Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2017, т. 14, № 3, 222–239

УДК 517.5

А. Ф. Конограй[1], ***А. П. Мусієнко***[2]

[1] *Інститут математики НАН України, Київ; Konogray@i.ua,*
[2] *Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, Київ; mysienkoandrey@gmail.com*

Оцінки ентропійних чисел класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних

We obtain the order estimates for the entropy numbers of the classes $B^{\Omega}_{p,\theta}$ of periodic functions of many variables in the space L_q with certain relations between the parameters p and q.

Знайдено порядкові оцінки ентропійних чисел класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змвнних у просторі L_q для деяких співвідношень між параметрами p і q.

1. Вступ

Нехай $\mathbb{R}^d, d \geq 1,$ — d-вимірний евклідів простір з елементами $\mathrm{x} = (x_1, ..., x_d), \mathrm{y} = (y_1, ..., y_d)$, $(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = x_1y_1 + ... + x_dy_d$ і $L_p(\pi_d)$, $\pi_d = \prod\limits_{j=1}^{d} [0; 2\pi]$, — простір 2π-періодичних за кожною змінною і сумовних у степені $p, 1 \le p < \infty$ (відповідно суттєво обмежених при $p = \infty$), на кубі π_d функцій $f(\mathrm{x}) = f(x_1, ..., x_d)$, норма в якому визначається таким чином:

$$\|f\|_{L_p(\pi_d)} = \|f\|_p = \left((2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} |f(\mathrm{x})|^p d\mathrm{x} \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \le p < \infty,$$

$$\|f\|_{L_\infty(\pi_d)} = \|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathrm{x} \in \pi_d} |f(\mathrm{x})|.$$

Всюди далі будемо вважати, що для функцій $f \in L_p(\pi_d)$ виконується додаткова умова

$$\int\limits_0^{2\pi} f(\mathrm{x}) dx_j = 0 \ , \quad j = \overline{1, d}.$$

Для $f \in L_p(\pi_d), 1 \le p \le \infty$, і $\mathrm{t} = (t_1, ..., t_d)$, $t_j \ge 0$, $j = \overline{1, d}$, розглянемо мішаний модуль неперервності порядку l

$$\Omega_l(f, \mathrm{t})_p = \sup_{\substack{|h_j| \le t_j \\ j = \overline{1,d}}} ||\Delta^l_{\mathrm{h}} f(\cdot)||_p \ ,$$

де $l \in \mathbb{N}$, $\Delta^l_{\mathrm{h}} f(\mathrm{x}) = \Delta^l_{h_1} \dots \Delta^l_{h_d} f(\mathrm{x}) = \Delta^l_{h_d}(\dots(\Delta^l_{h_1} f(\mathrm{x})))$ — змішана різниця порядку l з векторним кроком $\mathrm{h} = (h_1, ..., h_d)$, а різниця l–го порядку з кроком h_j за змінною x_j визначається наступним чином:

$$\Delta^l_{h_j} f(\mathrm{x}) = \sum_{n=0}^{l} (-1)^{l-n} C^n_l f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + n h_j, x_{j+1}, \dots, x_d).$$

Нехай $\Omega(\mathrm{t}) = \Omega(t_1, \dots, t_d)$ — задана функція типу змішаного модуля неперервності порядку l, яка задовольняє такі умови:

1) $\Omega(\mathrm{t}) > 0$, $t_j > 0$, $j = \overline{1, d}$ і $\Omega(\mathrm{t}) = 0$, якщо $\prod\limits_{j=1}^{d} t_j = 0$;

2) $\Omega(\mathrm{t})$ не спадає по кожній змінній $t_j > 0, j = \overline{1,d}$, при довільних фіксованих значеннях інших змінних $t_i, i \neq j$;

3) $\Omega(m_1 t_1, \ldots, m_d t_d) \leq \left(\prod\limits_{j=1}^{d} m_j \right)^l \Omega(\mathrm{t}),\ \ m_j \in \mathbb{N},\ \ j = \overline{1,d}$;

4) $\Omega(\mathrm{t})$ неперервна при $t_j \geq 0,\ \ j = \overline{1,d}$.

Множину таких функцій Ω позначимо через Ψ_l.

Додатково будемо вимагати, щоб функції Ω задовольняли умови (S^α) та (S_l), які називають умовами Барі–Стєчкіна [1]. Це означає наступне.

Функція однієї змінної $\varphi(\tau) \geq 0$ задовольняє умову $(S^\alpha), \alpha > 0$ якщо $\varphi(\tau)/\tau^\alpha$ майже зростає при $\tau > 0$, тобто існує така незалежна від τ_1 і τ_2 стала $C_1 > 0$, що

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^\alpha} \leq C_1 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^\alpha}, \qquad 0 < \tau_1 \leq \tau_2.$$

Функція однієї змінної $\varphi(\tau) \geq 0$ задовольняє умову (S_l), якщо існує $\gamma, 0 < \gamma < l$, таке, що $\varphi(\tau)/\tau^\gamma$ майже спадає при $\tau > 0$, тобто існує така незалежна від τ_1 і τ_2 стала $C_2 > 0$, що

