Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2017, т. 14, № 3, 204–221

УДК 517.5

І. Р. Ковальчук

Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк; grabova_u@ukr.net

Наближення класів (ψ, β)-диференційовних функцій поліномами Рогозинського

We obtained asymptotic equalities for the upper bounds of deviations of Rogozinski polynomials on the classes of (ψ, β)–differentiable functions in the uniform metric.

Отримано асимптотичні рівності для верхніх меж відхилення поліномів Рогозинського на класах (ψ, β)–диференційовних функцій у рівномірній метриці.

1. Вступ

В даній роботі вивчається питання про асимптотичну поведінку точних верхніх меж відхилень сум Рогозинського в рівномірній метриці на класах (ψ, β)-диференційовних функцій.

Нехай C — простір 2π–періодичних неперервних функцій, у якому норма задається рівністю $\|f\|_C = \max\limits_t |f(t)|$; L_∞ — простір 2π–періодичних вимірних суттєво обмежених функцій з нормою $\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}\limits_t |f(t)|$; L — простір 2π–періодичних сумовних на періоді функцій, в якому норма задається за допомогою рівності $\|f\|_L = \|f\|_1 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)|dt$.

В роботі О. І. Степанця [1] введені класи (ψ, β)-диференційовних функцій наступним чином.

Нехай $f(x)$ – сумовна 2π-періодична функція і

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(f;x)$$

її ряд Фур'є.

Нехай, далі, $\psi(k)$ – довільна фіксована функція натурального аргументу, а β – фіксоване дійсне число. Припустимо, що ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)}\Big(a_k(f)\cos\big(kx + \frac{\beta\pi}{2}\big) + b_k(f)\sin(kx + \frac{\beta\pi}{2})\Big)$$

є рядом Фур'є деякої сумовної функції. Цю функцію позначимо $f^{\psi}_{\beta}(x)$, а множину функцій $f(\cdot)$, що задовольняють такі умови, будемо позначати L^{ψ}_{β}. Якщо $f \in L^{\psi}_{\beta}$, і крім того, $f^{\psi}_{\beta} \in \mathfrak{N}$, де $\mathfrak{N}$ — деяка підмножина функцій із L, то записують, що $f \in L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$.

Далі покладемо $L^{\psi}_{\beta} \cap C = C^{\psi}_{\beta}$ і $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N} \cap C = C^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$. Якщо в якості $\mathfrak{N}$ виступає множина $S^0_{\infty} = \{\varphi \in L_{\infty} : \|\varphi\|_{\infty} \leq 1,\ \varphi \perp 1\}$, то множину $C^{\psi}_{\beta} S^0_{\infty}$ позначають через $C^{\psi}_{\beta,\infty}$.

При $\psi(k) = k^{-r}$, $r > 0$ і $\beta = r$ класи $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ (ψ, β)-диференційовних функцій співпадають з класами W^r_r функцій, що мають дробову похідну в розумінні Вейля f^r_r. Якщо ж, при цьому, $\beta = r$, $r \in \mathbb{N}$, то має місце рівність $W^r_r = W^r$. Крім того, $W^r H_{\omega} = \big\{f : \big|f^r(t) - f^{(r)}(t')\big| \leq \omega(|t - t'|)\big\}$, де $\omega(t)$ — заданий модуль неперервності.

Якщо функція $\psi(k)$ така, що ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k)\cos(kt + \frac{\beta\pi}{2}) \tag{1}$$

є рядом Фур'є деякої сумовної функції $B^{\psi}_{\beta}(t)$, то $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ співпадає з класом функцій, які можна подати у вигляді згортки

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} B^{\psi}_{\beta}(t)\varphi(x+t)dt, \quad \|\varphi\|_{\infty} \leq 1, \quad \varphi\perp 1. \qquad (2)$$

Якщо послідовність $\psi(k)$ опукла вниз і $\lim\limits_{k\to\infty}\psi(k) = 0$, то за теоремою 2 (див. [2, с. 652]), $B^{\psi}_{\beta}(t)$ – сумовна функція, що має ряд Фур'є (1). Тому, якщо

$$\psi(k) \geq \psi(k+1) \qquad \text{і} \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\psi(k)}{k} < \infty, \qquad (3)$$

або при $\sin\frac{\beta\pi}{2} = 0$

$$\psi(k+2) - 2\psi(k+1) + \psi(k) \geq 0 \qquad \text{і} \qquad \lim_{k\to\infty}\psi(k) = 0, \qquad (4)$$

то клас $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ співпадає з класом функцій, що представлені рівністю (2).

В цій роботі розглянуто такі класи $C^{\psi}_{\beta,\infty}$, у яких $\psi(k)$ задовольняє умови (3) або (4).

