Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2017, т. 14, № 3, 102–113

УДК 517.984

А. С. Горюнов

Інститут математики НАН України, Київ;
goriunov@imath.kiev.ua

Оператори Штурма–Ліувілля з комплексними сингулярними коефіцієнтами

We consider on the finite interval the Sturm–Liouville differential expression

$$l(y) = -(py')' + qy + i((ry)' + ry')$$

with coefficients satisfying conditions: $q = Q'$, $1\big/\sqrt{|p|}$, $Q\big/\sqrt{|p|}$, $r\big/\sqrt{|p|} \in L_2$, where the derivative of function Q is understood in the sense of distributions. Corresponding operators are correctly defined as quasi-differential. Conditions for the minimal operator to be symmetric are obtained and all its self-adjoint, maximal dissipative and maximal accumulative extensions are described in terms of boundary conditions.

На скінченному інтервалі розглядається диференціальний вираз Штурма–Ліувілля

$$l(y) = -(py')' + qy + i((ry)' + ry')$$

коефіцієнти якого задовольняють умови: $q = Q'$, $1\Big/\sqrt{|p|}$, $Q\Big/\sqrt{|p|}$, $r\Big/\sqrt{|p|} \in L_2$, де похідна функції Q розуміється в сенсі узагальнених функцій. Відповідні оператори коректно визначено як квазідиференціальні. Знайдено умови симетричності мінімального оператора, описано всі його самоспряжені, максимальні дисипативні та максимальні акумулятивні розширення в термінах крайових умов.

1. Вступ

Оператори, пов'язані з виразом Штурма–Ліувілля

$$l(y) = -(py')' + qy, \tag{1}$$

виникають в багатьох задачах аналізу і їм присвячені численні публікації, див., наприклад, [1] та наведені там посилання.

При цьому класичними умовами на коефіцієнти є

$$q \in C\left([a,b];\mathbb{R}\right), \qquad 0 < p \in C^1\left([a,b];\mathbb{R}\right).$$

Основні положення цієї теорії залишаються в силі і при більш загальних припущеннях

$$q, 1/p \in L_1\left([a,b],\mathbb{C}\right).$$

Проте часто виникає потреба вивчати оператори у випадку, коли потенціал q є мірою Радона або навіть узагальненою функцією. При цьому виникає проблема коректного означення такого оператора.

В роботах [2, 4] (див. також [5]) запропоновано підхід, що дозволяє коректно означити диференціальний вираз (1) при наступних умовах на коефіцієнти

$$q = Q', \quad 1/p,\, Q/p,\, Q^2/p \in L_1\left([a,b];\mathbb{C}\right),$$

де похідну Q' розуміють в сенсі узагальнених функцій. Цей підхід спирається на теорію квазідиференціальних операторів Шина-Цеттла [6, 7] и дозволяє також досліджувати диференціальні оператори високого порядку [3, 4].

Метою даної роботи є поширення цього підходу на більш загальний випадок повного виразу Штурма–Ліувілля

$$l(y) = -(py')' + qy + i((ry)' + ry'), \tag{2}$$

коефіцієнти якого задовольняють умови:

$$q = Q', \quad \frac{1}{\sqrt{|p|}}, \frac{Q}{\sqrt{|p|}}, \frac{r}{\sqrt{|p|}} \in L_2\left([a,b];\mathbb{C}\right). \tag{3}$$

2. Квазідиференціальні вирази

Наведемо деякі елементи теорії загальних квазідиференціальних за Шином–Цеттлом виразів та операторів.

Нехай $m \in \mathbb{N}$ і задано скінченний інтервал $[a,b]$. Матрицею Шина-Цеттла порядку m на інтервалі $[a,b]$ називається квадратна матриця A розміру $m \times m$, елементами якої є комплекснозначні функції $(a_{k,s})$ такі, що

1) $a_{k,s} = 0$ майже скрізь на $[a,b]$, $s > k+1$;
2) $a_{k,s} \in L_1\left([a,b],\mathbb{C}\right), \quad a_{k,k+1} \neq 0$ майже скрізь на $[a,b]$, (4)
   $k = 1, 2, \ldots, m$, $s = 1, 2, \ldots, k+1$.

