Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2017, т. 14, № 3, 265–270

УДК 517.98

В. А. Михайлець [1]***, О. Б. Пелехата*** [2]

[1] *Інститут математики НАН України, Київ;*
mikhailets@imath.kiev.ua,
[2] *Національний технічний університет України*
„Київський політехнічний інститут ім. І. Сікорського“, Київ;
o.pelekhata@kpi.ua

Про апроксимацію функцій класу $NBV[a, b]$

We prove that each function from $NBV[a, b]$ is a uniform limit of step functions of the same class, such that their marginal steps may degenerate into points and their variations are collectively bounded. In particular this yields linear span of Dirac δ-measures to be sequentially dense in the space of Radon measures on $[a, b]$ in w^*-topology.

Доведено, що кожна функція з $NBV[a, b]$ є рівномірною границею послідовності східчастих функцій того ж класу, крайні сходинки яких можуть вироджуватись у точки, а варіації функцій обмежені в сукупності. Зокрема, із цього випливає, що лінійна оболонка δ-мір Дірака секвенціально щільна у просторі мір Радона на $[a, b]$ в w^*-топології.

1. Вступ і формулювання теорем

Кожний обмежений лінійний функціонал l на комплексному банаховому просторі $C[a, b]$ допускає згідно з теоремою Ф. Рісса [1] аналітичне представлення

$$l(x) = \int_a^b x(t)dg(t), \tag{1}$$

де g — деяка функція обмеженої варіації на відрізку $[a, b]$, а інтеграл розуміється як інтеграл Рімана-Стілтьєса. Правильне і обернене твердження, для кожної функції $g \in BV[a, b]$ інтеграл в (1) задає деякий лінійний неперервний функціонал на просторі $C[a, b]$. Інтеграл в правій частині (1) можна також розглядати, як інтеграл Лебега-Стілтьєса функції $x(\cdot)$ по мірі Радона dg. При цьому відповідність між функціоналами $l \in C^*[a, b]$ та мірами $dg \in M[a, b]$ є ізометричним ізоморфізмом, якщо покласти

$$\|l\| = \operatorname{var} |dg|.$$

Разом з тим, відображення $l \mapsto g$ не є однозначним. Різним функціям із $BV[a, b]$ може відповідати одна міра dg і функціонал l. Цю неоднозначність можна усунути, якщо звузити клас функцій $BV[a, b]$, наклавши на функції додаткові умови нормування.

Позначимо через $NBV[a, b]$ підклас функцій з $BV[a, b]$, які

а) неперервні зліва на інтервалі (a, b);

б) перетворюються на нуль в точці a.

Цей клас функцій утворює комплексний банахів простір відносно норми

$$\|g\|_{NBV[a,b]} = \operatorname{Var} g.$$

Цей простір є несепарабельним, нерефлексивним та ізометрично ізоморфним простору комплексних мір Радона $M[a, b]$. Найпростішими серед цих мір є δ-міри Дірака з одноточковими носіями. Таким мірам відповідає в $NBV[a, b]$ сім'я характеристичних функцій $\{\chi_{(c,b]}(t) : c \in [a, b]\}$. Позначимо через $S[a, b]$ їх комплексну лінійну оболонку. Вона не є щільною в банаховому просторі $NBV[a, b]$ в топології, індукованій нормою. Разом з тим, відомо (див., наприклад, [2]), що множина $S[a, b]$ щільна в $NBV[a, b]$ в w^*-топології. Ця топологія не задовольняє першу аксіому зліченності. Тому звідси не випливає, що множина $S[a, b]$ є секвенціально щільною.

Основним результатом цієї роботи є наступне твердження.

Теорема 1. *Для кожної функції $f \in NBV[a, b]$ існує послідовність східчастих функцій $\{f_n : n \geq 1\} \subset S[a, b]$ така, що*

i) *послідовність $\{f_n : n \geq 1\}$ рівномірно на $[a, b]$ збігається до функції f;*

ii) *повні варіації функцій f_n рівномірно по $n \in \mathbb{N}$ обмежені.*

Зауваження. Припущення, що крайні сходинки функцій f_n можуть вироджуватись в точки, є істотним. Прості приклади показують, що його не можна відкинути, замінивши клас $S[a, b]$ на клас кусково-сталих на $[a, b]$ функцій.

