Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2017, т. 14, № 3, 93–101

УДК 517.5

М. В. Гембарський, У. З. Грабова, І. В. Кальчук

Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк; kalchuk_i@ukr.net

Про наближення класів W^1_∞ сумами Пуассона

We found asymptotic equalities for the least upper bounds of the approximation by Poisson sums of order $(n-1)$ on the class W^1_∞ in the uniform metric.

Знайдено асимптотичні рівності для точних верхніх меж наближень сумами Пуассона порядку $(n-1)$ на класі W^1_∞ у рівномірній метриці.

1. Постановка задачі

Нехай C — простір 2π-періодичних неперервних функцій, у якому норма задається за допомогою рівності $\|f\|_C = \max\limits_t |f(t)|$; L_∞ — простір 2π-періодичних вимірних суттєво обмежених функцій з нормою $\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}\limits_t |f(t)|$; L — простір 2π-періодичних сумовних на періоді функцій, в якому норма задається рівністю $\|f\|_L = \|f\|_1 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)|dt$.

© М. В. Гембарський, У. З. Грабова, І. В. Кальчук, 2017

Через $W^r_\infty, r \in \mathbb{N}$, позначимо множину 2π-періодичних функцій, які мають абсолютно неперервні похідні до $(r-1)$-го порядку включно і $\|f^{(r)}(t)\|_\infty \le 1$.

Нехай функція $f \in L$ і $S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ — її ряд Фур'є.

Позначимо через $\Lambda = \{\lambda_\delta(k)\}$ множину функцій натурального аргументу, залежну від параметра $\delta \in E_\Lambda \subseteq \mathbb{R}$, що має принаймні одну граничну точку і, крім того, $\lambda_\delta(0) = 1$ $\forall \delta \in E_\Lambda$. За допомогою множини Λ кожній функції f поставимо у відповідність ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_\delta(k)(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \ \ \delta \in E_\Lambda.$$

Якщо цей ряд при кожному $\delta \in E_\Lambda$ є рядом Фур'є деякої неперервної функції, то будемо її позначати через $U_\delta(f;x;\Lambda)$. Таким чином, будь-яка множина Λ задає метод побудови операторів $U_\delta(f;x;\Lambda)$. Зокрема, у випадку $\lambda_\delta(k) = e^{-\frac{k}{\delta}}$, $\delta > 0$, оператор $U_\delta(f;x;\Lambda)$ позначають $P_\delta(f;x)$ і називають інтегралом Пуассона функції f

$$P_\delta(f;x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k}{\delta}}(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Апроксимативні властивості інтегралів Пуассона на різних функціональних класах досить добре вивчені в роботах [1]– [10].

Відмітимо, що у випадку, коли в множині Λ покласти $\delta = n$, $n \in \mathbb{N}$, то числа $\lambda_\delta(k) =: \lambda_{n,k}$ будуть елементами числової прямокутної матриці $\big(n, k = 0, 1, ...; \lambda_{n,0} = 1, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\big)$, а коли, крім того $\lambda_{n,k} \equiv 0, k > n$, — елементами числової трикутної матриці.

Розглянемо аналог інтегралів Пуассона для трикутних матриць. Поклавши $\lambda_{n,k} = e^{-\frac{k}{n}}, k = 1, 2, \ldots n-1$, отримаємо тригонометричні поліноми виду

$$P_{n-1}(f;x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} e^{-\frac{k}{n}}(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \qquad (1)$$

які називають сумами Пуассона функції f порядку $(n-1)$.

Робота присвячена вивченню асимптотичної поведінки при $n\to\infty$ величини

$$\mathcal{E}\big(W^1_\infty;P_{n-1}\big)_C=\sup_{f\in W^1_\infty}\big\|f(\cdot)-P_{n-1}(f;\cdot)\big\|_C. \qquad (2)$$

Якщо для величини (2) в явному вигляді знайдено функцію $\varphi(n)$ натурального аргументу таку, що при $n\to\infty$ має місце асимптотична рівність

$$\mathcal{E}(W^1_\infty;P_{n-1})_C=\varphi(n)+o\left(\varphi(n)\right),$$

то, згідно з О.І. Степанцем [**?**, с. 198], будемо говорити, що розв'язано задачу Колмогорова–Нікольського для класу W^1_∞ і методу P_{n-1} в рівномірній метриці.