Вона визначає квазіпохідні функції $y(t) \in \mathrm{Dom}(A)$ порядків $k \leq m$ наступним рекурентним чином:

$$D^{[0]}y := y,$$

$$D^{[k]}y := a_{k,k+1}^{-1}(t)\left((D^{[k-1]}y)' - \sum_{s=1}^{k} a_{k,s}(t)D^{[s-1]}y\right),$$
$$k = 1, 2, \dots, m-1,$$
$$D^{[m]}y := (D^{[m-1]}y)' - \sum_{s=1}^{m} a_{m,s}(t)D^{[s-1]}y.$$

Область визначення квазіпохідних $\mathrm{Dom}(A)$ є підмножиною $AC([a,b],\mathbb{C})$, а саме:

$$\mathrm{Dom}(A) := \left\{ y \,\middle|\, D^{[k]}y \in AC([a,b],\mathbb{C}),\ k = \overline{0, m-1} \right\}.$$

Звідси випливає, що $D^{[m]}y \in L_1([a,b],\mathbb{C})$.

Квазідиференціальний вираз $l(y)$ порядку m, що відповідає матриці Шина–Цеттла A, визначається наступним чином:

$$l(y) := i^m D^{[m]}y.$$

3. Регуляризація диференціального виразу квазіпохідними

Аналогічно роботі [8] введемо по коефіцієнтах виразу (2) квазіпохідні наступним чином:

$$D^{[0]}y := y,$$
$$D^{[1]}y := py' - (Q + ir)y$$
$$D^{[2]}y := (D^{[1]}y)' + \frac{Q - ir}{p} D^{[1]}y + \frac{Q^2 + r^2}{p} y$$

Позначимо також

$$\widehat{y}(t) = \left(D^{[0]}y(t), D^{[1]}y(t)\right) \in \mathbb{C}^2.$$

В припущеннях (3) ці вирази задовольняють умови (4) і є квазіпохідними Шина–Цеттла. Також можна перевірити, що для гладких коефіцієнтів p, Q та r справедлива рівність $l(y) = -D^{[2]}y$.

Це означає, що можна коректно визначити вираз (2) при умовах (3) як квазідиференціальний вираз Шина–Цеттла:

$$l[y] = -D^{[2]}y.$$

Відповідна матриця Шина–Цеттла має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} \frac{Q+ir}{p} & \frac{1}{p} \\ & \\ -\frac{Q^2+r^2}{p} & -\frac{Q-ir}{p} \end{pmatrix} \in L_1([a,b];\mathbb{C}^{2\times 2}). \tag{5}$$

Квазідиференціальний вираз l породжує в гільбертовому просторі $L_2([a,b];\mathbb{C})$ (див. [6, 7]) *максимальний* квазідиференціальний оператор

$$L_1 : y \to l[y],$$

$$\mathrm{Dom}(L_1) = \left\{ y \,\middle|\, y, D^{[1]}y \in AC([a,b];\mathbb{C}),\ D^{[2]}y \in L_2([a,b];\mathbb{C}) \right\}.$$

Мінімальний квазідиференціальний оператор визначається як звуження оператора L_1 на лінійний многовид

$$\mathrm{Dom}(L_0) := \{ y \in \mathrm{Dom}(L_1) \,|\, \widehat{y}(a) = \widehat{y}(b) = 0 \}.$$

З результатів [6, 7] для загальних квазідиференціальних операторів Шина–Цеттла та формули (5) випливає

Теорема 1. *Оператори L_0 і L_1 замкнені та щільно визначені в просторі $L_2([a,b];\mathbb{C})$.*

Тоді і лише тоді, коли p, Q та r є дійснозначними, оператор L_0 є симетричним з індексом дефекту $(2,2)$ і

$$L_0^* = L_1.$$

Доведення. Відмітимо лише, що дійснозначність p, Q та r рівносильна тому, що матриця Шина-Цеттла A, задана формулою (5), задовольняє умові $A = -\Lambda_2^{-1}\overline{A^T}\Lambda_2$, де $\overline{A^T}$ — комплексно спряжена до транспонованої матриці A, і

$$\Lambda_2 := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тому твердження теореми випливають з [6, Th. 10, Th. 11]. □

4. Граничні трійки та розширення мінімального оператора

Всюди далі ми будемо вважати, що функції p, Q та r дійсні і, відповідно, оператор L_0 є симетричним з індексом дефекту $(2, 2)$. Отже, можна поставити питання про опис різних класів його розширень, зокрема, самоспряжених, в термінах граничних трійок.