З теореми 1 та першої теореми Геллі [3, 4] випливає, що справедлива

Теорема 2. *Множина функцій $S[a, b]$ є секвенціально щільною в просторі $NBV[a, b]$ в w^*-топології.*

Відмітимо, що теореми 1 і 2 мають змістовні застосування в теорії лінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь. Вони будуть наведені в іншій роботі.

2. Доведення

Оскільки кожна функція з $NBV[a, b]$ є лінійною комбінацією двох дійсних функцій того ж класу, а кожна дійсна функція з

$NBV[a,b]$ може бути представлена у вигляді різниці двох монотонних [4], то, не зменшуючи загальності, можна зразу вважати, що функція $f \in NBV[a,b]$ є дійсною і неспадною на $[a,b]$. Нам знадобляться два допоміжних твердження.

Лема 1. *Для кожної неспадної функції $f \in NBV[a,b] \bigcap C[a,b]$ існує послідовність неспадних функцій $f_n \in S[a,b]$, яка задовольняє умови $i)$ та $ii)$ теореми* 1.

Доведення леми 1. Визначимо по функції $f \not\equiv 0$ послідовність розбиттів відрізка $[a,b]$. Розбиття з номером $n \in \mathbb{N}$ складається з n точок $\{t_{n,k}, 1 \leq k \leq n\}$, де

$$t_{n,k} := \min \left\{ t \in [a,b] : f(t_{n,k}) = f(b) \frac{k}{n+1} \right\}.$$

Зі зроблених припущень випливає, що таке визначення є коректним.

Пов'яжемо з n-им розбиттям відрізка неспадну функцію $f_n \in S[a,b]$, поклавши:

$$f_n(t) := \begin{cases} 0, & t \in [a, t_{n,1}] \\ f(b)\frac{k}{n+1}, & t \in (t_{n,k}, t_{n,k+1}], \quad k \leq n-1 \\ f(b)\frac{n}{n+1}, & t \in (t_{n,n}, b] \end{cases}$$

Тоді

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \operatorname{Var} f_n = f_n(b) - f_n(a) < f(b).$$

Крім того,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in [a,b] \quad |f(t) - f_n(t)| \leq \frac{f(b)}{n+1}.$$

Лему 1 доведено.

Лема 2. *Для кожної неспадної функції стрибків $f \in NBV[a,b]$ існує послідовність неспадних функцій стрибків $f_n \in S[a,b]$, яка задовольняє умови $i)$ та $ii)$ теореми* 1.

Доведення леми 2. З умов леми випливає, що функція f допускає представлення

$$f(t) = \sum_{t_k<t} h_k,$$

де $\{t_k, k \le m \le \infty\}$ — скінченна або зліченна послідовність точок розриву функції f, $h_k > 0$ — величина стрибка функції f в точці t_k, а

$$\sum_{k=1}^{m\le\infty} h_k < \infty.$$

Якщо $m \in \mathbb{N}$, то можна покласти $f_n \equiv f$, $n \in \mathbb{N}$. Нехай тепер $m = \infty$. Покладемо

$$f_n(t) = \sum_{k\le n, t_k<t} h_k, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тоді

$$0 < f(t) - f_n(t) \le \sum_{k=n}^{\infty} h_k \to 0, \quad n \to \infty.$$

Звідси випливає умова $i)$ теореми 1. Умова $ii)$ випливає з нерівностей

$$0 \le f_n(t) < f(t) \le f(b).$$

Лему 2 доведено.

Твердження теореми 1 випливає з лем 1 та 2, оскільки кожна монотонна на відрізку функція може бути представлена у вигляді суми неперервної та функції стрибків, див., наприклад, [4].

Література

[1] *Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. — Москва: Мир. — 1979. — 587 с.

[2] *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики, т. 1. Функциональный анализ. — Москва: Мир. — 1977. — 357 с.

[3] *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — Москва: Наука. — 1989. — 623 с.

[4] *Березанський Ю. М., Ус Г. Ф., Шефтель З. Г.* Функціональний аналіз. — Львів: Видавець І. Є. Чижиков. — 2014. — 559 с.