Нехай $\lambda = \{\lambda^{(n)}_k\}$ – трикутна числова матриця, $\lambda^{(n)}_k = 0$, якщо $k \geq n$; $\lambda^{(n)}_0 = 1$, за допомогою якої функції $f(x)$ з рядом Фур'є $S[f]$ ставиться у відповідність послідовність поліномів

$$U_n(\lambda; f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\lambda^{(n)}_k A_k(f;x).$$

Нехай, далі, $\lambda_n(u)$, $n \in N$, – послідовність неперервних функцій, заданих на $[0,1]$ таких, що $\lambda_n(\frac{k}{n}) = \lambda^{(n)}_k$, $\psi(u)$ – неперервна функція, визначена при $u \geq 1$, що має значення $\psi(k)$ при $u = k$ і

$$\tau_n(u) = \tau_n(\lambda,\psi,u) = \begin{cases} \tau_n(u), & 0 \leq u \leq 1/n, \\ (1-\lambda(u))\frac{\psi(nu)}{\psi(n)}, & 1/n \leq u \leq 1, \\ \psi(nu)/\psi(n), & u \geq 1, \end{cases} \qquad (5)$$

неперервна функція, визначена на $[0,1/n]$ довільним чином. Якщо функція $\widehat{\tau}_n(t) = \int\limits_0^\infty \tau_n(u)\cos(ut+\beta\pi/2)\,du$ є сумовною на $(-\infty,+\infty)$, а f_β^ψ обмежена майже скрізь, то за теоремою 4 (див. [1, с. 183]) справедлива рівність

$$f(x) - U_n(\lambda;f;x) = \psi(n)\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\beta^\psi(x+\frac{t}{n})\widehat{\tau}_n(t)dt. \qquad (6)$$

При цьому для виконання рівності (6) не важливо, як визначена функція $\lambda_n(u)$ і функція $\psi(u)$ в точках $u \neq k$, лише потрібно, щоб функція $\tau_n(u)$ була неперервною, а $\widehat{\tau}_n(t) \in L(R)$.

2. Допоміжні твердження

Наведемо деякі допоміжні твердження, доведені в [3], і які будемо використовувати надалі.

Лема 1 ([3, с. 10]). *Нехай функція $\tau_n(u)$ задана при $u \geq 0$, неперервна і інтеграли*

$$A(\tau_n(u)) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\int\limits_0^\infty \tau_n(u)\cos(ut+\beta\pi/2)du\right|dt, \qquad n=1,2,...,$$

збігаютьcя. Тоді при $n\to\infty$ справедлива рівність

$$\mathcal{E}(C_{\beta,\infty}^\psi;U(\lambda))_C := \sup_{f\in C_{\beta,\infty}^\psi}\|f(x)-U_n(\lambda;f;x)\|_C =$$

$$= \sup_{\|f_\beta^\psi\|_\infty\leq 1}\left\|\psi(n)\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\beta^\psi(x+\frac{t}{n})\widehat{\tau}_n(t)dt\right\|_C = \psi(n)A(\tau_n)+\gamma(n),$$

де $\gamma(n) \le 0$, $|\gamma(n)| = O(\psi(n)a(\tau_n))$, $n \to \infty$,

$$a(\tau_n) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{|t| \ge \pi n/2} \Big| \int\limits_0^\infty \tau_n(u)\cos(ut + \beta\pi/2)du \Big| dt.$$

Нехай F – множина заданих при $u \ge 1$ функцій $\psi(u)$, що задовольняють умови:

а) $\psi(u)$ – опукла вниз;

б) при $n \to \infty$ справедливі співвідношення

$$\int\limits_n^\infty \frac{\psi(u)}{u} du = O(\psi(n)), \qquad n|\psi'(n)| = O(\psi(n)).$$

Має місце наступне твердження.

Лема 2 ([3, с. 13])**.** *Нехай функція $\psi(u) \in F$, а функція $\tau_n(u)$, задана рівністю (5), має абсолютно неперервну похідну $\tau_n'(u)$ на $[0,1]$ і $\tau_n(0) = 0$. Якщо збігаються інтеграли*

$$\Big|\sin\frac{\beta\pi}{2}\Big| \int\limits_0^1 \frac{|\tau_n(u)|}{u} du, \qquad i \qquad \int\limits_0^1 \frac{|\lambda_n(u)|}{1-u} du,$$

то при $n \to \infty$ справедлива рівність

$$\mathcal{E}(C^\psi_{\beta,\infty}; U_n(\lambda; f; x))_C = \psi(n)\frac{2}{\pi}\Big|\sin\frac{\beta\pi}{2}\Big| \int\limits_0^1 \frac{|\tau_n(u)|}{u} du +$$

$$+ O\Bigg(\psi(n)\Big(\int\limits_0^1 \frac{|\lambda_n(u)|}{1-u} du + \int\limits_0^1 u(1-u)|\tau_n''(u)| du +$$

$$+ \Big|\sin\frac{\beta\pi}{2}\Big| \int\limits_0^{2/\pi n} \frac{|\tau_n(u)|}{u} du + 1\Big)\Bigg).$$

В роботі [5] вперше були розглянуті питання щодо поведінки величини $\mathcal{E}\big(H^\alpha; R_n(f, x, \frac{\pi}{2n+1})\big)_C$, де $H^\alpha = H_\omega$ при $\omega(t) = t^\alpha$, $\alpha \in (0, 1]$.