Теорія граничних трійок заснована на роботах Рофе-Бекетова [9] і Кочубея [10], див. також монографію [11] і наведену там бібліографію.

Нагадаємо

Означення 1. *Нехай T — абстрактний замкнений щільно визначений симетричний оператор в гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ з рівними скінченними або нескінченними дефектними числами. Трійка (H, Γ_1, Γ_2), де H — допоміжний гільбертів простір, а Γ_1, Γ_2 — лінійні відображення з $\mathrm{Dom}(L^*)$ в H, називається* граничною трійкою *або* простором граничних значень *симетричного оператора T, якщо*

1. *для будь-яких $f, g \in \mathrm{Dom}\,(T^*)$,*

$$(T^* f, g)_{\mathcal{H}} - (f, T^* g)_{\mathcal{H}} = (\Gamma_1 f, \Gamma_2 g)_H - (\Gamma_2 f, \Gamma_1 g)_H\,,$$

2. *для будь-яких $f_1, f_2 \in H$ існує вектор $f \in \mathrm{Dom}\,(T^*)$ такий, що $\Gamma_1 f = f_1$, $\Gamma_2 f = f_2$.*

З означення граничної трійки випливає, що $f \in \mathrm{Dom}\,(T)$ тоді і лише тоді, коли $\Gamma_1 f = \Gamma_2 f = 0$. Для довільного симетричного оператора T з індексом дефекту (n, n) $(n \leq \infty)$ існує гранична трійка (H, Γ_1, Γ_2) с $\dim H = n$. Вона не єдина.

Для мінімального квазідиференціального оператора L_0 явний вигляд граничної трійки дає

Теорема 2. *Трійка* $(\mathbb{C}^2, \Gamma_{[1]}, \Gamma_{[2]})$ *де* $\Gamma_{[1]}$, $\Gamma_{[2]}$ *— лінійні відображення*

$$\Gamma_{[1]} y := \left(D^{[1]} y(a), -D^{[1]} y(b) \right), \; \Gamma_{[2]} y := (y(a), y(b)) \,, \tag{6}$$

є граничною трійкою оператора L_0.

Доведення. Твердження теореми 2 випливає з теореми 1 та [4, Lemma 4.4], оскільки результат, встановлений там, справедливий для довільних формально самоспряжених квазідиференціальних виразів Шина–Цеттла. □

Нагадаємо, що щільно заданий лінійний оператор T в комплексному гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ називається *дисипативним (акумулятивним)*, якщо $\mathrm{Im}\,(Tf, f)_{\mathcal{H}} \geq 0 (\leq 0)$, $f \in \mathrm{Dom}(T)$ і *максимальним дисипативним (максимальним акумулятивним)* якщо, крім того, у оператора T немає нетривіальних дисипативних (акумулятивних) розширень в просторі $\mathcal{H}$.

Зокрема, кожний симетричний оператор є одночасно дисипативним і акумулятивним, а самоспряжений – максимальним дисипативним та максимальним акумулятивним. Тому, якщо мінімальний оператор L_0 є симетричним, то змістовним є питання опису його максимальних дисипативних та максимальних акумулятивних розширень.

Позначимо через L_K звуження оператора L_1 на множину функцій $y(t) \in \mathrm{Dom}(L_1)$, які задовольняють крайову умову канонічного вигляду

$$(K - I)\,\Gamma_{[1]} y + i\,(K + I)\,\Gamma_{[2]} y = 0. \tag{7}$$

Аналогічно позначимо через L^K звуження оператора L_1 на множину функцій $y(t) \in \mathrm{Dom}(L_1)$, які задовольняють крайову умову канонічного вигляду

$$(K - I)\,\Gamma_{[1]}y - i\,(K + I)\,\Gamma_{[2]}y = 0. \tag{8}$$

Теорема 2 разом з [11, Th. 1.6] приводять до наступного опису всіх максимальних дисипативних, максимальних дисипативних та самоспряжених розширень.