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^\gamma} \geq C_2 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^\gamma}, \qquad 0 < \tau_1 \leq \tau_2.$$

Будемо вважати, що $\Omega(\mathrm{t})$ задовольняє умови (S^α) та (S_l), якщо $\Omega(\mathrm{t})$ задовольняє ці умови за кожною змінною t_j при всіх можливих фіксованих $t_i,\ i \neq j$. У випадку, коли для Ω виконана умова (S^α), будемо говорити, що Ω належить множині S^α, а якщо умова (S_l), то — множині S_l. Стверджуючи це (також і для функції ω однієї змінної), будемо використовувати запис $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$ (відповідно $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$), $l \in \mathbb{N}$, де множина $\Phi_{\alpha,l}$ визначається співвідношенням $\Phi_{\alpha,l} = \Psi_l \cap S^\alpha \cap S_l$.

Варто зазначити, що до множини $\Phi_{\alpha,l}$ належать, наприклад, функції

$$\Omega(\mathrm{t}) = \Omega(t_1,...,t_d) = \begin{cases} \prod\limits_{j=1}^{d} \dfrac{t_j^r}{\left(\log \frac{1}{t_j}\right)_+^{b_j}}, & \text{якщо } t_j > 0,\ j = \overline{1,d}; \\ 0, & \text{якщо } \prod\limits_{j=1}^{d} t_j = 0, \end{cases}$$

де $(\log \tau)_+ = \max\{1; \log \tau\}, r_j, b_j \in \mathbb{R}, 0 < r_j < l, j = \overline{1,d}$.

Для заданої функції $\Omega \in \Psi_l$ означимо клас функцій $B^{\Omega}_{p,\theta}$, $1 \le p \le \infty,\ 1 \le \theta \le \infty$, наступним чином [2]:

$$B^{\Omega}_{p,\theta} = \left\{ f \in L_p(\pi_d):\ ||f||_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \le 1 \right\},$$

де

$$||f||_{B^{\Omega}_{p,\theta}} = \left\{ \int\limits_{\pi_d} \left(\frac{\Omega_l(f,\mathrm{t})_p}{\Omega(\mathrm{t})} \right)^{\theta} \prod_{j=1}^{d} \frac{dt_j}{t_j} \right\}^{\frac{1}{\theta}}, \quad 1 \le \theta < \infty,$$

$$||f||_{B^{\Omega}_{p,\infty}} = \sup_{\mathrm{t}>0} \frac{\Omega_l(f,\mathrm{t})_p}{\Omega(\mathrm{t})},$$

(запис $\mathrm{t} > 0$ для $\mathrm{t} = (t_1,...,t_d)$ рівносильний $t_j > 0,\ j = \overline{1,d}$).

Зазначимо, що при $\theta = \infty$ класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$ співпадають з класами H^{Ω}_p, які були розглянуті М. М. Пустовойтовим в [3].

Зауважимо також, що при $\mathrm{r} = (r_1,...,r_d),\ 0 < r_j < l, j = \overline{1,d}$, і $\Omega(\mathrm{t}) = \prod\limits_{j=1}^{d} t_j^{r_j}$ класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$ є аналогами відомих класів Бєсова $B^r_{p,\theta}$, $1 \le \theta < \infty$, та Нікольського $B^r_{p,\infty} = H^r_p$ (див., наприклад, [4]).

Для подальших міркувань будемо використовувати еквівалентні (з точністю до абсолютних сталих) означення норм функцій з класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$.

Нехай $V_n(t), n \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{R}$, позначає ядро Валле-Пуссена порядку $2n-1$, тобто

$$V_n(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos kt + 2\sum_{k=n+1}^{2n-1} \left(1 - \frac{k-n}{n}\right) \cos kt.$$

Кожному вектору $\mathrm{s} = (s_1, \ldots, s_d), s_j \in \mathbb{N}, j = \overline{1,d}$, поставимо у відповідність поліном

$$A_{\mathrm{s}}(\mathrm{x}) = \prod_{j=1}^{d} \left(V_{2^{s_j}}(x_j) - V_{2^{s_j-1}}(x_j) \right)$$

і для $f \in L_p(\pi_d), 1 \le p \le \infty$, через $A_s(f, \mathrm{x})$ позначимо згортку

$$A_{\mathrm{s}}(f, \mathrm{x}) = f * A_{\mathrm{s}}.$$

Нехай $1 \le p \le \infty$, $1 \le \theta \le \infty$ і $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}, \alpha > 0, l \in \mathbb{N}$, тоді з точністю до абсолютних сталих класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$ можна означити наступним чином:

$$B^{\Omega}_{p,\theta} = \left\{ f \in L_p(\pi_d) : \|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \asymp \left(\sum_{\mathrm{s}} \Omega^{-\theta}(2^{-\mathrm{s}}) \|A_{\mathrm{s}}(f, \cdot)\|_p^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \le 1 \right\}, \tag{1}$$

де $1 \le \theta < \infty$ та

$$B^{\Omega}_{p,\infty} = \left\{ f \in L_p(\pi_d) : \|f\|_{B^{\Omega}_{p,\infty}} \asymp \sup_{\mathrm{s}} \frac{\|A_{\mathrm{s}}(f, \cdot)\|_p}{\Omega(2^{-\mathrm{s}})} \le 1 \right\}, \tag{2}$$

тут і надалі $\Omega(2^{-\mathrm{s}}) = \Omega(2^{-s_1}, ..., 2^{-s_d})$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1,d}$.