Наступний важливий крок у вивченні апроксимативних властивостей сум Рогозинського був зроблений в роботах [6]–[11], в яких знайдені асимптотичні рівності для величин $\mathcal{E}(W^r H^\omega; R_n)_C$.

3. Основний результат

Для сум Рогозинського $\lambda_n(u) = \cos \frac{\pi}{2} u$, і, згідно з рівністю (5),

$$\tau_n(u) = \begin{cases} \tau_n(u), & 0 \le u \le 1/n, \\ (1 - \cos \frac{\pi}{2} u) \frac{\psi(nu)}{\psi(n)}, & 1/n \le u \le 1, \\ \psi(nu)/\psi(n), & u \ge 1. \end{cases} \tag{7}$$

Теорема 3. *Якщо* $\psi \in \mathfrak{M}$, $\int\limits_1^\infty \frac{\psi(u)}{u} < \infty$, $u^2\psi(u)$ *опукла вниз і* $\lim\limits_{u \to \infty} u^2 \psi(u) = \infty$, *то при* $n \to \infty$ *справедлива рівність*

$$\mathcal{E}(C^\psi_{\beta,\infty}; R_n)_C = \psi(n) A(\tau_n) + O\Big(\frac{\psi(n)}{n}\Big), \tag{8}$$

де

$$\frac{\pi}{2}\Big|\sin \frac{\beta\pi}{2}\Big| \frac{1}{\psi(n)} \int\limits_n^\infty \frac{\psi(u)}{u} du \le A(\tau_n) \le C_1 + \frac{2\pi}{\psi(n)} \int\limits_n^\infty \frac{\psi(u)}{u} du. \tag{9}$$

Доведення.

Представимо функцію $\tau_n(u)$ на відрізку $[0, \frac{1}{n}]$ так, щоб $\tau_n(u)$ і $\tau_n'(u)$ були неперервні на $[0, 1]$ і $\tau_n'(u)$, $\tau_n''(u)$ – обмежені на $[0, 1]$. Це можна зробити, наприклад, квадратичною функцією $\tau_n(u) = au^2 + bu$, де

$$a = \frac{n}{\psi(n)} \Big(\psi(1) \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2n} + n(1 - \cos \frac{\pi}{2n})(\psi'(1) - \psi(1))\Big),$$

$$b = \frac{n}{\psi(n)}\Big((1-\cos\frac{\pi}{2n})(2\psi(1)-\psi'(1)) - \frac{\pi}{2\psi(n)}\sin\frac{\pi}{2n}\psi(1)\Big).$$

При цьому неважко переконатися, що всі вказані вище вимоги до $\tau_n(u)$ виконуються.

Враховуючи те, що $\lim\limits_{u\to\infty}\tau_n(u) = \lim\limits_{u\to\infty}\tau_n'(u) = 0$, двічі інтегруючи частинами, отримаємо

$$\int_0^\infty \tau_n(u)\cos(ut+\frac{\beta\pi}{2})du =$$

$$= \frac{1}{t^2}\Bigg(-\tau_n'(0)\cos\frac{\beta\pi}{2} + (\tau_n'(1-0)-\tau_n'(1+0))\cos(t+\frac{\beta\pi}{2}) -$$

$$-\Big(\int_0^{\frac{1}{n}} + \int_{\frac{1}{n}}^{1} + \int_1^\infty\Big)\tau_n''(u)\cos(ut+\frac{\beta\pi}{2})du\Bigg). \tag{10}$$

Так як при $u \geq \frac{1}{n}$ $\tau_n''(u) \geq 0$, то з рівності (10) і представлення $\tau_n(u)$ маємо

$$\Big|\int_0^\infty \tau_n(u)\cos(ut+\frac{\beta\pi}{2})du\Big| \leq \frac{1}{t^2}(|\tau_n'(0)|\cdot\Big|\cos\frac{\beta\pi}{2}\Big| + \frac{\pi}{2}(1+\Big|\cos(t+\frac{\beta\pi}{2})\Big|-$$

$$-\frac{1}{\psi(n)}\Big(\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2n}\psi(1) + n(1-\cos\frac{\pi}{2n})\psi'(1)\Big) + \int_0^{\frac{1}{n}}|\tau_n''(u)|du\Big). \tag{11}$$

