Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2017, т. 14, № 3, 253–264

УДК 517.927

Г. О. Маслюк [1], ***В. О. Солдатов*** [2]

[1] *Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського", Київ; masliukgo@ukr.net,*
[2] *Інститут математики НАН України, Київ; soldatovvo@ukr.net, soldatov@imath.kiev.ua*

Апроксимативні властивості багатоточкових крайових задач, тотальних щодо просторів $C^{(n)}$

We investigate approximation of the solutions to boundary-value problems that are total with respect to the spaces $C^{(n)}$ by solutions of the corresponding multipoint boundary-value problems.

Досліджено апроксимацію розв'язків крайових задач, тотальних щодо просторів $C^{(n)}$, розв'язками відповідних багатоточкових крайових задач.

1. Вступ.

У недавніх роботах [1 – 3] класи тотальних крайових задач щодо комплексних просторів $C^{(n)} := C^{(n)}([a, b], \mathbb{C}^m)$ для систем неоднорідних звичайних диференціальних рівнянь першого [1] та вищих порядків [2, 3]. На відміну від звичайних крайових задач, цей клас пов'язаний із заданим функціональним простором. А саме, розглянуто системи, у яких коефіцієнти і праві частини належать простору $(C^{(n)})^m$, де $0 \leq n \in \mathbb{Z}$. Враховуючи, що розв'язки z кожної такої системи пробігають увесь простір $(C^{(n+r)})^m$, де $1 \leq r \in \mathbb{Z}$ — порядок рівнянь системи, розглядається найбільш загальна крайова умова у формі $Bz = q$, де $B\colon (C^{(n+r)})^m \to \mathbb{C}^m$ є довільний лінійний неперервний оператор. Така умова може містити похідні розв'язку $z^{(l)}$, де $1 \leq l \leq n + r$. Такі крайові задачі названо тотальними щодо простору $C^{(n+r)}$. Для таких задач була встановлена їх фредгольмовість та був сформульований критерій неперервної залежності їх розв'язків за параметром.

Зауважимо, що зокрема до класу тотальних щодо простору $C^{(n)}$ крайових задач належать і некласичні багатоточкові крайові задачі, які були досліджені в [4, 5].

В роботі встановлена можливість апроксимації на скінченному відрізку за нормами просторів $C^{(n+1)}$ і $C^{(n+r)}$ розв'язків крайових задач, тотальних щодо цих функціональних просторів, розв'язками відповідних багатоточкових крайових задач.

2. Постановка задачі і основний результат.

Нехай задано скінченний відрізок $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Для довільних цілих чисел $n \geq 0$ і $m \geq 1$ позначимо

$$C^{(n)} := C^{(n)}([a, b], \mathbb{C}),$$

$$(C^{(n)})^m := C^{(n)}([a, b], \mathbb{C}^m),$$

$$(C^{(n)})^{m \times m} := C^{(n)}([a, b], \mathbb{C}^{m \times m}).$$

Таким чином, $C^{(n)}$ є банахів простір усіх n разів неперервно диференційовних функцій $x : [a, b] \to \mathbb{C}$, наділений нормою

$$\|x\|_{(n)} := \sum_{j=0}^{n} \max\big\{|x^{(j)}(t)| : t \in [a, b]\big\}.$$

Аналогічно, $(C^{(n)})^m$ і $(C^{(n)})^{m\times m}$ є банахові простори усіх n разів неперервно диференційовних вектор-функцій $y : [a, b] \to \mathbb{C}^m$ і квадратних матриць-функцій $Y : [a, b] \to \mathbb{C}^{m\times m}$. Норми у цих просторах є сумами норм у $C^{(n)}$ усіх компонент функції y або Y.

На відрізку $[a, b]$ розглянемо систему m лінійних звичайних диференціальних рівнянь першого порядку

$$y'(t) = A(t)y(t) + f(t), \quad t \in [a, b], \tag{1}$$

де матриця-функція $A(\cdot) \in (C^{(n)})^{m\times m}$, вектор-функція $f(\cdot) \in (C^{(n)})^m$, вектор $c \in \mathbb{C}^m$, із неоднорідною крайовою умовою вигляду

$$By(\cdot) = c. \tag{2}$$

Тут лінійний неперервний оператор

$$B : (C^{(n+1)})^m \to \mathbb{C}^m. \tag{3}$$

Крайова умова (2) з неперервним оператором (3) є найбільш загальною для рівняння (1), розв'язок якого належить простору $(C^{(n+1)})^m$. Вона охоплює як усі класичні види крайових умов (умови задачі Коші, багатоточкові умови, інтегральні умови, умови мішаних крайових задач), так і некласичні умови, що містять похідні шуканої функції, порядок яких досягає або перевищує порядок рівняння (1). Тому, за аналогією з роботами [1–3], крайову задачу вигляду (1), (2) називаємо *тотальною* щодо простору $(C^{(n+1)})^m$.