Зазначимо, що співвідношення (1) і (2) були отримані в роботах [5] і [3] відповідно.

Надалі будемо вважати, що для двох невід'ємних величин A і B запис $A \asymp B$ означає, що існують константи $C_3, C_4 > 0$ такі, що $C_3 A \le B \le C_4 A$. Записи $A \ll B$ або $A \gg B$, означають, що $C_5 A \le B$ і $B \le C_6 A, C_5, C_6 > 0$, відповідно. Зауважимо також, що всі константи $C_i, i = 1, 2, \dots,$ які будуть зустрічатися в роботі, можуть залежати тільки від параметрів, що входять в означення класу, метрики, в якій оцінюється похибка наближення, та розмірності простору $\mathbb{R}^d$. Через $|\mathcal{N}|$ будемо позначати кількість елементів множини $\mathcal{N}$.

У роботі будемо розглядати класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$ з функцією Ω спеціального вигляду. Нехай ω — задана функція однієї змінної типу модуля неперервності порядку l, яка належить до множин S^{α} та S_l. Покладемо

$$\Omega(\mathrm{t}) = \omega\left(\prod_{j=1}^{d} t_j\right), t_j \ge 0.$$

Зрозуміло, що таким чином задана функція Ω буде належати до множини $\Phi_{\alpha,l}$. Перейдемо тепер до означення досліджуваної апроксимативної характеристики.

Нехай $\mathcal{X}$ — банаховий простір і $B_{\mathcal{X}}(\mathrm{y}, r)$ — куля $\mathcal{X}$ з радіусом r і центром у точці y, тобто

$$B_{\mathcal{X}}(\mathrm{y}, r) = \{\mathrm{x} \in \mathcal{X} : \ \|\mathrm{x} - \mathrm{y}\| \le r\}.$$

Тоді величини (див., наприклад, [6])

$$\varepsilon_k(\mathcal{A}, \mathcal{X}) = \inf\left\{\varepsilon : \ \exists y^1, ..., y^{2^k} \in \mathcal{X} : \ \mathcal{A} \subseteq \bigcup_{j=1}^{2^k} B_{\mathcal{X}}(y^j, \varepsilon)\right\}$$

називаються ентропійними числами множини $\mathcal{A}$ в просторі $\mathcal{X}$.

Дослідженню ентропійних чисел, а також близьких до них асимптотичних характеристик (ε–ємність, ε–ентропія та ін.) присвячено багато робіт. Початки цих досліджень детально описано у вступі роботи [7], де відзначається, що А. М. Колмогоров [8], виходячи з результатів робіт [9, 10] та популярних в той час загальних ідей теорії передачі інформації, сформулював загальну програму дослідження ε–ентропії та ε–ємностей цікавих з точки зору компактів в функціональних просторах. Відмітимо, що в роботі [7] крім оригінальних результатів наведено систематизований виклад ряду результатів, що відносяться до відповідних напрямків досліджень і раніше опубліковані в роботах [8 – 14].

Серед подальших робіт, в яких вивчались ентропійні числа і ε–ентропія класів періодичних функцій багатьох змінних $W^r_{p,\alpha}, H^r_p$ і $B^r_{p,\theta}$ та їх аналогів, відмітимо роботи [15 – 31], де можна ознайомитись з більш детальною бібліографією.

2. Допоміжні твердження

Кожному вектору $\mathrm{s} = (s_1, ..., s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1,d}$, поставимо у відповідність множину

$$\rho(\mathrm{s}) = \left\{\mathrm{k} = (k_1, ..., k_d) : 2^{s_j - 1} \leq |k_j| < 2^{s_j}, k_j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, j = \overline{1,d}\right\}.$$

Для $n \in \mathbb{N}$ покладемо

$$Q_n = \bigcup_{\|\mathrm{s}\|_1 \leq n} \rho(\mathrm{s}), \quad \Delta Q_n = Q_n \backslash Q_{n-1}$$

і

$$\mathfrak{N}_n = \{\mathrm{s} = (s_1, ..., s_d), n - 1 < \|\mathrm{s}\|_1 \leq n, n \geq d\},$$

де $\|\mathrm{s}\|_1 = s_1 + ... + s_d$. Відмітимо, що $|\Delta Q_n| \asymp 2^n n^{d-1}$.

Через $S_{Q_n}(f, \cdot)$ позначимо "східчасту" гіперболічну суму Фур'є функції $f \in L_1(\pi_d)$ виду

$$S_{Q_n}(f, \cdot) = \sum_{\|\mathrm{s}\|_1 \leq n} \delta_{\mathrm{s}}(f, \cdot).$$

В прийнятих позначеннях має місце наступне твердження.