Оскільки $u^2\psi(u)$ опукла вниз і $\lim\limits_{u\to\infty}u^2\psi(u) = \infty$, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\psi(n)}{n(1-\cos\frac{\pi}{2n})} = C > 0 \qquad \text{або} \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{\psi(n)}{n(1-\cos\frac{\pi}{2n})} = \infty. \tag{12}$$

Із співвідношень (11), (12) і в силу обмеженості $\tau_n(u)$ і $\tau_n'(u)$ отримаємо, що

$$\left|\int\limits_0^\infty \tau_n(u)\cos(ut \pm \frac{\beta\pi}{2})du\right| \leq \frac{C_2}{t^2}. \tag{13}$$

Далі з (13) маємо

$$a(\tau_n) = \frac{1}{\pi}\Bigg(\int\limits_{\frac{\pi n}{2}}^\infty \left|\int\limits_0^\infty \tau_n(u)\cos(ut + \frac{\beta\pi}{2})du\right|dt +$$

$$+\int\limits_{\frac{\pi n}{2}}^\infty \left|\int\limits_0^\infty \tau_n(u)\cos(ut - \frac{\beta\pi}{2})du\right|dt\Bigg) \leq \frac{2C_2}{\pi^2} \tag{14}$$

і

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\geq\pi} \left|\int\limits_0^\infty \tau_n(u)\cos(ut + \frac{\beta\pi}{2})du\right|dt \leq \frac{2C_2}{\pi^2}. \tag{15}$$

Враховуючи означення функції $\tau_n(u)$, знаходимо

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|\int\limits_0^\infty \tau_n(u)\cos(ut + \frac{\beta\pi}{2})du\right|dt \leq \int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\int\limits_0^1 \tau_n(u)du\right)dt +$$

$$+\int\limits_{-\pi}^{0} \left|\int\limits_1^\infty \tau_n(u)\cos(ut + \frac{\beta\pi}{2})du\right|dt + \int\limits_0^{\pi} \left|\int\limits_1^\infty \tau_n(u)\cos(ut + \frac{\beta\pi}{2})du\right|dt \leq$$

$$\leq 2\pi C_3 + \int\limits_0^{\pi} \left|\int\limits_1^\infty \tau_n(u)\cos(ut - \frac{\beta\pi}{2})du\right|dt +$$

$$+\int\limits_0^{\pi} \left|\int\limits_1^\infty \tau_n(u)\cos(ut + \frac{\beta\pi}{2})du\right|dt. \tag{16}$$

Функція $\tau_n(u)$ додатна на $[1,\infty)$, монотонно спадає і $\lim\limits_{n\to\infty}\tau_n(u)=0$. Якщо x_1 ближчий справа від точки $x=1$ нуль функції $\int\limits_x^\infty \tau_n(u)\cos(ut+\frac{\beta\pi}{2})du$ (β, n, t – фіксовані), то, як неважко переконатися, $1\le x_1\le 1+\frac{\pi}{t}$; враховуючи це, отримаємо

$$\begin{gathered}\left|\int\limits_1^\infty \tau_n(u)\cos(ut+\frac{\beta\pi}{2})du\right|\le\\ \le\left|\int\limits_1^{x_1}\tau_n(u)\cos(ut+\frac{\beta\pi}{2})du\right|<\int\limits_1^{1+\frac{\pi}{t}}\tau_n(u)du.\end{gathered}\tag{17}$$

Провівши заміну змінних і інтегруючи частинами, маємо

$$\int\limits_0^\pi\left|\int\limits_1^{1+\frac{\pi}{t}}\tau_n(u)du\right|dt=$$

$$=\pi\left(-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int\limits_1^{1+x}\tau_n(u)du+\int\limits_1^2\tau_n(u)du+\int\limits_1^\infty\frac{\tau_n(x+1)}{x}dx\right).\tag{18}$$

Застосувавши правило Лопіталя і врахувавши, що $\tau_n(u)$ монотонно спадає на $[1,\infty)$, з (18) отримаємо

$$\int\limits_0^\pi\left|\int\limits_1^\infty\tau_n(u)\cos(ut\pm\frac{\beta\pi}{2})du\right|dt\le C_4+\frac{\pi}{\psi(n)}\int\limits_n^\infty\frac{\psi(u)}{u}du.\tag{19}$$

Із нерівностей (15), (16) і (19) випливає, що

$$A(\tau_n)<C_1+\frac{2\pi}{\psi(n)}\int\limits_n^\infty\frac{\psi(u)}{u}du.\tag{20}$$

Покажемо справедливість оцінки знизу в (9).