Окрім того, розглянута крайова умова (2) може набувати вигляду

$$By(\cdot) = \sum_{j=1}^{p} \sum_{l=0}^{n+1} \alpha^{j,l} y^{(l)}(a_j) = c, \quad t \in [a, b], \tag{4}$$

де числові матриці $\alpha^{j,l} \in \mathbb{C}^{m\times m}$, а точки a_j для всіх $j \in \{1, \dots, p\}$ утворюють розбиття відрізка $[a, b]$. Тоді задачу (1), (4) називають *багатоточковою* крайовою задачею.

Для того, щоб неоднорідна крайова задача (1), (2) мала єдиний розв'язок для довільних правих частин $f(\cdot) \in (C^{(n)})^m$ і $c \in \mathbb{C}^m$, будемо вважати надалі, що виконується таке припущення.

Припущення (0). *Однорідна крайова задача*

$$y'(t) = A(t)y(t), \, t \in [a, b], \tag{5}$$

$$By(\cdot) = 0 \tag{6}$$

має лише тривіальний розв'язок.

Перейдемо до постановки задачі. Нехай $X(a, b)$ — довільна щільна в просторі $(C^{(n)})^{m\times m}$ множина. Розглянемо послідовність систем $m \in \mathbb{N}$ лінійних звичайних диференціальних рівнянь першого порядку

$$y_k'(t) = A_k(t)y_k(t) + f(t) \tag{7}$$

із крайовими умовами вигляду

$$By(\cdot) = \sum_{j=1}^{p} \sum_{l=0}^{n+1} \alpha_k^{j,l} y^{(l)}(a_j) = c, \quad t \in [a, b], \tag{8}$$

де матриці-функції $A_k(\cdot) \in X(a, b)$, а праві частини — вектор-функція $f(\cdot) \in (C^{(n)})^m$ та вектор $c \in \mathbb{C}^m$ — ті ж, що і в задачі (1), (2).

Мета роботи — довести, що для кожної тотальної крайової задачі (1), (2) існує послідовність багатоточкових крайових задач вигляду (1), (8) таких, що їх розв'язки збігатимуться до розв'язку задачі (1), (2).

Теорема 1 (про апроксимацію розв'язків)**.** *Для кожної лівої частини* $A_k(\cdot) \in (C^{(n)})^{m\times m}$ *задачі* (1), (2) *і оператора* (3) *знайдеться послідовність багатоточкових крайових задач вигляду* (7), (8) *таких, що виконується асимптотична властивість*

$$\|y(t) - y_k(t)\|_{(n+1)} \to 0, \quad k \to \infty. \tag{9}$$

Зауважимо, що ця послідовність не залежить від вибору правих частин.

3. Доведення теореми 1.

Для доведення основних результатів покажемо, що існує послідовність коефіцієнтів $A_k(t)$, збіжна до $A(t)$, апроксимація крайового оператора (2) загальної крайової задачі відповідним оператором вигляду (8), і при цьому виконуються ствердження теореми 1.

З щільності множини $X(a,b)$ в просторі $(C^{(n)})^{m\times m}$ випливає, що існує послідовність матриць-функцій $A_n(t)\in X(a,b)$ така, що

$$\|A_n(t)-A(t)\|_{(n)}\to 0.$$

Нехай $BV[a,b]$ — банахів простір функцій з обмеженою варіацією на $[a,b]$ з означеною нормою

$$\|g(t)\|_{BV[a,b]} := \bigvee_a^b g(t),$$

а $NBV[a,b]$ — його підпростір, до якого належать функції неперервні зліва і такі, що $g(a)=0$.

Зауважимо, що крайова умова вигляду (2) допускає наступне однозначне представлення

$$By := \sum_{j=1}^{n+1}\alpha_j y^{(j-1)}(a) + \int_a^b (d\Phi(t))y^{(n+1)}(t) = c, \qquad (10)$$

де числові матриці $\alpha_j\in\mathbb{C}^{m\times m}$, а $\Phi(t)$ − матриця-функція розміру $m\times m$, утворена скалярними функціями обмеженої варіації на відрізку $[a,b]$, неперервними справа на (a,b), і рівними нулю при $t=a$. Інтеграл тут розуміється в сенсі Рімана-Стільтьєса. Таке представлення лінійного неперервного оператора (3) випливає з відомого опису простору, спряженого до $C^{(n+1)}$ (див., наприклад, [7, с. 374]).

