільне значення у інтервалі $0 \leq \varphi < 2\pi$ з одною й тою ж ймовірністю. Якщо не звертати уваги на відбиття від меж у моменти $t > 0$, ймовірність, що куля міститься у колі $S_t(A)$ радіуса t з центром в точці A одна й та ж сама. Густина ймовірності для значень абсциси більярдної кулі задається функцією

$$\rho(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}(t^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}, & |x| < t, \\ \qquad 0, & |x| \geq t. \end{cases} \tag{24}$$

Якщо відбиття від меж – ідеальне, більярдна куля буде розташована з рівною ймовірністю на частинах кіл, отриманих з початкового кола $S_t(A)$ послідовними віддзеркаленнями відносно меж більярду. З таким віддзеркаленням, густина абсцис не змінюється. Отже, закон (24) залишається вірним для більярду-смуги довільної ширини з ідеальним законом відбиття.

Для закону розподілу (24) середньоквадратичне куль, що заломлені від початкової позиції, є

$$< (\Delta x)^2 >= \int x^2 \rho(x,t)\, dx = \frac{1}{2} t^2. \tag{25}$$

5.2. Розглянемо тепер більш складний закон відбиття для куль. Нехай більярдна куля відбивається відповідно до ідеального закону з ймовірністю $\frac{1}{2}$ і повертається вздовж початкової траєкторії з початковою швидкістю з ймовірністю $\frac{1}{2}$. Для стислості такий закон відбиття будемо називати випадковим майже ідеальним.

Якщо більярдна куля рухається, в початковий момент, уздовж осі x під кутом φ, то цей кут буде дорівнювати $\pm\varphi$ протягом усього наступного часу. У цьому випадку значення горизонтальної компоненти залишатиметься тим самим, і ми можемо покласти його рівним 1. Абсциси точок відбиття від меж більярду утворять рівномірну гратку і, не втрачаючи загальності, можемо вважати, що це гратка цілих чисел $\mathbf{Z}$.

Нехай спочатку куля знаходиться у точці $O(0,0)$ і нехай відбулося N відбиттів. Ймовірність P_N^m, що було m відбиттів направо та $N-m$ відбиттів наліво, дорівнює

$$P_N^m = C_N^m \frac{1}{2^N} = \frac{N!}{m!(N-m)!} \cdot \frac{1}{2^N}. \tag{26}$$

Знайдемо ймовірність $P(x,t)$ того, що у час t, більярдна кулька розташована у точці з абсцисою $x \in [k, k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$. Так, як час між послідовними відбиттями дорівнює 1, відбулося $N = [t]$ відбиттів за час t, де $[t]$ позначає цілу частину t.

Для виконання умови $x \in [k, k+1]$ необхідно, щоб $m = [\frac{N+k+1}{2}]$. Тоді, якщо відбулося m відбиттів направо та $N-m$ наліво, абсциса позиції більярдної кульки співпадатиме з координатою одного з кінців інтервалу. Тоді з ймовірністю $\frac{1}{2}$ кулька буде рухатись всередину інтервалу. Отже, $P(x,t) = \frac{1}{2}P_N^m$. Якщо скористатись явною формулою з (14) для P_N^m, отримаємо розподіл, близький до нормального для великих t,

$$P(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp(-\frac{x^2}{2t}). \tag{27}$$

Тобто у більярді-стрічці з випадковим майже ідеальним законом відбиття переніс (транспорт) більярдних куль — це звичайна дифузія.

5.3. Розглянемо більярд з неідеальним законом відбиття. У попередніх частинах 2, 3, та 4 вивчались дискретні динамічні системи послідовностей координат точок відбиття x_k. У такому випадку траєкторія більярдної кулі є об'єднанням відрізків, що з'єднують послідовні точки відбиття. У інших випадках, як стрибаючий м'ячик, ці куски траєкторії є параболічними. Інші форми траєкторії також важливі [9, 12 – 14]. Для опису поведінки динамічної системи у часі важливою характеристикою є час руху між двома послідовними точками відбиття, $T(x_k, x_{k+1})$. Для більярду ми маємо $T(x_k, x_{k+1}) = \sqrt{h^2 + (x_{k+1} - x_k)^2}$, якщо швидкість кулі дорівнює 1. Для більярду-стрічки малої ширини h можна наближено покласти $T(x_k, x_{k+1}) = |x_{k+1} - x_k|$.