Теорема 1. [32]. *Нехай* $1 < p < q < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$, $\Omega(\mathrm{t}) = \omega(t_1 \cdot \ldots \cdot t_d)$, *де* $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$, $l \in \mathbb{N}$. *Тоді має місце співвідношення*

$$\sup_{f \in B^{\Omega}_{p,\theta}} \|f(\cdot) - S_{Q_n}(f, \cdot)\|_q \asymp \omega(2^{-n}) 2^{n(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} n^{(d-1)(\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta})_+},$$

де $a_+ = \max\{a, 0\}$.

Лема 2. *Нехай* $f \in L_p(\pi_d)$, $1 < p < \infty$. *Тоді*

$$\| \sum_{\mathrm{s}} \delta_{\mathrm{s}}(f, \cdot)\|_p \ll \left(\sum_{\mathrm{s}} \|\delta_{\mathrm{s}}(f, \cdot)\|_p^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}}, \tag{3}$$

де $p^* = \min\{2, p\}$.

Нерівність (3) є наслідком теореми Літтлвуда–Пелі (див., наприклад, теорему А зі вступу роботи [33]).

Нехай $G \subset \mathbb{Z}^d$. Тоді через $T(G)$ позначимо множину тригонометричних поліномів t виду

$$T(G) = \{t : \widehat{t}(k) = 0, \text{ якщо } k \overline{\in} G\}.$$

Для $1 \le q \le \infty$ покладемо

$$T(G)_q = \{t \in T(G) : \|t\|_q \le 1\}.$$

Лема 3. [21]. *Нехай* $1 < p \le 2 \le q < \infty$. *Тоді має місце співвідношення*

$$\varepsilon_M(T(Q_n)_p, L_q) \ll \begin{cases} C(p,q)\,|Q_n|\,M^{-1}\,(\ln(|Q_n|\,M^{-1}))^2, & 2M \le |Q_n|, \\ C(p,q)\,2^{-M/|Q_n|}, & 2M \ge |Q_n|. \end{cases}$$

Зауваження 1. *Згідно з наслідком теореми Літтлвуда-Пелі (див., наприклад,* [33, с. 7]*) будемо мати* $\|S_{Q_n}(f,\cdot)\|_q \le C(q)\,\|f(\cdot)\|_q$, $1 < q < \infty$, *і тому в лемі* 2.2 *можна вважати, що елементи відповідної* ε*–сітки також належать* $T(Q_n)$.

Попередньо відмітимо, що при доведенні отриманих результатів нами використовувались і розвивались методи, які застосовувались в роботах [20, 21, 24, 25, 29] при дослідженні відповідних питань на класах $W^r_{p,\alpha}, H^r_p$ і $B^r_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних.

3. Основні результати

Має місце наступне твердження.

Теорема 4. *Нехай* $1 \le q < \infty$, $2 \le p \le \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, $\Omega(\mathrm{t}) = \omega(t_1 \cdot \ldots \cdot t_d)$, *де* $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > 1$, $l \in \mathbb{N}$. *Тоді для будь-яких* $M, n \in \mathbb{N}$ *таких, що* $M \asymp 2^n n^{d-1}$, *має місце співвідношення*

$$\varepsilon_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q) \ll \omega(2^{-n}) n^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+}. \tag{4}$$

Доведення. Оскільки $B^{\Omega}_{p,\theta} \subset B^{\Omega}_{2,\theta}$, $2 < p < \infty$, та $\|\cdot\|_q \le \|\cdot\|_2$, $1 < q \le 2$, то оцінку (4) достатньо отримати для випадку $p = 2$ і $2 < q < \infty$.

Отже, нехай $f \in B^{\Omega}_{2,\theta}$, $1 \le \theta < 2$. Враховуючи співвідношення (3) та відому нерівність [34, с. 43]

$$\left(\sum_k |a_k|^{m_2}\right)^{1/m_2} \le \left(\sum_k |a_k|^{m_1}\right)^{1/m_1}, \quad 1 \le m_1 \le m_2 < \infty,$$

можемо записати

$$\Big\| \sum_{\mathrm{s} \in \mathfrak{N}_n} \delta_{\mathrm{s}}(f, \cdot) \Big\|_2 \ll \left(\sum_{\mathrm{s} \in \mathfrak{N}_n} \|\delta_{\mathrm{s}}(f, \cdot)\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \left(\sum_{\mathrm{s} \in \mathfrak{N}_n} \|\delta_{\mathrm{s}}(f, \cdot)\|_2^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} =$$

$$= \left(\sum_{\mathrm{s} \in \mathfrak{N}_n} \omega^{-\theta}(2^{-\|\mathrm{s}\|_1}) \; \|\delta_{\mathrm{s}}(f, \cdot)\|_2^{\theta} \; \omega^{\theta}(2^{-\|\mathrm{s}\|_1}) \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \omega(2^{-n}) \cdot \|f\|_{B^{\Omega}_{2,\theta}} \le \omega(2^{-n}). \tag{5}$$