З представлення (10) випливає, що для доведення теореми 1 потрібно побудувати послідовність крайових умов вигляду (8), тобто апроксимувати підінтегральну функцію обмеженої варіації оператора (10) східчастими функціями. Виявляється, що таким чином можна апроксимувати не лише підінтегральну функцію в (10), але й довільну функцію з простору $NBV[a,b]$.

Нагадаємо, що *східчастою* називається функція, яка приймає постійні значення на скінченній кількості інтервалів скінченної довжини, і рівна нулю поза цими інтервалами [8].

У роботі В. А. Михайлеця і О. Б. Пелехатої [6] було доведено наступне твердження.

Твердження 2. *Нехай $g(t) \in NBV[a,b]$. Тоді існує послідовність неперервних зліва східчастих функцій $\sigma_k(t) \in NBV[a,b]$ крайні сходинки яких, можуть вироджуватися в точки, а варіації обмежені в сукупності, така, що*

$$\|\sigma_k(t) - g(t)\|_\infty \to 0, \tag{11}$$

де $\|y(t)\|_\infty = \max_{t\in[a,b]} |y(t)|$.

Зокрема, із цього випливає, що лінійна оболонка δ-мір Дірака секвенціально щільна в просторі мір Радона на $[a,b]$ в $(*)$-слабкій топології.

Звідси і теореми Ґеллі випливає, що на таких функціях можна переходити до границі під знаком інтеграла Стільтьєсса.

Лема 3. *Для будь-якого оператора вигляду* (10) *існують послідовності* $\{\alpha_k\} \in \mathbb{C}^m$ *і послідовності східчастих функцій* $\{\Phi_k(t)\}$ *з обмеженими в сукупності варіаціями на* $[a,b]$*, неперервних зліва, такі, що*

$$\|\alpha_k - \alpha\| \to 0, \quad \|\Phi_k(t) - \Phi(t)\|_\infty \to 0.$$

Доведення. Побудуємо $\{B_k\}$ наступним чином: $\alpha_k := \alpha$ для будь-якого $k \in \mathbb{N}$, а функцію $\Phi(t)$ наблизимо послідовністю функцій $\{\Phi_k(t)\}$ за принципом, використаним у доведенні твердження 2. А саме, використаємо той факт, що кожна функція з $NBV[a,b]$ є лінійною комбінацією двох дійсних функцій того ж класу, а кожна дійсна функція з $NBV[a,b]$ може бути представлена у вигляді різниці двох монотонних [9]. А монотонні функції, як відомо [9], можна представити у вигляді суми неперервної та функції стрибків, які в свою чергу можна наблизити розглянутими послідовностями східчастих функцій, використовуючи два наступних твердження з роботи [6].

Твердження 4. *Для кожної неспадної функції* $\varphi \in NBV[a,b] \bigcap C[a,b]$ *існує послідовність неспадних функцій* $\{\varphi_k(t)\}$*, яка задовольняє умови*

i) *послідовність* $\{\varphi_k : k \geq 1\}$ *рівномірно на* $[a,b]$ *збігається до функції* φ*;*

ii) *повні варіації функцій* φ_k *рівномірно по* $k \in \mathbb{N}$ *обмежені.*

Твердження 5. *Для кожної неспадної функції стрибків* $\varphi \in NBV[a,b]$ *існує послідовність неспадних функцій стрибків* $\{\varphi_k(t)\}$*, яка задовольняє умови i) та ii).*

Таким чином отримаємо рівномірне наближення $\Phi(t)$ функціями $\Phi_k(t)$ з обмеженими в сукупності варіаціями, яке за першою теоремою Ґеллі [9, Теорема 7.5] дає можливість переходити до границі під знаком інтеграла Рімана-Стільтьєса. Крім того, за означенням, $\alpha_k \to \alpha$. Тому $B_k \to B$.

Лема доведена.

Отже, незалежно від коефіцієнтів, правих частин рівнянь і крайового оператора тотальної крайової задачі, існує послідовність багатоточкових крайових задач така, що коефіцієнти та крайові оператори цієї послідовності збігаються до коефіцієнтів та крайового оператора тотальної крайової задачі. Покажемо, що за таких умов має місце ствердження теореми 1.

Лема 6. *Якщо* $\{\psi_n(t)\} \in NBV[a,b]$ *і якщо* $\{\psi_n(t)\} \to \psi(t)$ *за нормою простору* $BV[a,b]$ *на* $[a,b]$*, то і функція* $\psi(t)$ *неперервна зліва на* $[a,b]$.