Розглянемо більярд з точками відбиття на межі, що співпадають з цілими числами $\mathbf{Z}$, разом з випадковим законом відбиття. Позначимо через p_k ймовірність того, що куля з абсцисою n потрапить у точку $n + k$ на протилежній стороні. Природно, що $\sum\limits_k p_k = 1$. Якщо другий момент $M_2 = \sum_k k^2 p_k$ існує, то, як було показано в розділі 4, густина розподілу куль буде нормальною для великої кількості відбиттів. Позначимо через T середній час, потрібний для одного відбиття. Для більярду ми маємо $T = \sum\limits_k p_k \sqrt{h^2 + k^2}$, де h є шириною більярдної смуги. У цьому випадку закон розподілу для куль також буде нормальним з коефіцієнтом дифузії $\widetilde{D} = DT^{-1}$. І отже, середньоквадратичне куль, що заломлюються від початкової позиції, $< (\Delta x)^2 >= 2\widetilde{D}t$, залежить від часу лінійно. Це звичайна дифузія. Аномальна дифузія виникає, якщо середньоквадратичне відхилення кулі від початкової позиції, розглянуте як функція часу, нелінійне. Для більярду з ідеальним законом відбиття, розглянутим в частині 5.1, дифузія аномальна завдяки (25).

Нехай ймовірності p_k — такі, що перший момент не існує, тобто $\sum\limits_k |k| p_k = \infty$. У цьому випадку неможливо отримати асимптотику за часом для ймовірнісного розподілу позицій куль у термінах асимптотики числа відбиттів.

Для більярду з ймовірним законом відбиття на цілочисельній гратці позначимо через $\rho_k(t)$ ймовірність, що куля відбивається у час t від точки k. Припустимо, що куля рухається з постійною швидкістю, рівною 1 вздовж осі x і, рухаючись перпендикулярно межі, досягає протилежної межі за час 1. Тоді для цілих значень t

$$\begin{aligned}
&\rho_n(t) = p_0\rho_0(t-1) + \sum_{i=1}^{t}[p_i\rho_{n-i}(t-i) + p_{-i}\rho_{n+i}(t-i)],\\
&\rho_n(0) = \delta_{n,0}.
\end{aligned} \tag{28}$$

Дійсно, для того, щоб куля відбилася у момент часу t у точці n, попереднє відбиття має відбутися у час $t-i$ ($i \geq 1$) у точці $n-i$ (або $n+i$), і, з ймовірністю p_i (або p_{-i}), куля має відбитися у точку n. Якщо $i=0$, ймовірність, що куля рухається перпендикулярно межі є p_0.

Позначимо через $P_n(t)$ ймовірність, що x-координата кулі в момент t дорівнює n. Тоді ми маємо

$$P_n(t) = \rho_n(t) + \sum_{i=1}^{t}[(\sum_{j>i} p_j)\rho_{n-i}(t-i) + (\sum_{j<-i} p_j)\rho_{n+i}(t-i)]. \tag{29}$$

Дійсно, для того, щоб куля мала координату n у момент часу t, вона має рухатись або відбитись від цієї точки, ймовірність чого $\rho_n(t)$. У першому випадку, якщо куля рухається направо від точки відбиття у $n-i$, відбиття мало відбутися у час $t-i$, і куля у цій точці мала відбитися направо на відстань, більшу, ніж i. Ймовірність такої події дорівнює $\sum\limits_{j>i} p_j$. Аналогічно, розгляд випадку, коли куля рухається від точки відбиття наліво від точки $n+i$, приводить до доданка $(\sum\limits_{j<-i} p_j)\rho_{n+i}(t-i)$. Для вивчення перенесення (транспорту) куль у більярді, який описується співвідношеннями (28) та (29), розглянемо середнє квадратичне $D(t)$ положення кулі в момент часу t відносно початкової позиції, $D(t) = \sum\limits_n n^2 P_n(t)$, та величини $d(t) = \sum\limits_n n^2\rho_n(t)$ і $s(t) = \sum\limits_n \rho_n(t)$. Тоді з (28) та (29) випливає, якщо закон відбиття симетричний

$(p_{-n} = p_n)$, що

$$\begin{aligned} s(t) &= p_0 s(t-1) + 2\sum_{i=1}^{t} p_i s(t-i), \\ d(t) &= 2\sum_{i=1}^{t} p_i[d(t-i) + i^2 s(t-i)], \\ D(t) &= d(t) + 2\sum_{i=1}^{t} q_i[d(t-i) + i^2 s(t-i)], \end{aligned} \tag{30}$$

де $q_i = \sum\limits_{k>i} p_k$.

Рекурентні співвідношення (30) можуть використовуватися для розробки аналітичних та чисельних методів знаходження $D(t)$ як функції від t.

Для ілюстрації специфіки виникаючої дифузії розглянемо декілька прикладів.