Перейдемо до розгляду випадку $2 \le \theta < \infty$. Скориставшись оцінкою (3) та нерівністю Гельдера з показником $\frac{\theta}{2}$, будемо мати

$$\Big\| \sum_{\mathrm{s} \in \mathfrak{N}_n} \delta_{\mathrm{s}}(f, \cdot) \Big\|_2 \ll \left(\sum_{\mathrm{s} \in \mathfrak{N}_n} \|\delta_{\mathrm{s}}(f, \cdot)\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\leq \left(\sum_{\mathrm{s} \in \mathfrak{N}_n} \omega^{-\theta}(2^{-\|\mathrm{s}\|_1}) \, \|\delta_{\mathrm{s}}(f,\cdot)\|_2^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \cdot \left(\sum_{\mathrm{s} \in \mathfrak{N}_n} \omega^{\frac{2\theta}{\theta-2}}(2^{-\|\mathrm{s}\|_1}) \right)^{\frac{\theta-2}{2\theta}} \ll$$

$$\ll \|f\|_{B^{\Omega}_{2,\theta}} \left(\sum_{\mathrm{s} \in \mathfrak{N}_n} \omega^{\frac{2\theta}{\theta-2}}(2^{-\|\mathrm{s}\|_1}) \right)^{\frac{\theta-2}{2\theta}} \ll \omega(2^{-n}) n^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)}. \qquad (6)$$

Нарешті, нехай $\theta = \infty$. Тоді, приймаючи до уваги співвідношення (2) (оскільки $\|A_{\mathrm{s}}(f,\cdot)\|_{q_0} \asymp \|\delta_{\mathrm{s}}(f,\cdot)\|_{q_0}$, при $1 < q_0 < \infty$) та скориставшись оцінкою (3), отримаємо

$$\Big\| \sum_{\mathrm{s} \in \mathfrak{N}_n} \delta_{\mathrm{s}}(f,\cdot) \Big\|_2 \ll \left(\sum_{\mathrm{s} \in \mathfrak{N}_n} \|\delta_{\mathrm{s}}(f,\cdot)\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{\mathrm{s} \in \mathfrak{N}_n} \omega^2(2^{-\|\mathrm{s}\|_1}) \right)^{\frac{1}{2}} \ll \omega(2^{-n}) n^{\frac{d-1}{2}}. \qquad (7)$$

Таким чином, для $f \in B^{\Omega}_{2,\theta}$, $1 \leq \theta \leq \infty$, згідно з (5)–(7), можемо записати

$$\Big\| \sum_{\mathrm{s} \in \mathfrak{N}_n} \delta_{\mathrm{s}}(f,\cdot) \Big\|_2 \ll \omega(2^{-n}) n^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+}. \qquad (8)$$

Далі, за заданим M підберемо $m \in \mathbb{N}$ таким, щоб виконувались нерівності $|Q_{m-1}| < M \leq |Q_m|$. Тоді, враховуючи, що $|Q_{m-1}| \asymp |Q_m| \asymp 2^m \, m^{d-1}$, будемо мати $M \asymp 2^m \, m^{d-1}$.

Покладемо $\delta = \frac{1}{2} \min\{(\alpha - 1), 1\}$ та

$$\overline{M}_n = \begin{cases} C_\delta \cdot M \cdot 2^{-\frac{1}{2}(m-n)}, & \text{якщо } \ n < m, \\ C_\delta \cdot M \cdot 2^{-\delta(n-m)}, & \text{якщо } \ n \geq m, \end{cases}$$

де $C_\delta > 0$ підібрано так, що

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{M}_n \leq M.$$

Покажемо, що така стала C_δ існує. Дійсно

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{M}_n = C_\delta \sum_{n=1}^{m-1} M \cdot \ 2^{-\frac{1}{2}(m-n)} + C_\delta \sum_{n=m}^{\infty} M \ \cdot 2^{-\delta(n-m)} \leq$$

$$\leq C_\delta 2^{-\frac{m}{2}} 2^{\frac{m}{2}} \cdot M + C_\delta \cdot M \ll M.$$

Позначимо $M_n = [\overline{M}_n]$, де $[a]$ — ціла частина числа a. Тоді $M_n = 0$, якщо $C_\delta \cdot M \cdot 2^{-\delta(n-m)} < 1$, тобто при $n > m_1 = m + \delta^{-1} \log C_\delta \cdot M$.

Покладемо

$$S_{\triangle\, Q_n}(B^{\Omega}_{2,\theta}) = \Big\{ g: \ g(\mathrm{x}) = \sum_{\mathrm{k} \in \triangle Q_n} \widehat{f}(\mathrm{k}) e^{i(\mathrm{k},\mathrm{x})}, \quad f \in B^{\Omega}_{2,\theta} \Big\}$$

і

$$\|S_{\triangle\, Q_n}(B^{\Omega}_{2,\theta})\|_q = \sup_{g \in S_{\triangle Q_n}(B^{\Omega}_{2,\theta})} \|g(\cdot)\|_q. \tag{9}$$

В прийнятих позначеннях можемо записати

$$\varepsilon_M(B^{\Omega}_{2,\theta}, L_q) \leq \sum_{n \leq m_1} \varepsilon_{M_n}(S_{\triangle Q_n}(B^{\Omega}_{2,\theta}), L_q) +$$

$$+ \sum_{n > m_1} \|S_{\triangle Q_n}(B^{\Omega}_{2,\theta})\|_q = I_1 + I_2. \tag{10}$$