Доведення. Оскільки

$$\|\psi_n(t) - \psi(t)\|_{BV[a,b]} \to 0,$$

то з оцінки

$$\|\psi_n(t) - \psi(t)\|_\infty < \|\psi_n(t) - \psi(t)\|_{BV[a,b]}$$

випливає, що $\psi_n(t) \to \psi(t)$ рівномірно на $[a, b]$. Тоді з властивостей рівномірно збіжних функціональних послідовностей маємо, що $\psi(t)$ неперервна зліва.

Лема доведена.

Для задач (1), (2) у роботі [1] доведено наступне твердження.

Твердження 7. *Нехай при $\varepsilon \to 0+$ виконуються такі умови:*

(i) $\|A(\cdot, \varepsilon) - A(\cdot, 0)\|_{(n)} \to 0$*;*

(ii) $\|f(\cdot, \varepsilon) - f(\cdot, 0)\|_{(n)} \to 0$*;*

(iii) $B(\varepsilon)y \to B(0)y$ *для довільного* $y \in (C^{(n+1)})^m$*;* $c(\varepsilon) \to c(0)$.

Тоді для достатньо малих $\varepsilon > 0$ задача (1), (2) *має єдиний розв'язок і він задовольняє граничну властивість*

$$\|y(\cdot, \varepsilon) - y(\cdot, 0)\|_{(n+1)} \to 0 \quad \textit{при} \quad \varepsilon \to 0+. \tag{12}$$

Сформульоване твердження дозволяє довести теорему 1.

Доведення теореми 1. З лем 3 і 6 та твердження 2 випливає існування послідовності багатоточкових крайових умов, а з того, що для задачі (1), (2) виконуються умови твердження 7, випливає виконання асимптотичної рівності (11).

Теорема 1 доведена.

4. Випадок систем високого порядку.

Розглянемо лінійну крайову задачу для систем m диференціальних рівнянь порядку $r \geq 2$

$$y^{(r)}(t) + \sum_{j=1}^{r} A^{r-j}(t) y^{(r-j)}(t) = f(t),\, t \in [a,b], \tag{13}$$

$$B_j y(\cdot) = c_j,\, j \in \{1, \dots, r\} \tag{14}$$

з коефіцієнтами $A^{r-j}(\cdot) \in (C^{(n)})^{m \times m}$, правими частинами $f(\cdot) \in (C^{(n)})^m$, $c_j \in \mathbb{C}^m$ та лінійним неперервним оператором

$$B_j : (C^{(n+r)})^m \to \mathbb{C}^m. \tag{15}$$

Як і раніше, для однозначної розв'язності задачі (13), (14) припускаємо, що відповідна однорідна крайова задача

$$y^{(r)}(t) + \sum_{j=1}^{r} A^{r-j}(t) y^{(r-j)}(t) = 0,\, t \in [a,b], \tag{16}$$

$$B_j(0) y(\cdot) = 0,\, j \in \{1, \dots, r\} \tag{17}$$

має лише тривіальний розв'язок.

У випадку, коли крайові умови мають вигляд

$$B_j y(\cdot) \equiv \sum_{j=1}^{p} \sum_{l=0}^{n+r} \alpha^{j,l} y^{(l)}(a_j) = c_j, \tag{18}$$

де числові матриці $\alpha^{j,l} \in \mathbb{C}^{m \times m}$, а точки $\{a_1, ..., a_p\}$ утворюють розбиття відрізка $[a,b]$. Тоді задачу (13), (18) називають *багатоточковою* крайовою задачею.

Нехай $X(a,b)$ — довільна щільна в просторі $(C^{(n+r)})^{m \times m}$ множина. Розглянемо послідовність систем $m \in \mathbb{N}$ лінійних звичайних диференціальних рівнянь порядку r

$$y_k^{(r)}(t) + \sum_{j=1}^{r} A_k^{r-j}(t) y_k^{(r-j)}(t) = f(t), \tag{19}$$

із крайовими умовами

$$B_j y(\cdot) \equiv \sum_{j=1}^{p} \sum_{l=0}^{n+r} \alpha_k^{j,l} y^{(l)}(a_j) = c_j, \tag{20}$$

де матриці-функції $A_k^{r-j}(\cdot) \in X(a,b)$, а праві частини — вектор-функція $f(\cdot) \in (C^{(n)})^m$ та вектори $c_j \in \mathbb{C}^m$ — ті ж, що і в задачі (13), (14).

Має місце наступне твердження.