Відмітимо, що незважаючи на численні дослідження операторів, що породжуються трикутними числовими матрицями, апроксимативні властивості сум Пуассона на даний час досліджено не було.

2. Наближення сумами Пуассона функцій класу W^1_∞

Справедливе наступне твердження.

Теорема 1. *При $n\to\infty$ має місце асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}\big(W^1_\infty;P_{n-1}\big)_C=\frac{2}{\pi}\frac{\ln n}{n}+O\left(\frac{1}{n}\right). \qquad (3)$$

Доведення. Для оператора P_{n-1} при $n\ge 2$ покладемо

$$\tau_n(u)=\begin{cases}(1-e^{-u})n, & 0\le u\le\frac{1}{n},\\ \frac{1-e^{-u}}{u}, & \frac{1}{n}\le u\le 1-\frac{1}{n},\\ \frac{1-ne^{-(1-\frac{1}{n})(1-u)}}{u}, & 1-\frac{1}{n}\le u\le 1,\\ \frac{1}{u}, & u\ge 1.\end{cases} \qquad (4)$$

Очевидно, що функція $\tau_n(u)$ виду (4) абсолютно неперервна на $[0,\infty)$. Згідно з теоремою 5 роботи [12, с. 81], за умови збіжності інтегралів

$$\int\limits_0^1 \frac{|\tau(u)|}{u}du, \tag{5}$$

$$\int\limits_0^1 u(1-u)|d\tau'(u)|du, \tag{6}$$

при $n\to\infty$ справедлива асимптотична рівність

$$\mathcal{E}(W^1_\infty;P_{n-1})_C=\frac{2}{\pi n}\int\limits_0^1 \frac{|\tau(u)|}{u}du+O\Bigg(\frac{1}{n}\int\limits_0^{\frac{2}{\pi n}}\frac{|\tau(u)|}{u}du+$$

$$+\frac{|\tau(0)|}{n}+\frac{1}{n}\int\limits_0^1 u(1-u)|d\tau'(u)|+\frac{1}{n}\Bigg). \tag{7}$$

Використовуючи представлення функції $\tau_n(u)$ виду (4) одержимо

$$\int\limits_0^1 \frac{|\tau(u)|}{u}du=n\int\limits_0^{\frac{1}{n}}\frac{1-e^{-u}}{u}du+\int\limits_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}}\frac{1-e^{-u}}{u^2}du+$$

$$+\int\limits_{1-\frac{1}{n}}^{1}\frac{1-ne^{-(1-\frac{1}{n})}(1-u)}{u^2}du=I_1+I_2+I_3. \tag{8}$$

Скориставшись формулами розкладу функцій e^{-x} та $\ln(1+x)$ в степеневий ряд отримаємо

$$I_1=n\int\limits_0^{\frac{1}{n}}\frac{1-e^{-u}}{u}du=n\int\limits_0^{\frac{1}{n}}\frac{1-1+u-\frac{u^2}{2!}+\frac{u^3}{3!}-...}{u}du=$$

$$= n\int\limits_0^{\frac{1}{n}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{u^k}{(k+1)!}du = 1 + O\Big(\frac{1}{n}\Big). \tag{9}$$

$$I_2 = \int\limits_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}}\frac{1-e^{-u}}{u^2}du = \int\limits_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}}\frac{1-1+u-\frac{u^2}{2!}+\frac{u^3}{3!}-\ldots}{u^2}du =$$

$$= \int\limits_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{u^{k-1}}{(k+1)!}du = \int\limits_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}}\frac{du}{u} + \int\limits_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{u^{k-1}}{(k+1)!}du =$$