Оцінимо спочатку доданок I_2. Для $f \in B^{\Omega}_{2,\theta}$, згідно з теоремою 1, будемо мати

$$\|S_{\triangle\, Q_n}(f,\cdot)\|_q = \|S_{Q_n}(f,\cdot) - S_{Q_{n-1}}(f,\cdot) + f(\cdot) - f(\cdot)\|_q \leq$$

$$\leq \|f(\cdot) - S_{Q_n}(f,\cdot)\|_q + \|f(\cdot) - S_{Q_{n-1}}(f,\cdot)\|_q \ll$$

$$\ll \omega(2^{-n}) 2^{n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)} n^{(d-1)\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta}\right)_+}.$$

Таким чином, згідно з (9), має місце оцінка

$$\|S_{\triangle\, Q_n}(B^{\Omega}_{2,\theta})\|_q \ll \omega(2^{-n}) 2^{n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)} n^{(d-1)\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{\theta}\right)_+}. \tag{11}$$

Далі, скориставшись (11), знаходимо

$$I_2 = \sum_{n>m_1} \|S_{\triangle Q_n}(B^{\Omega}_{2,\theta})\|_q \ll \sum_{n>m_1} \omega(2^{-n}) 2^{n\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)} n^{(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)_+} =$$

$$= \sum_{n>m_1} \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} 2^{-n\left(\alpha-\frac{1}{2}+\frac{1}{q}\right)} n^{(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)_+} = I_3.$$

Для подальших міркувань нам знадобиться допоміжне твердження, яке ми сформулюємо у вигляді леми.

Лема 5. *Для заданих чисел $m \in \mathbb{N}, \sigma > 0, \beta \in \mathbb{R}$, має місце порядкова рівність*

$$\sum_{n\geq m} 2^{-n\sigma} n^{\beta} \asymp 2^{-m\sigma} m^{\beta}.$$

Доведення.

$$\sum_{n\geq m} \frac{n^{\beta}}{2^{n\sigma}} = \frac{m^{\beta}}{2^{m\sigma}} \sum_{n\geq m} 2^{-(n-m)\sigma} \left(\frac{n}{m}\right)^{\beta} = \frac{m^{\beta}}{2^{m\sigma}} \sum_{n\geq m} a_n.$$

Далі

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{-(n+1-m)\sigma} \cdot \left(\frac{n+1}{m}\right)^{\beta}}{2^{-(n-m)\sigma} \cdot \left(\frac{n}{m}\right)^{\beta}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{-(n+1)\sigma} \cdot \left(n+1\right)^{\beta}}{2^{-n\sigma} \cdot n^{\beta}} = \lim_{n\to\infty} 2^{-\sigma} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\beta} = 2^{-\sigma} < 1.$$

Отже, згідно з ознакою д'Аламбера ряд $\sum\limits_{n\geq m} a_n$ є збіжний і, як наслідок,

$$\sum_{n\geq m} 2^{-n\sigma} n^{\beta} \asymp 2^{-m\sigma} m^{\beta}.$$

Лему доведено.

Далі, враховуючи, що

$$\frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \ll \frac{\omega(2^{-m_1})}{2^{-\alpha m_1}}$$

при $n > m_1$ та скориставшись лемою 5, будемо мати

$$I_3 \ll \frac{\omega(2^{-m_1})}{2^{-\alpha m_1}} \sum_{n>m_1} 2^{-n\left(\alpha-\frac{1}{2}+\frac{1}{q}\right)} n^{(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)_+} \ll$$

$$\ll \frac{\omega(2^{-m_1})}{2^{-\alpha m_1}} 2^{-m_1(\alpha-1)} m_1^{(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)_+} =$$

$$= \omega(2^{-m_1}) 2^{m_1} m_1^{(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)_+} = I_4.$$

Щоб продовжити оцінку I_4, розглянемо два випадки.

I. Нехай $\alpha \geq 2$. В такому випадку $\delta = \frac{1}{2}$ і, відповідно, $m_1 = m + \log\left(C_\delta M\right)^2, M \asymp 2^m m^{d-1}$. Тоді, продовживши оцінку I_4, отримаємо

$$I_4 \ll \omega(2^{-m}) \frac{2^{-m_1\alpha}}{2^{m\alpha}}\ 2^{m_1} m_1^{(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)_+} \leq$$

$$\omega(2^{-m}) \frac{2^{-(m+\log(C_\delta M)^2)\alpha}}{2^{m\alpha}}\ 2^{m+\log(C_\delta M)^2} (m+\log(C_\delta M)^2)^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+} =$$

$$= \omega(2^{-m}) \frac{(m+\log(C_\delta M)^2)^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+}}{2^{m(2\alpha-1)} 2^{(\alpha-1)\log(C_\delta M)^2}} \ll$$

$$\ll \omega(2^{-m}) m^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+}. \tag{12}$$