Теорема 8 (про апроксимацію розв'язків)**.** *Для кожної лівої частини* $A_k^{r-j}(\cdot) \in (C^{(n)})^{m \times m}$ *задачі* (13), (14) *і оператора* (15), *знайдеться послідовність багатоточкових крайових задач вигляду* (19), (20) *таких, що виконується асимптотична властивість*

$$\|y(t) - y_k(t)\|_{(n+r)} \to 0, \quad k \to \infty. \tag{21}$$

Як і в теоремі 1, в теоремі 8 послідовність багатоточкових крайових задач не залежить від вибору правих частин.

Доведення. Розглянуте диференціальне рівняння (13) можна звести до системи диференціальних рівнянь першого порядку. Для цього покладемо:

$$A := \begin{pmatrix} 0_m & I_m & 0_m & \dots & 0_m \\ 0_m & 0_m & I_m & \dots & 0_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_m & 0_m & 0_m & \dots & I_m \\ -A^0 & -A^1 & -A^2 & \dots & -A^{r-1} \end{pmatrix} \in (C^{(n)})^{rm \times rm}, \tag{22}$$

$$Y(\cdot) = \mathrm{col}(y(\cdot), y'(\cdot), \dots, y^{(r-1)}(\cdot)), \tag{23}$$

$$F(\cdot) = \mathrm{col}(0, \dots, 0, f(\cdot)) \in (C^{(n)})^m. \tag{24}$$

Крім того, оператори вигляду (20), як вже зазначалося, допускають наступне аналітичне представлення

$$B_j y := \sum_{l=1}^{n+r} \alpha_{j,l} y^{(l-1)}(a) + \int\limits_a^b (d\Phi_j(t)) y^{(n+r)}(t) = c_j, \qquad (25)$$

де матриці-функції $\Phi(t)$ мають обмежену варіацію на $[a, b]$, неперервні зліва на (a, b) і $\Phi(a) = 0$.

Використовуючи (25), для всіх $j, l \in \{1, \ldots, r\}$ означимо r^2 операторів $B_{j,l} \colon C^{(n+r)} \to \mathbb{C}^m$

$$B_{j,l} y := \alpha_{j,l} y^{(l-1)}(a), \quad l \in \{1, \ldots, r-1\}, \qquad (26)$$

$$B_{j,r} y := \int\limits_a^b (d\Phi_j(t)) y^{(n+r)}(t). \qquad (27)$$

Покладемо

$$B := \begin{bmatrix} B_{1,1} & \ldots & B_{1,r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{r,1} & \ldots & B_{r,r} \end{bmatrix}, \qquad (28)$$

$$C := \operatorname{col}(c_1, \ldots, c_r) \in \mathbb{C}^{rm}. \qquad (29)$$

Крайова задача (13), (14) рівносильна системі крайових задач вигляду (1), (2) першого порядку, в якій коефіцієнти визначені формулою (22), розв'язок і праві частини визначені формулами (23), (24), (29), а крайовий оператор — формулою (28). Тому теорема 8 є прямим наслідком теореми 1.

Теорема доведена.

Література

[1] *Михайлец В. А., Чеханова Г. А.* Фредгольмовые краевые задачи с параметром на пространствах $C^{(n)}[a; b]$ // Доп. НАН України. – 2014. – № 7. – С. 24–28.

[2] *Солдатов В. О.* Про неперервність за параметром розв'язків крайових задач, тотальних щодо просторів $C^{(n+r)}[a,b]$ // Укр. мат. журн. — 2015. — **67**, № 5 — С. 692–700.

[3] *Mikhailets V. A., Murach A. A., Soldatov V.* A criterion for continuity in a parameter of solutions to generic boundary-value problems for higher-order differential systems // Methods of Functional Analysis and Topology. – Vol. 22 (2016), no. 4, pp. 375–386.

[4] *Солдатов В. О.* Багатоточкові крайові задачі для систем диференціальних рівнянь вищих порядків // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2015. – **12**, № 2. – С. 327–337.

[5] *Кодлюк Т. И.* Многоточечные краевые задачи с параметром в пространствах Соболева // Доп. НАН України. – 2012. — № 11. – С. 15–19.

[6] *Михайлец В. А., Пелехата О. Б.* Об апроксимации функций класса $NVB[a,b]$ // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2017. – **14**, № 3.

[7] *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы: Общая теория. – М.: Изд-во иностранной лит., 1962. – 895 с.

[8] *Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. – М.: Мир, 1979. – 592 с.

[9] *Березанський Ю. М., Ус Г. Ф., Шефтель З. Г.* Функціональний аналіз. — Львів: Видавець І. Є. Чижиков, 2014. — 559 с.