Теорема 3. *Кожне L_K, де K – оператор стиску в просторі $\mathbb{C}^2$, є максимально дисипативним розширенням оператора L_0. Аналогічно, кожне L^K, де K – оператор стиску в просторі $\mathbb{C}^2$, є максимально акумулятивним розширенням оператора L_0. Навпаки, для кожного максимального дисипативного (акумулятивного) розширення $\widetilde{L}$ оператора L_0 знайдеться оператор стиску K такий, що $\widetilde{L} = L_K$ $(\widetilde{L} = L^K)$. Розширення L_K та L^K є самоспряженими тоді і лише тоді, коли K — унітарна матриця в $\mathbb{C}^2$. Всі ці відповідності між матрицями $\{K\}$ і розширеннями $\{\widetilde{L}\}$ бієктивні.*

5. Розширення з розділеними крайовими умовами

Окремо виділимо розширення, задані розділеними крайовими умовами.

Означення 2. *Крайові умови, що визначають оператор $L \subset L_1$ називаються* розділеними*, якщо для довільних функцій $y \in \mathrm{Dom}(L)$ і $g, h \in \mathrm{Dom}(L_1)$,*

$$g, h \in \mathrm{Dom}(L) \quad \textit{якщо} \quad \mathbf{g_a} = \mathbf{y_a}, \quad \mathbf{g_b} = 0, \quad \mathbf{h_a} = 0, \quad \mathbf{h_b} = \mathbf{y_b},$$

де через $\mathbf{f_a}$ позначено росток неперервної функції f в точці a.

Теорема 4. *Крайові умови* (7), (8), *що визначають розширення* L_K *та* L^K *оператора* L_0, *є розділеними тоді і лише тоді, коли матриця* K *має діагональний вигляд*

$$K = \begin{pmatrix} K_a & 0 \\ 0 & K_b \end{pmatrix},$$

де $K_a, K_b \in \mathbb{C}$. *Максимальна дисипативність розширення* L_K *та максимальна акумулятивність розширення* L^K *при цьому еквівалентні тому, що* $|K_a| \le 1$, $|K_b| \le 1$, *а самоспряженість — тому, що* $|K_a| = |K_b| = 1$.

Доведення. Враховуючи теорему 2, твердження теореми 4 випливає з [4, Th. 6.1]. $\square$

6. Узагальнені резольвенти

Нагадаємо

Означення 3. Узагальненою резольвентою *замкненого симетричного оператора* T *називається операторна функція* R_λ *комплексного параметра* $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, *яка допускає представлення вигляду*

$$R_\lambda f = P^+ \left(L^+ - \lambda I^+\right)^{-1} f, \quad f \in \mathcal{H},$$

де L^+ *– деяке самоспряжене розширення оператора* T *з виходом, взагалі кажучи, в більш широкий, ніж* $\mathcal{H}$, *простір* $\mathcal{H}^+$, I^+ *– одиничний оператор в* $\mathcal{H}^+$, P^+ *– оператор ортогонального проектування* $\mathcal{H}^+$ *на* $\mathcal{H}$.

Операторна функція $R_\lambda \quad (\operatorname{Im}\lambda \neq 0)$ є узагальненою резольвентою симетричного оператора T тоді і тільки тоді, коли

$$(R_\lambda f, g)_{\mathcal{H}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\,(F_\mu f, g)}{\mu - \lambda}, \quad f, g \in \mathcal{H},$$

де F_μ – узагальнена спектральна функція оператора T. Це означає, що операторна функція F_μ має наступні властивості [12]:

1^0. при $\mu_2 > \mu_1$ різниця $F_{\mu_2} - F_{\mu_1}$ є обмеженим невід'ємним оператором;

2^0. $F_{\mu+} = F_\mu$ при всіх дійсних μ;

3^0. при будь-якому $x \in \mathcal{H}$,

$$\lim_{\mu\to-\infty} ||F_\mu x||_{\mathcal{H}} = 0, \quad \lim_{\mu\to+\infty} ||F_\mu x - x||_{\mathcal{H}} = 0.$$