Приклад 7. Нехай куля при відбитті у точках з $\mathbf{Z}$ має ймовірність p відбитися перпендикулярно межі та досягти протилежної межі за час 1, та має ймовірність q рухатись після відбиття вліво або вправо зі швидкістю 1, $p + 2q = 1$. Легко знаходиться явний вираз для розв'язку цієї задачі. Так як куля знаходиться у точках гратки $\mathbf{Z}$ для цілих часів t, ймовірність $P_n(t)$ знаходження кулі у точці n у час t може бути записана як

$$P_n(t) = \begin{cases} p^t, & n = 0, \\ qp^{t-|n|}, & 1 \le |n| \le t, \\ 0, & |n| > t. \end{cases} \tag{31}$$

Ймовірність $P_n(t)$ має форму двох хвиль, що рухаються зі швидкістю 1 вправо вздовж додатної піввісі та вліво вздовж від'ємної піввісі. Тому середньоквадратичне положення кулі є квадратичною функцією часу,

$$< (\Delta x)^2 >= \sum_n n^2 P_n(t) = t^2 - \frac{2p}{1-p}t + \frac{p(1+p)}{(1-p)^2}(1-p^t). \tag{32}$$

Отже дифузія у цьому прикладі є аномальною.

Приклад 8. Нехай $p_{-1} = p_1 = p/2$, $p_{-N} = p_N = q/2$ та $p_i = 0$ для інших i. Тоді $p + q = 1$. Співвідношення (30) для цілих $t < N$ записується як

$$\begin{aligned} s(t) &= ps(t-1), \\ d(t) &= p[d(t-1) + s(t-1)], \\ D(t) &= d(t) + q\sum_{i=1}^{t}[d(t-i) + i^2 s(t-i)]. \end{aligned} \tag{33}$$

Явні розв'язки (33) для $t < N$ мають вигляд

$$s(t) = p^t,\ d(t) = tp^t,\ D(t) = t^2 - \frac{2p}{q}t + \frac{2p}{q^2}(1 - p^t).$$

Тому залежність середньоквадратичного положення кулі відносно початкового положення є нелінійною функцією часу для $t < N$ і, як наслідок, дифузія — аномальна.

Приклад 9. Розглянемо строго лакунарну послідовність $p_{-k} = p_k \geq 0$,

$$p_k = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{n+1}}, & |k| = 2^{3^n} - 7, n = 1, 2, ..., \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases} \tag{34}$$

За побудовою $\sum\limits_k p_k = 1$.

Оскільки за припущенням куля рухається вздовж осі x з швидкістю 1, можна припустити, що для часу $0 \leq t < t_0$, відбиття з ймовірністю p_k, $|k| \geq t_0$, не приводять до нових відбиттів, а породжують чисте знесення (дрейфування) кулі. Отже, вивчаючи ймовірність $P_n(m)$ у рівнянні (15), сумування має перевищити індекси k, $|k| < t_0$. Введемо величини $\widetilde{p_k} = \dfrac{p_k}{1-q}$, $|k| < t_0$, де $q = \sum\limits_{|k| \geq t_0} p_k < 1$, та $\widetilde{p_k} = 0$ for $|k| \geq t_0$, та $\widetilde{P_n}(m) = (1-q)^{-m} P_n(m)$. Тоді $\widetilde{P_n}(m) = \sum \widetilde{p_k} \widetilde{P}_{n-k}(m-1)$ і, отже, величина $\widetilde{P_n}(m)$ є ймовірністю m-ого відбиття в точці n більярду зі скінченним числом ненульових нових ймовірностей $\widetilde{p_k}$, оскільки $\sum \widetilde{p_k} = 1$. Асимптотики $\widetilde{P_n}(m)$ для великих m, і, отже, для великого часу, описуються нормальним законом розподілу, на що наголошує теорема 4 на початку розділу.

Оскільки в початковому більярді кулі рівномірно рухаються з швидкістю 1 наліво і направо, ми отримаємо наступний вираз для ймовірності $P_n(t)$, де куля знаходиться в точці n в момент часу t для $t < t_0 = 2^{3^r} - 7$, де r — фіксоване ціле число,

$$P_n(t) = a^t \frac{1}{\sqrt{\pi \widetilde{D}\, t}} \exp\,(-\frac{n^2}{\widetilde{D}\, t}) + f(t-n) + f(t+n). \tag{35}$$

Формула (35) має наступне значення. Перший член є зникаюча дифузія, завдяки множнику a^t. Два останні члени – хвилі, що рухаються наліво і направо з швидкістю 1. Таким чином, формула (35) аналогічна формулі (31) у прикладі 7. Звичайно, величини a, $\widetilde{D}$ та вигляд функції f, тобто профілі хвиль залежать від розглянутого інтервалу часу, тобто від вибору числа t_0. Зокрема, $a = (1-q)^{\frac{1}{T}} < 1$, де $T = \dfrac{1}{1-q} \sum\limits_{|k|<t_0} |k|\, p_k$.