Нехай $f_\beta^\psi(t) = \frac{2}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kt}{k}$. Тоді $||f_\beta^\psi(t)||_\infty \le 1$, оскільки $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kt}{k}$ – 2π-періодична функція і

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kt}{k} = \begin{cases}\frac{\pi-t}{2}, & 0<t<2\pi,\\ 0, & t=0, t=2\pi.\end{cases}$$

Так як $\psi(u)$ опукла вниз, то

$$\mathcal{E}(C_{\beta,\infty}^\psi; R_n)_C =$$

$$= \sup_{||\varphi||_\infty\le 1}\Big|\Big|\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(x+t)\Big(\sum_{k=1}^{n-1}(1-\cos\frac{\pi k}{2n})\psi(k)\cos(kt+\frac{\beta\pi}{2})+$$

$$+\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)\cos(kt+\frac{\beta\pi}{2})dt\Big)\Big\|_C \ge$$

$$\ge \Big|\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_\beta^\psi(t)\Big(\cos\frac{\beta\pi}{2}\big(\sum_{k=1}^{n-1}(1-\cos\frac{k\pi}{2n})\cos kt+\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)\cos kt\big)-$$

$$-\sin\frac{\beta\pi}{2}\big(\sum_{k=1}^{n-1}(1-\cos\frac{k\pi}{2n})\sin kt+\sum_{k=n}^{\infty}\psi(k)\sin kt\big)\Big)dt\Big|. \qquad (21)$$

Використовуючи теорему про почленне інтегрування рядів Фур'є (див. [2, с. 22]), із нерівності (21) отримаємо

$$\mathcal{E}(C_{\beta,\infty}^\psi; R_n)_C \ge \frac{2}{\pi}\Big|\sin\frac{\beta\pi}{2}\Big|\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\psi(k)}{k}(1-\cos\frac{k\pi}{2n})+\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\psi(k)}{k}\right). \qquad (22)$$

Внаслідок того, що при $u>1$ функція $\psi(u)$ не зростає, з нерівності (22) робимо висновок, що

$$\mathcal{E}(C_{\beta,\infty}^\psi; R_n)_C > \frac{2}{\pi}|\sin\frac{\beta\pi}{2}|\int_n^{\infty}\frac{\psi(u)}{u}du, \qquad (23)$$

а із (23) і (20) випливає (9).

Із співвідношень (14) і (9) в силу леми 1 отримаємо (8). Отже, теорему доведено.

Умови теореми 3 задовольняють, наприклад, функції $\psi(u)$, $u \geq 1$ вигляду $\psi(u) = u^{-r}$, $0 \leq r \leq 1$; $\psi(u) = \ln^{-\alpha}(u + C)$, $\alpha > 1$, $C > 0$.

Теорема 4. *Якщо $\psi \in \mathfrak{M}$ задовольняє умови:*

$$1.\ u^2\psi(u) - \textit{опукла вгору}; \qquad 2.\ \int\limits_1^{\infty} \frac{\psi(u)}{u} du < \infty;$$

$$3.\ \int\limits_1^{n} u\psi(u)du = O(n^2\psi(n)), \tag{24}$$

то при $n \to \infty$ справедлива асимптотична рівність

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta,\infty}; R_n)_C = \psi(n)A(\tau_n) + O(\frac{1}{n^2}), \tag{25}$$

де $A(\tau_n)$ задовольняє нерівність (9).

Доведення.

Так як $u^2\psi(u)$ опукла вгору, то $\lim\limits_{u\to\infty} u^2\psi(u) = \infty$ або $\lim\limits_{u\to\infty} u^2\psi(u) = C > 0$. Причому, другий випадок за умов теореми неможливий.

Доозначимо $\tau_n(u)$ на $[0, \frac{1}{n}]$ степеневою функцією

$$\tau_n(u) = (1 - \cos\frac{\pi}{2n})\frac{\psi(1)}{\psi(n)} n^{\frac{\pi}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4n} + n\frac{\psi'(1)}{\psi(1)}} \cdot u^{\frac{\pi}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4n} + n\frac{\psi'(1)}{\psi(1)}}.$$