$$= \ln\Big(1-\frac{1}{n}\Big) - \ln\frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k(k+1)!}\Bigg(\Big(1-\frac{1}{n}\Big)^k - \Big(\frac{1}{n}\Big)^k\Bigg) =$$

$$= \ln n - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{kn^k} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k(k+1)!}\Bigg(\Big(1-\frac{1}{n}\Big)^k - \Big(\frac{1}{n}\Big)^k\Bigg) =$$

$$= \ln n + O(1). \tag{10}$$

Враховуючи, що при $u \in [1-\frac{1}{n}, 1]$ має місце нерівність

$$\frac{1-ne^{-(1-\frac{1}{n})}(1-u)}{u^2} < 2,$$

одержимо оцінку

$$I_3 = \int\limits_{1-\frac{1}{n}}^{1}\frac{1-ne^{-(1-\frac{1}{n})}(1-u)}{u^2}du = O\Big(\frac{1}{n}\Big). \tag{11}$$

Підставляючи оцінки (9)–(11) в (8), отримаємо

$$\int\limits_0^1\frac{|\tau(u)|}{u}du = \ln n + O(1), \quad n\to\infty. \tag{12}$$

Знайдемо оцінку інтеграла виду (6). З формули (4) маємо:

$$\tau''(u) = -e^{-u}, \quad u \in \Big[0, \frac{1}{n}\Big]; \tag{13}$$

якщо $u \in \Big[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\Big]$, то

$$\tau'(u) = \frac{e^{-u}}{u} - \frac{(1 - e^{-u})}{u^2}, \tau''(u) = -\frac{e^{-u}}{u} - \frac{2e^{-u}}{u^2} + \frac{2(1 - e^{-u})}{u^3} \geq 0; \tag{14}$$

якщо $u \in \Big[1 - \frac{1}{n}, 1\Big]$, то

$$\tau'(u) = -(1 - ne^{-(1-\frac{1}{n})})\frac{1}{u^2}, \ \tau''(u) = \frac{2ne^{-(1-\frac{1}{n})}}{u^3} < 0. \tag{15}$$

На підставі (13) та нерівності $(u - u^2)e^{-u} \leq \frac{1}{4}, \quad u \geq 0$, одержуємо оцінку

$$\int\limits_0^{\frac{1}{n}} u(1-u)|d\tau'(u)| = \int\limits_0^{\frac{1}{n}} u(1-u)e^{-u}du \leq \frac{1}{4}\int\limits_0^{\frac{1}{n}} du = \frac{1}{4n}. \tag{16}$$

Із (14), враховуючи опуклість вниз функції $\tau(u)$ на $\Big[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\Big]$, і нерівності

$$u - u^2 \leq \frac{1}{4}, \qquad u \in \mathbb{R}, \tag{17}$$

$$e^{-u} \leq 1, \qquad e^{-u} \leq 1 - u, \qquad u \geq 0, \tag{18}$$

матимемо

$$\int\limits_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}} u(1-u)|d\tau'(u)| \leq \frac{1}{4}\Big(\tau'\Big(1 - \frac{1}{n}\Big) - \tau'\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\big(1 - \frac{1}{n}\big)e^{-(1-\frac{1}{n})} - 1 + e^{-(1-\frac{1}{n})}}{\big(1 - \frac{1}{n}\big)^2} + \frac{1 - e^{-\frac{1}{n}} - \frac{1}{n}e^{-\frac{1}{n}}}{\big(\frac{1}{n}\big)^2}\right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{n}} + \frac{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)^2}\right) \leq K_1. \tag{19}$$

Оскільки при $u \in [1-\frac{1}{n}, 1]$ функція $\tau(u)$ опукла вгору, то з урахуванням (15) і нерівностей (17) та (18) маємо

$$\int\limits_{1-\frac{1}{n}}^{1} u(1-u)|d\tau'(u)| \leq \frac{1}{4}\Big(\tau'\big(1-\frac{1}{n}\big) - \tau'(1)\Big) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{e^{-(1-\frac{1}{n})}}{1-\frac{1}{n}} - \frac{\left(1-e^{-(1-\frac{1}{n})}\right)}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^2} + 1 - \frac{2}{e}\right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{1-\frac{1}{n}} + \Big(1-\frac{2}{e}\Big)\Big) \leq K_2. \tag{20}$$