Однак, щоб установити як середньоквадратичне значення відхилення положення кулі залежить від часу, вигляд функції f не істотний,

$$\begin{aligned} < (\Delta x)^2 > &= \sum_n n^2 P_n(t) = \\ &= \sum_{n=1}^{t} n^2 f(t-n) + \sum_{n=1}^{t} n^2 f(t+n) + O(t) = t^2 + O(t), \end{aligned}$$

де функція $O(t)$ має порядок зросту по t, що не перевищує одиницю. Таким чином, дифузія в прикладі – аномальна.

Приклад 10. Розглянемо дифузію для більярду з випадковим законом відбиття на цілочисельній гратці $\mathbf{Z}$ з ймовірностями відбиття $p_n = p_{-n} = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$, $n \geq 1$, $p_0 = 0$ та $q_n = \sum\limits_{k>n} p_k = \dfrac{1}{n+2}$.

Чисельні обчислення за допомогою рекурентного співвідношення (30) дають наступні наближені значення (похибка не перевищує 0.5%),

$$D(t) = \begin{cases} t^{1.745}, & 0 \leq t \leq 10^2, \\ 1.65\dfrac{t^{1.97}}{\ln(t+2)}, & 10^2 \leq t \leq 3 \cdot 10^4. \end{cases}$$

Тобто дифузія є аномальною і у цьому прикладі.

Література

[1] *Tabachnikov S.* Billiards, Panoramas et Syntheses, Soc. Math. France, No. 1, 1995.

[2] *Sinai Ya. G.* Introduction to ergodic theory, Mathematical Notes, 18. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1976.

[3] *Cornfeld I., Fomin S. V., Sinai Ya. G.* Ergodic Theory, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1982.

[4] *Chernov N. I., Markarian R.* Introduction to the Ergodic Theory of Chaotic Billiards, Text. Monograph, Monografias del IMCA., Lima: Pontificia Universidad Catolica del Peru, 2001.

[5] *Bunimovich L. A.* On billiards close to dispersing ones, Sbornik: Mathematics, 1974, Vol. 94, pp. 49-73.

[6] *Alonso D., Ruiz A., de Vega I.* Transport in polygonal billiards, Physica D, 187 (2004), pp. 184-199.

[7] *Alonso D., Artuso R., Casati G., Guarneri I.* Heat conductivity and dynamical instability, Phys. Rev. Lett., 82 (1999), p. 1859.

[8] *Matyas L., Klages R.* Irregular diffusion in the bouncing ball billiard, Physica D, 187 (2004), pp. 165-183.

[9] *Albeverio S., Galperin G., Nizhnik I. and Nizhnik L.* Generalized billiards inside an infinite strip with periodic laws of reflection along the strip's boundaries, Regular and Chaotic Dynamics **10** (3) (2005), 285-306.

[10] *Cvitanović P., Artuso R., Mainieri R.,Tanner G., Vattay G., Whelan N., Wirzba A.* Classical and Quantum Chaos (2004), http://www.nbi.dk/ChaosBook/

[11] *Шустер Г.* Детерминированный хаос: Введение. – М.: Мир, 1988. – 244с.

[12] *Nizhnik I. L.* Time domain analysis of nonlinear lattices solutions, Institute of Mathematics of the Ukraine Academy of Sciences, Kiev (1998), Preprint 98.1, MR1709497(2000m:37174).

[13] *Nizhnik L. P., Hasler M., Nizhnik I. L.* Stable stationary solutions in reaction-diffusion systems consisting of a 1-d array of stable cells, International Journal of Bifurcation and Chaos, 2 (2002), 261-279.

[14] *Albeverio S., Nizhnik I. L.* Spatial chaos in a fourth-order nonlinear parabolic equation, Physics Letters A 288 (2001), pp. 299-304.

[15] *Nizhnik L. and Nizhnik I.* Deterministic diffusion, Preprint, (2015), http://arxiv.org/pdf/1501.00674.pdf[math.DS]

[16] *Gnedenko B. V., Kolmogorov A. N.* Limit distributions for sums of independent random variables, Addison-Wesley Mathematics Series, Cambridge: Addison-Wesley Publishing Company, IX, 1954.

[17] *Korabel N., Klages R.* Fractality of deterministic diffusion in the nonhyperbolic climbing sine map, CHAOTRAN proceedings in Physica D 187, (2004), 66–88.