Припустимо, що $\tau_n(u)$ опукла вниз при $0 \leq u \leq \frac{1}{n}$. Так як $\tau'_n(u)$ неперервна на $[0, 1)$ і $(1, \infty)$; $\tau''_n(u) \leq 0$ при $u \in [\frac{1}{n}, 1]$ і $\tau''_n(u) \geq 0$ при $u \in [0, \frac{1}{n}] \cup [1, \infty)$, то, інтегруючи двічі частинами, отримаємо

$$\left| \int\limits_0^{\infty} \tau_n(u)\cos(ut + \frac{\beta\pi}{2})du \right| \leq \frac{1}{t^2}\Bigg(\left| (\tau'_n(1-0) - \tau'_n(1+0))\cos(t + \frac{\beta\pi}{2}) \right| +$$

$$+\Big(\int\limits_0^{\frac{1}{n}}+\int\limits_{\frac{1}{n}}^{1}+\int\limits_1^{\infty}\Big)|\tau_n''(u)|du\Bigg)=\frac{1}{t^2}\Big(\frac{\pi}{2}\big|\cos(t+\frac{\beta\pi}{2})\big|+\pi\sin\frac{\pi}{2n}\cdot\frac{\psi(1)}{\psi(n)}+$$

$$+2n(1-\cos\frac{\pi}{2n})\frac{\psi'(1)}{\psi(n)}-\frac{\pi}{2}-2n\frac{\psi'(n)}{\psi(n)}\Big). \qquad (26)$$

Із нерівності (26) з врахуванням того, що $-\frac{n\psi'(n)}{\psi(n)}\leq 2$, маємо

$$a(\tau_n)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|>\frac{\pi n}{2}}\Bigg|\int\limits_0^{\infty}\tau_n(u)\cos(ut+\frac{\beta\pi}{2})du\Bigg|dt\leq$$

$$\leq 2\Big(C_4+\frac{C_5}{n\psi(n)}\Big)\int\limits_{\frac{n\pi}{2}}^{\infty}\frac{dt}{t}=\frac{C_6}{n}+\frac{C_7}{n^2\psi(n)}, \qquad (27)$$

$$\int\limits_{|t|\geq n\pi}\Bigg|\int\limits_0^{\infty}\tau_n(u)\cos(ut+\frac{\beta\pi}{2})du\Bigg|dt\leq\frac{C_6}{2n}+\frac{C_7}{2n^2\psi(n)}. \qquad (28)$$

Враховуючи, що $\tau_n(u)$ неперервна на $[0,\infty)$, $\tau_n(0)=0$, $\lim\limits_{u\to\infty}\tau_n(u)=0$, $\tau_n'(u)$ неперервна на $[0,1)$ і $(1,\infty)$, $\tau_n'(u)>0$ на $[0,1]$, інтегруючи частинами, отримаємо

$$\Bigg|\int\limits_0^{\infty}\tau_n(u)\cos(ut+\frac{\beta\pi}{2})du\Bigg|\leq\frac{1}{t}\Bigg(\int\limits_0^{\frac{1}{n}}|\tau_n'(u)|du+$$

$$+\Bigg|\int\limits_{\frac{1}{n}}^{1}\tau_n'(u)\sin(ut+\frac{\beta\pi}{2})du\Bigg|+\Bigg|\int\limits_1^{\infty}\tau_n'(u)\sin(ut+\frac{\beta\pi}{2})du\Bigg|\Bigg). \qquad (29)$$

Так як на проміжку $[0,1]$ $\tau_n'(u)$ – невід'ємна, а на $[\frac{1}{n},1]$ $\tau_n'(u)$ не зростає, то

$$\frac{1}{t}\Bigg(\int\limits_0^{\frac{1}{n}}|\tau_n'(u)|du+\Big|\int\limits_{\frac{1}{n}}^{1}|\tau_n'(u)\sin(ut+\frac{\beta\pi}{2})du\Big|\Bigg)<$$

$$<\frac{1}{t}\Big(\tau_n(\frac{1}{n})-\tau_n(0)+\int\limits_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}+\frac{\pi}{t}}\tau_n'(u)du\Big)=\frac{1}{t}\tau_n\Big(\frac{1}{n}+\frac{\pi}{t}\Big). \tag{30}$$

Провівши заміну змінних, враховуючи представлення функції $\tau_n(u)$ і рівність (24), отримаємо

$$\int\limits_{\frac{\pi}{(1-1/n)}}^{\pi n}\frac{1}{t}\tau_n(\frac{1}{n}+\frac{\pi}{t})dt=O(1). \tag{31}$$

Так як $\tau_n(u)$ опукла вниз на $[1,\infty)$, $\lim\limits_{u\to\infty}\tau_n'(u)=0$ і $-\frac{n\psi'(n)}{\psi(n)}<2$, то, інтегруючи частинами, маємо

$$\begin{aligned}\frac{1}{t}\Big|\int\limits_1^{\infty}\tau_n'(u)\sin(ut+\frac{\beta\pi}{2})du\Big|\le\\ \le\frac{1}{t^2}\big(-\frac{n\psi'(n)}{\psi(n)}\big)\big(1+\big|\cos(t+\frac{\beta\pi}{2})\big|\big)<\frac{4}{t^2}.\end{aligned} \tag{32}$$