Співставляючи (16), (19) та (20) одержимо оцінку

$$\int\limits_0^1 u(1-u)|d\tau'(u)| = O(1). \tag{21}$$

Отже, інтеграли (5) та (6) збіжні і на підставі теореми 5 роботи С. О. Теляковського [12] приходимо до рівності (7).

Оскільки $\frac{2}{\pi n} < \frac{1}{n}$, то $\int\limits_0^{\frac{2}{\pi n}} \frac{|\tau(u)|}{u} du < \int\limits_0^{\frac{1}{n}} \frac{|\tau(u)|}{u} du$, і, на підставі (9), маємо

$$\int\limits_0^{\frac{2}{\pi n}} \frac{|\tau(u)|}{u} du = O(1). \tag{22}$$

З представлення функції $\tau(u)$ очевидно, що $\tau(0) = 0$.

З формули (7), враховуючи оцінки (12), (21) та (22) випливає твердження теореми. Теорему доведено.

Література

[1] Натансон И. П. О порядке приближения непрерывной 2π-периодической функции при помощи ее интеграла Пуассона // Докл. АН СССР. — 1950. — Т. 72, № 1. — С. 11–14.

[2] Тиман А. Ф. Точная оценка остатка при приближении периодических дифференцируемых функций интегралами Пуассона // Докл. АН СССР.— 1950.— Т. 74, № 1. — С. 17–20.

[3] Nagy B. Sur l'ordre de l'approximation d'une fonction par son integrale de Poisson // Acta Math. Acad. Sci Hungar. — 1950. — Vol. 1. — P. 183–188.

[4] Штарк Э. Л. Полное асимптотическое разложение для верхней грани уклонения функций из Lip1 от их сингулярного интеграла Абеля-Пуассона // Мат. заметки. — 1973. — Т. 13, № 1. — С. 21–28.

[5] Баскаков В. А. О некоторых свойствах операторов типа операторов Абеля-Пуассона // Мат. заметки. — 1975. — Т. 17, № 2. — С. 169–180.

[6] Жигалло К. М., Харкевич Ю. І. Повна асимптотика відхилення від класу диференційовних функцій множини їх гармонійних інтегралів Пуассона // Укр. мат. журн. — 2002. — Т. 54, № 1. — С. 43–52.

[7] Жигалло Т. В., Харкевич Ю. І. Наближення (ψ, β)-диференційовних функцій, заданих на дійсній осі операторами Абеля-Пуассона // Укр. мат. журн. — 2005. — Т. 57, № 8. — С. 1097–1111.

[8] Жигалло К. М., Харкевич Ю. І. Наближення спряжених диференційовних функцій їх інтегралами Абеля-Пуассона // Укр. мат. журн. — 2009. — Т. 61, № 1. — С. 73–82.

[9] Жигалло Т. В., Харкевич Ю. І. Наближення (ψ, β)-диференційовних функцій інтегралами Пуассона у рівномірній метриці // Укр. мат. журн. — 2009. — Т. 61, № 11. — С. 1497–1515.

[10] Жигалло Т. В., Харкевич Ю. І. Наближення функцій з класу $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ інтегралами Пуассона у рівномірній метриці // Укр. мат. журн. — 2009. — Т. 61, № 12. — С. 1612–1629.

[11] Степанец А. И. Методы теории приближений: В 2 ч. / Александр Иванович Степанец — К.: Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Т. 40. — Ч. I. — 427 с.

[12] Теляковский С. А. О нормах тригонометрических полиномов и приближении дифференцируемых функций линейными средними их рядов Фурье. I // Тр. МИАН СССР. — 1961. — Т. 24. — С. 61–97.