II. Нехай тепер $1 < \alpha < 2$. Тоді $\delta = \frac{1}{2}(\alpha-1)$ і, відповідно, $m_1 = m + \log(C_\delta M)^{\frac{2}{\alpha-1}}$, де $M \asymp 2^m m^{d-1}$. Продовжимо оцінку I_4, будемо мати

$$I_4 \ll \omega(2^{-m}) \frac{2^{-m_1\alpha}}{2^{m\alpha}}\ 2^{m_1} m_1^{(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)_+} \leq$$

$$\leq \omega(2^{-m}) \frac{2^{-(m+\log(C_\delta M)^{\frac{2}{\alpha-1}})\alpha}}{2^{m\alpha}}\ 2^{m+\log(C_\delta M)^{\frac{2}{\alpha-1}}} \times$$

$$\times (m+\log(C_\delta M)^{\frac{2}{\alpha-1}})^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+} =$$

$$= \omega(2^{-m}) \frac{(m+\log(C_\delta M)^{\frac{2}{\alpha-1}})^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+}}{2^{m(2\alpha-1)} 2^{(\alpha-1)\log(C_\delta M)^{\frac{2}{\alpha-1}}}} \ll$$

$$\ll \omega(2^{-m}) m^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+}. \qquad (13)$$

Отже, враховуючи співвідношення (12) та (13), можемо записати

$$I_2 \ll \omega(2^{-m}) m^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+}. \qquad (14)$$

Перш ніж перейти до оцінки величини I_1, представимо її у вигляді суми двох доданків

$$I_1 = \sum_{n\le m} \varepsilon_{M_n}(S_{\triangle\, Q_n}(B^{\Omega}_{2,\theta}), L_q) + \sum_{m<n\le m_1} \varepsilon_{M_n}(S_{\triangle\, Q_n}(B^{\Omega}_{2,\theta}), L_q). \qquad (15)$$

Для оцінки першого доданка скористаємося співвідношенням (8) та лемою 3, отримаємо

$$\sum_{n\le m} \varepsilon_{M_n}(S_{\triangle\, Q_n}(B^{\Omega}_{2,\theta}), L_q) \ll$$

$$\ll \sum_{n\le m} \omega(2^{-n}) n^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+} \cdot \varepsilon_{M_n}(T(Q_n)_2, L_q) \ll$$

$$\ll \sum_{n\le m} \omega(2^{-n}) n^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+} \cdot 2^{-C_\delta M\, 2^{-\frac{1}{2}(m-n)} |Q_n|^{-1}} = I_5.$$

Далі, приймаючи до уваги співвідношення $|Q_n| \asymp 2^n\, n^{d-1}$ та $M \asymp 2^m\, m^{d-1}$, легко переконатися, що

$$I_5 \ll \omega(2^{-m})\; m^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+}. \qquad (16)$$

Щоб оцінити другий доданок правої частини (15), також скористаємось співвідношенням (8) та лемою 3. Виконавши ряд перетворень, отримаємо

$$\sum_{m<n\le m_1} \varepsilon_{M_n}(S_{\triangle Q_n}(B^{\Omega}_{2,\theta}), L_q) \ll$$

$$\ll \sum_{m<n\le m_1} \omega(2^{-n}) n^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+} M^{-1} 2^{\delta(n-m)} |Q_n| \ln^2(|Q_n| M^{-1} 2^{\delta(n-m)})$$

$$\ll \omega(2^{-m}) m^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+}. \tag{17}$$

Таким чином, з врахуванням (15) – (17), будемо мати

$$I_1 \ll \omega(2^{-m}) m^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+}. \tag{18}$$

Нарешті, підставляючи (14) та (18) в (10), отримаємо шукану оцінку величини $\varepsilon_M(B^{\Omega}_{2,\theta}, L_q)$:

$$\varepsilon_M(B^{\Omega}_{2,\theta}, L_q) \ll \omega(2^{-m}) m^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+}.$$

Теорему доведено.

Зауваження 2. *У випадку* $\Omega(\mathrm{t}) = \prod\limits_{j=1}^{d} t_j^{r}$ *і відповідних обмеженнях на параметр* r *результат теореми (для класів* $B^r_{p,\theta}, 1 \le \theta < \infty$ *та* $B^r_{p,\infty} = H^r_p$*) встановлений в* [29] *та* [21] *відповідно.*

Література

[1] Бари Н.К., Стечкин С.Б. Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о-ва . — 1956. — Т. 5. — С. 483–522.

[2] Sun Yongsheng, Wang Heping. Representation and Approximation of Multivariate Periodic Functions with Bounded Mixed Moduli of Smoothness // Тр. Мат. ин-та им. В.А.Стеклова. — 1997. — Т. 219. — С. 356–377.

[3] Пустовойтов Н.Н. Представление и приближение периодических функций многих переменных с заданным смешанным модулем непрерывности // Anal. Math. — 1994. — Vol. 20. — P. 35–48.

[4] Лизоркин П.И., Никольский С.М. Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. — 1989. — Т. 187. — С. 143–161.

[5] Стасюк С.А., Федуник О.В. Апроксимативні характеристики класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних // Укр. мат. журн. — 2006. — Т. 58, №5. — С. 692–704.

[6] Höllig K. Diameters of classes of smooth functions. — Quant. Approxim. — New York: Acad. Press, 1980. — P. 163–176.

[7] Колмогоров А.Н., Тихомиров В.М. ε–Энтропия и ε–емкость множеств в функциональных пространствах // Успехи мат. наук. — 1959. — Т. 14, №2. — С. 3–86.