Із рівності (32) при $n>1$ випливає, що

$$\int\limits_{|t|>\frac{\pi}{(1-1/n)}}\Bigg|\frac{1}{t}\int\limits_1^{\infty}\tau_n'(u)\sin(ut+\frac{\beta\pi}{2})du\Bigg|dt<C_8, \tag{33}$$

а з рівностей (28), (31) і (33) отримаємо, що

$$\int\limits_{\frac{\pi}{(1-1/n)}}^{\infty}\Bigg|\int\limits_0^{\infty}\tau_n(u)\cos(ut+\frac{\beta\pi}{2})du\Bigg|dt<C_9. \tag{34}$$

Міркуючи аналогічно, як і при доведенні нерівності (19), можна показати, що

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{(1-1/n)}}^{\frac{\pi}{(1-1/n)}} \left|\int\limits_{1}^{\infty} \tau_n(u)\cos(ut+\frac{\beta\pi}{2})du\right|dt < C_{10}+\frac{2\pi}{\psi(n)}\int\limits_{n}^{\infty}\frac{\psi(u)}{u}du. \quad (35)$$

Із обмеженості функції $\tau_n(u)$ на $[0,1]$ випливає, що

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{(1-1/n)}}^{\frac{\pi}{(1-1/n)}} \left|\int\limits_{0}^{1} \tau_n(u)\cos(ut+\frac{\beta\pi}{2})du\right|dt < C_{11}. \quad (36)$$

Отже, якщо $\tau_n(u)$ опукла вниз на $[0,\frac{1}{n}]$, то із (34)-(36) маємо

$$A(\tau_n) < C_1+\frac{2\pi}{\psi(n)}\int\limits_{n}^{\infty}\frac{\psi(u)}{u}du. \quad (37)$$

Якщо $\tau_n(u)$ на $[0,\frac{1}{n}]$ опукла вгору, то, враховуючи, що коли $\tau_n'(u)>0$, $u\in[0,1]$, інтегруючи частинами, маємо

$$\begin{gathered}\left|\int\limits_{0}^{\infty} \tau_n(u)\cos(ut+\frac{\beta\pi}{2})du\right| = \\ = \frac{1}{t}\tau_n(\frac{\pi}{t})+\frac{1}{t}\left|\int\limits_{1}^{\infty}\tau_n'(u)\sin(ut+\frac{\beta\pi}{2})du\right|.\end{gathered} \quad (38)$$

Міркуючи так само, як і при доведенні (31), будемо мати

$$\int\limits_{\pi}^{\pi n}\frac{1}{t}\tau_n(\frac{\pi}{t})dt < C_{12}. \quad (39)$$

Використовуючи представлення $\tau_n(u)$ і те, що $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\psi(n) = \infty$, виконуючи інтегрування, отримаємо

$$\int\limits_{\pi n}^{\infty} \frac{1}{t}\tau_n(\frac{\pi}{t})dt < \frac{C_{13}}{n^2\psi(n)}. \tag{40}$$

З нерівності (32) маємо

$$\int\limits_{\pi}^{\infty}\left|\frac{1}{t}\int\limits_{1}^{\infty}\tau_n'(u)\sin(ut+\frac{\beta\pi}{2})du\right|dt < \pi\int\limits_{\pi}^{\infty}\frac{dt}{t^2} = 1. \tag{41}$$

Відповідно, із (38)-(41) отримаємо

$$\int\limits_{\pi}^{\infty}\left|\int\limits_{0}^{\infty}\tau_n(u)\cos(ut\pm\frac{\beta\pi}{2})du\right|dt < C_{14}. \tag{42}$$

Так як

$$\int\limits_{-\infty}^{-\pi}\left|\int\limits_{0}^{\infty}\tau_n(u)\cos(ut+\frac{\beta\pi}{2})du\right|dt = \int\limits_{\pi}^{\infty}\left|\int\limits_{0}^{\infty}\tau_n(u)\cos(ut-\frac{\beta\pi}{2})du\right|dt,$$

то із нерівності (42) маємо

$$\int\limits_{|t|>\pi}\left|\int\limits_{0}^{\infty}\tau_n(u)\cos(ut+\frac{\beta\pi}{2})du\right|dt < 2C_{14}. \tag{43}$$

Враховуючи (19), отримаємо

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\int\limits_{1}^{\infty}\tau_n(u)\cos(ut+\frac{\beta\pi}{2})du\right|dt < C_{15} + \frac{2\pi}{\psi(n)}\int\limits_{n}^{\infty}\frac{\psi(u)}{u}du. \tag{44}$$

З (43), (44) робимо висновок, що

$$A(\tau_n) < C_1 + \frac{2\pi}{\psi(n)} \int\limits_n^\infty \frac{\psi(u)}{u} du. \tag{45}$$

Із співвідношень (23), (37) і (45) випливає, що $A(\tau_n)$ задовольняє (9).