Параметричний *внутрішній* опис всіх узагальнених резольвент оператора L_0 дає

Теорема 5. 1) *Нехай* λ *– комплексне число,* $\operatorname{Im}\lambda < 0$. *Тоді кожна узагальнена резольвента оператора* L_0 *задається формулою* $R_\lambda h = y$, *де* y *– розв'язок відповідної крайової задачі вигляду*

$$l(y) = \lambda y + h,$$

$$(K(\lambda) - I)\,\Gamma_{[1]} f + i\,(K(\lambda) + I)\,\Gamma_{[2]} f = 0.$$

Тут $h(x) \in L_2\,([a,b],\mathbb{C})$ *і* $K(\lambda)$ *– регулярна в нижній півплощині операторна функція в просторі* $\mathbb{C}^2$ *така, що* $||K(\lambda)|| \leq 1$.

2) *Для* λ *таких, що* $\operatorname{Im}\lambda > 0$ *кожна узагальнена резольвента оператора* L_0 *задається формулою* $R_\lambda h = y$, *де* y *– розв'язок відповідної крайової задачі вигляду*

$$l(y) = \lambda y + h,$$

$$(K(\lambda) - I)\,\Gamma_1 f - i\,(K(\lambda) + I)\,\Gamma_2 f = 0.$$

Тут $h(x) \in L_2\,([a,b],\mathbb{C})$ *і* $K(\lambda)$ *– регулярна в верхній півплощині операторна функція в просторі* $\mathbb{C}^2$ *така, що* $||K(\lambda)|| \leq 1$.

Ця параметризація узагальнених резольвент операторними функціями K *є бієктивною.*

Доведення. Враховуючи теорему 2, твердження теореми 5 випливає з [4, Th. 7.1]. $\square$

Література

[1] *Zettl A.* Sturm–Liouville Theory. — Providence, American Mathematical Society, 2005. — xii+328 p.

[2] *Goriunov A. S., Mikhailets V. A.* Regularization of singular Sturm–Liouville equations // Methods Funct. Anal. Topology. — 2010. — **16**, № 2. — P. 120–130.

[3] *Goriunov A. S., Mikhailets V. A.* Regularization of two-term differential equations with singular coefficients by quasiderivatives // Ukrainian Math. J. — 2011. — **63**, № 9. — P. 1190–1205.

[4] *Goriunov A. S., Mikhailets V. A., Pankrashkin K.* Formally self-adjoint quasi-differential operators and boundary-value problems // Electron. J. Diff. Equ. — 2013. — № 101. — P. 1–16.

[5] *Eckhardt J., Gesztesy F., Nichols R., Teschl G.* Weyl-Titchmarsh Theory for Sturm-Liouville Operators with Distributional Coefficients // Opuscula Mathematica. — 2013. — **33**, № 3. — P. 467–563.

[6] *Zettl A.* Formally self-adjoint quasi-differential operators // Rocky Mountain J. Math. — 1975. — **5**, № 3. — P. 453–474.

[7] *Everitt W. N., Markus L.* Boundary Value Problems and Symplectic Algebra for Ordinary Differential and Quasi–differential Operators. — Providence, American Mathematical Society, 1999. — xii+187 p.

[8] *Mirzoev K. A., Shkalikov A. A.* Differential operators of even order with distribution coefficients // Math. Notes. — 2016. — **99**, № 5. — P. 779–784.

[9] F. S. Rofe-Beketov. Selfadjoint extensions of differential operators in a space of vector-valued functions. *Teor. Funkciĭ Funkcional. Anal. i Priložen.*, (1969), no. 8, 3–24.

[10] A. N. Kochubei. О расширениях симметрических операторов и симметрических бинарных отношений. *Math. Notes*, **17** (1975), no. 1, 41–48.

[11] V. I. Gorbachuk, M. L. Gorbachuk. Boundary value problems for operator differential equations. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1991.

[12] N. I. Akhiezer, I. M. Glazman. Theory of Linear Operators in Hilbert Space. Pitman Advanced Publishing Program, 1981.