[8] Колмогоров А.Н. Асимптотические характеристики некоторых вполне ограниченных метрических пространств // Докл. АН СССР. — 1956. — Т. 108, №3. — С. 385–389.

[9] Витушкин А.Г. К тринадцатой проблеме Гильберта // Докл. АН СССР. — 1955. — Т. 95, №4. — С. 701–704.

[10] Колмогоров А.Н. Оценки минимального числа элементов ε–сетей в различных функциональных пространствах и их применение к вопросу о представимости функций нескольких переменных суперпозициями функций меньшего числа переменных // Успехи мат. наук. — 1955. — Т. 10, №1. — С. 192–193.

[11] Витушкин А.Г. Абсолютная энтропия метрических пространств // Докл. АН СССР. — 1957. — Т. 117, №2. — С. 745–748.

[12] Тихомиров В.М. Об ε–энтропии некоторых классов аналитических функций // Докл. АН СССР. — 1957. — Т. 117, №2. — С. 191–194.

[13] Бабенко К.И. О энтропии одного класса аналитических функций // Науч. докл. высш. шк. — 1958. — Т. 1, №2. — С. 9–16.

[14] Ерохин В.Д. Об асимптотике ε–энтропии аналитических функций // Докл. АН СССР. — 1958. — Т. 120, №5. — С. 949–952.

[15] Смоляк С.А. ε-энтропия классов $E^{\alpha,k}_s(B)$ и $W^{\alpha}_s(B)$ в метрике L_2 // Докл. АН СССР. — 1960. — Т. 131, №1. — С. 30–33.

[16] Бирман М.Ш., Соломяк М.З. Кусочно-полиномиальные приближения классов W^{α}_p // Мат. сб. — 1967. — Т. 73, №3. — С. 331–355.

[17] Бахвалов Н.С. Оценки снизу асимптотических характеристик классов функций с доминирующей смешанной производной // Мат. заметки. — 1972. — Т. 12, №6. — С. 655–664.

[18] Трибель Х. Интерполяционные свойства ε-энтропии и поперечников. Геометрические характеристики вложения пространств функций типа Соболева – Бесова // Мат. сб. — 1975. — Т. 98, №1. — С. 27–41.

[19] Динь Зунг. Приближение гладких функций многих переменных средствами гармонического анализа : Дис. д-ра физ.-мат. наук / Динь Зунг ; МГУ. — Москва, 1985. — 231 с.

[20] Темляков В.Н. Об оценках ε-энтропии и поперечников классов функций с ограниченной смешанной производной или разностью // Докл. АН СССР. — 1988. — Т. 301, №2. — С. 288–291.

[21] Темляков В.Н. Оценки асимптотических характеристик классов функций с ограниченной смешанной производной или разностью // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1989. — Т. 189. — С. 138–168.

[22] Belinskií E.S. Approximation of functions of several variables by trigonometric polynomials with given number of harmonics, and estimates of ε-entropy // Analysis Mathematica. — 1989. — Vol. 15. — P. 67–74.

[23] Белинский Э.С. Асимптотические характеристики классов функций с условиями на смешанную производную (смешанную разность) // Исследования по теории функций многих вещественных переменных. — Ярославль: Ярослав.ун-т. — 1990. — С. 22–37.

[24] Кашин Б.С., Темляков В.Н. О наилучших m-членных приближениях и энтропии множеств в пространстве L^1 // Матем. заметки. — 1994. — Т. 56, №5. — С. 57–86.

[25] Кашин Б.С., Темляков В.Н. Об оценке аппроксимативных характеристик классов функций с ограниченной смешанной производной // Матем. заметки. — 1995. — Т. 58, №6. — С. 922–925.

[26] Belinskií E.S. Estimates of Entropy Numbers and Gaussian Measures for Classes of Functions with Bounded Mixed Derivative // J. of Approx. Theory. — 1998. — Vol. 93. — P. 114–127.

[27] Temlyakov V.N. An inequality for trigonometric polynomials and its application for estimating the Kolmogorov widths // East J. Approx. — 1996. — Vol. 2, no. 1. — P. 89–98.

[28] Temlyakov V.N. An inequality for the entropy numbers and its application // J. of Approx. Theory. — 2013. — Vol. 173. — P. 110–121.

[29] Романюк А.С. Оценки энтропийных чисел и ε–энтропии классов Никольского–Бесова периодических функций многих переменных // Теорія наближення функцій та суміжні питання : Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2014. — Т. 11, №3. — С. 196–213.

[30] Романюк А.С. Оценки энтропийных чисел и колмогоровских поперечников классов Никольского–Бесова периодических функций многих переменных // Укр. мат. журн. — 2015. — Т. 67, №11. — С. 1540–1556.

[31] Романюк А.С. Энтропийные числа и поперечники классов $B^{r}_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных // Укр. мат. журн. — 2016. — Т. 68, №10. — С. 1403–1417.

[32] Sun Yongsheng, Wang Heping Representation and approximation of multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. — 1997. — Т. 219. — С. 356–377.

[33] Темляков В.Н. Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1986. — Т. 178. — С. 1–112.

[34] Неравенства / Г. Харди, И.Е. Литтлвуд, Дж. Пойа // — М.: Изд-во иностр. лит., 1948. — 456 с.