Доведемо, що

$$a(\tau_n) = O\left(\frac{1}{n^2\psi(n)}\right). \tag{46}$$

Так як $\lim\limits_{n\to\infty} n\psi(n) = C > 0$, то для випадку, коли $\tau_n(u)$ опукла вниз, (46) випливає з (27). Якщо ж $\tau_n(u)$ опукла вгору на $[0, \frac{1}{n}]$, то, використовуючи представлення $\tau_n(u)$ і провівши заміну змінних, отримаємо

$$\begin{gathered} \int\limits_{\frac{n\pi}{2}}^{n\pi} \frac{1}{t}\tau_n(\frac{\pi}{t})dt = \int\limits_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \frac{\tau_n(v)}{v} dv = \\ = \frac{1}{\psi(n)} \int\limits_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \frac{(1-\cos\frac{\pi}{2}v)\psi(nv)}{v} dv = O\left(\frac{1}{n^2\psi(n)}\right). \end{gathered} \tag{47}$$

З рівностей (40) і (47) випливає, що

$$\int\limits_{\frac{n\pi}{2}}^{\infty} \frac{1}{t}\tau_n(\frac{\pi}{t})dt = O\left(\frac{1}{n^2\psi(n)}\right), \tag{48}$$

а з (32)

$$\int\limits_{\frac{n\pi}{2}}^{\infty} \left| \frac{1}{t} \int\limits_1^\infty \tau_n'(u) \sin(ut + \frac{\beta\pi}{2}) du \right| dt = O\Big(\frac{1}{n}\Big). \tag{49}$$

Тоді з (38), (48) і (49) отримаємо рівність

$$\int\limits_{\frac{n\pi}{2}}^{\infty}\left|\int\limits_{0}^{\infty}\tau_n(u)\cos(ut+\frac{\beta\pi}{2})du\right|dt = O\left(\frac{1}{n^2\psi(n)}\right). \qquad (50)$$

Так як і $\int\limits_{-\infty}^{-\frac{n\pi}{2}}|\int\limits_{0}^{\infty}\tau_n(u)\cos(ut+\frac{\beta\pi}{2})du|dt = O(\frac{1}{n^2\psi(n)})$, то з рівності (50) випливає виконання (46), коли $\tau_n(u)$ опукла вгору на $[0, \frac{1}{n}]$.

Використовуючи лему 1, з урахуванням рівностей (9) і (46) отримаємо (25). Теорему доведено.

Умови теореми 4 задовольняють, наприклад, функції $\psi(u) = u^{-r}\ln^{\alpha}(u+C)$, де $1 \le r \le 2$, $\alpha \in R$, $C > 0$; $\psi(u) = u^{-r}$, де $1 \le r \le 2$.

Література

[1] Степанец А.И. Методы теории приближений: В 2 ч. / Александр Иванович Степанец — К.: Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Т. 40. — Ч.I. — 427 с.

[2] Бари Н.К. Тригонометрические ряды. — М.: Физматгиз, 1961. — 936 с.

[3] Бушев Д.Н. Приближение классов непрерывных периодических функций суммами Зигмунда. — Киев, 1984. — 64 с. — (Препр./ АН УССР. Ин-т математики; 84.56).

[4] Rogosinski W. Über die Absnitte thrigonometrische Reihen // Math. Annallen. — 1926. — Vol 95. P. 123–126.

[5] Корнейчук Н.П. О приближении периодических функций, удоволетворяющих условию Липшица, суммами Бернштейна-Рогозинского // Докл. АН СССР. — 1959. — Т. 125, № 2. — С. 775–787.

[6] Дзядык В.К., Степанец А.И. О приближении функций классов Гёльдера полиномами Рогозинского // Докл. АН УССР. — 1969. — № 3. — С. 22–29.

[7] Дзядык В.К., Степанец А.И. Асимптотические равенства для точных верхних граней приближений функций классов Гёльдера при помощи полиномов Рогозинского // Укр. мат. журн. — 1972. — Т. 24, № 4. — С. 17–25.

[8] Гаврилюк В.Т., Степанец А.И. Приближение дифференцируемых функций полиномами Рогозинского // Там же. — 1973. — Т. 25, № 1. — С. 7–17.

[9] Дзядык В.К., Гаврилюк В.Т. О точных верхних гранях приближений на классах дифференцируемых функций при помощи полиномов Рогозинского // Там же. — 1970. — Т. 22, № 4. — С. 12–28.

[10] Степанец А.И. Приближение периодических функций полиномами Рогозинского и полиномами Бернштейна. Киев, — 1974. — 32 с. — (Препр./ АН УССР. Ин-т математики; 74.1).

[11] Степанец А.И. Равномерное приближение тригонометрическими полиномами. Киев: Наук. думка, 1981. — 340 с.